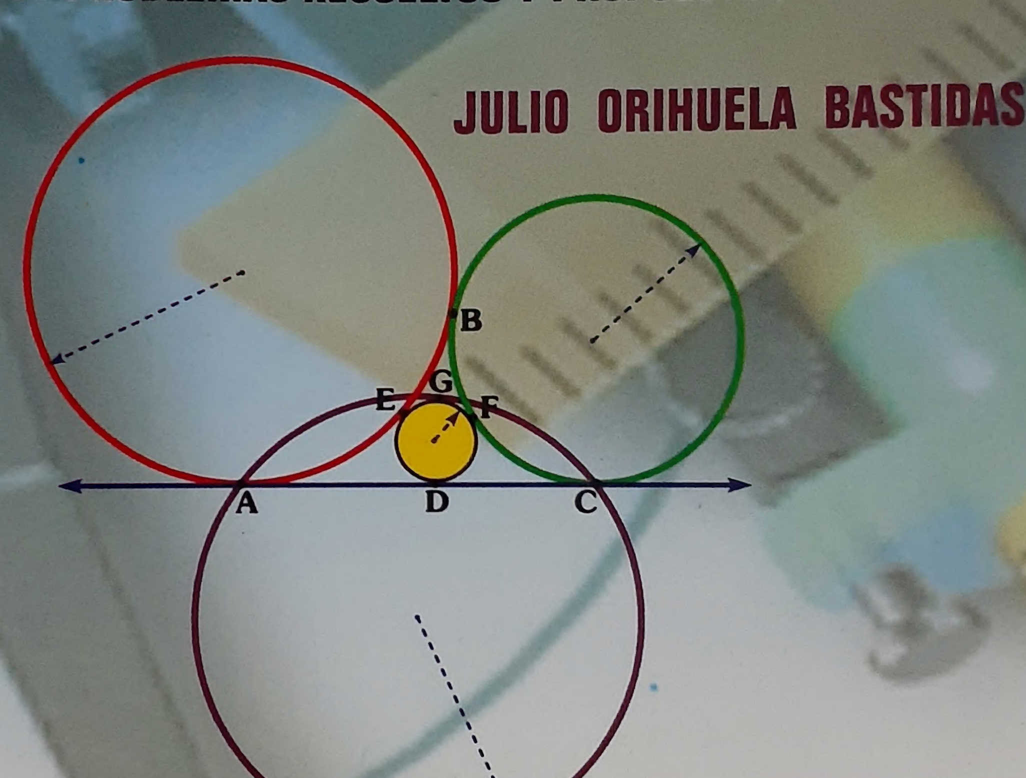
GEOMETRÍA

9 RELACIONES MÉTRICAS

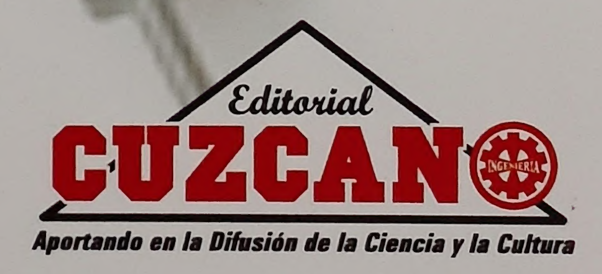
TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico, A,B,C,D,E,F y G son puntos de tangencia.
Calcule m $\widehat{AGC}$.



GEOMETRÍA

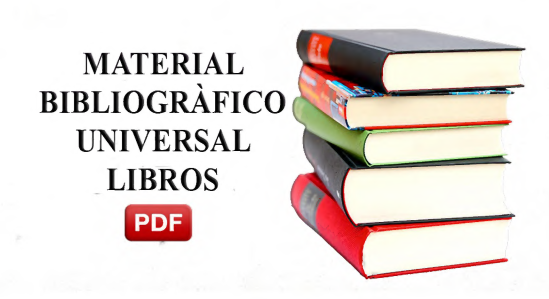
RELACIONES MÉTRICAS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos
300 Problemas Propuestos

Incluye Problemas de Olimpiadas

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



RELACIONES MÉTRICAS

Pág.

Índice

RELACIONES MÉTRICAS

GEOMETRÍA

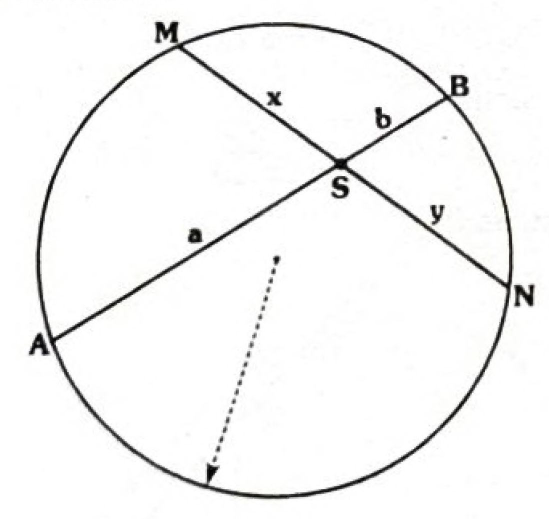
"La matemática ofrece a las ciencias naturales exactas, un cierto grado de seguridad que sin ella no podría alcanzar"

Albert Einstein

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si ubicamos un punto interior a una circunferencia y trazamos dos (o más) cuerdas que pasen por dicho punto, se cumple que el producto de longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda es constante.

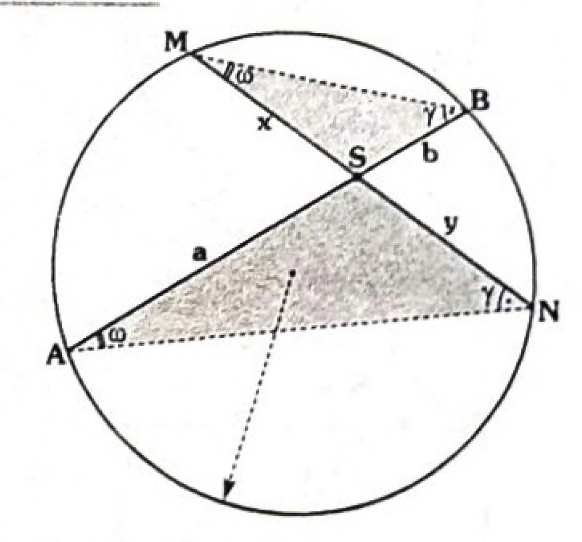


En el gráfico, S es un punto interior.

Se cumple :

$\therefore$ $\boxed{ab = xy}$

Demostración



- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle NAS = m\measuredangle BMS \quad \text{y}$$

$$m\measuredangle MBS = m\measuredangle SNA$$

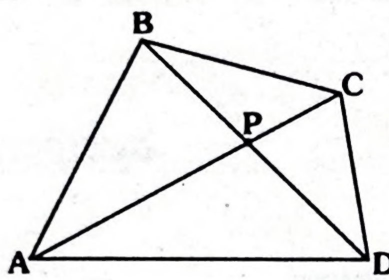
- Luego $\Delta MSB \sim \Delta ASN$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

$$\therefore \ ab = xy$$

Observación

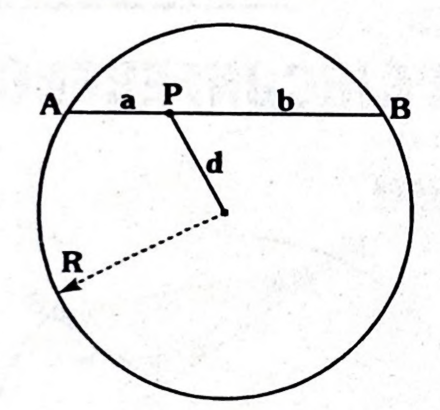
- *En el gráfico, el* ⌂ABCD *es inscriptible.*



Se cumple:

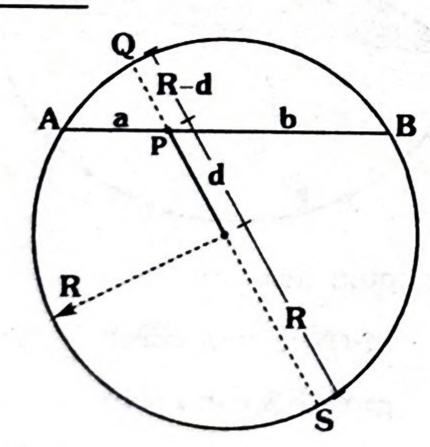
$$(AP)(PC) = (BP)(PD)$$

- *En el gráfico, se cumple:*



$$ab = R^2 - d^2$$

Prueba:



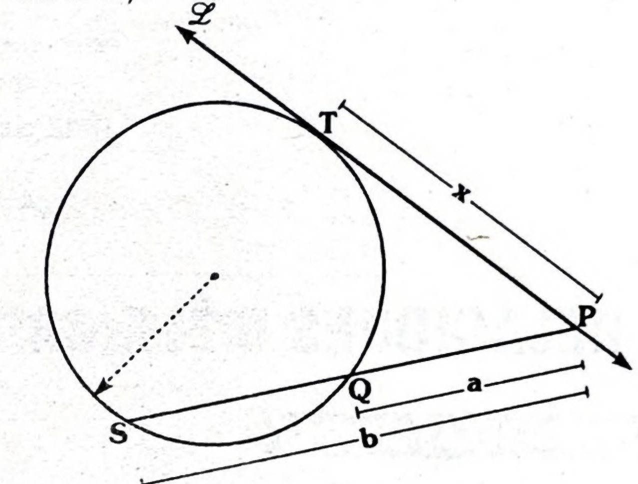
Por teorema de las cuerdas:

$$ab = (R + d)(R - d)$$

$$\therefore\ ab = R^2 - d^2$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

Consideremos una recta tangente a una circunferencia, se cumple que la longitud al cuadrado del segmento cuyo extremo es el punto de tangencia y un punto arbitrario de la recta, es igual al producto de longitudes del segmento secante y su parte externa (*trazados desde dicho punto arbitrario*).



En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta tangente, consideremos:

$\overline{PT}$: Segmento tangente ;

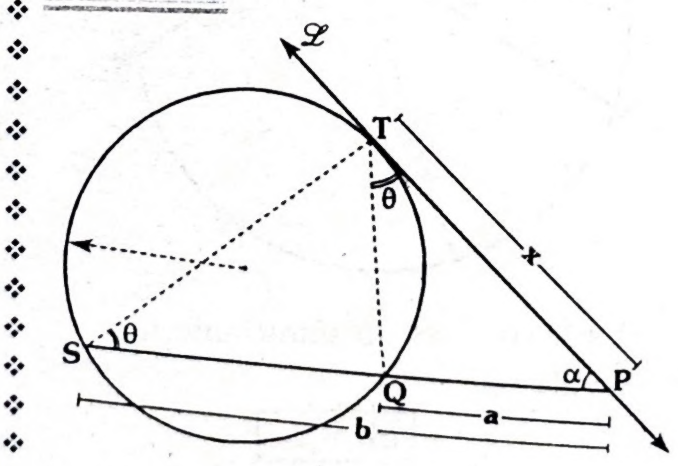
$\overline{PS}$: Segmento secante ; y

$\overline{PQ}$: Parte externa de $\overline{PS}$.

Se cumple:

$$x^2 = ab$$

Demostración



- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle QST = \dfrac{m\overset{\frown}{QT}}{2}$
- Por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle QTP = \dfrac{m\overset{\frown}{QT}}{2} \Rightarrow m\measuredangle QST = m\measuredangle QTP$
- Luego : $\Delta PTS \sim \Delta PQT \Rightarrow \dfrac{x}{b} = \dfrac{a}{x}$

$$\therefore \; x^2 = ab$$

Observación

En el gráfico P, Q, E y F son puntos de tangencia.

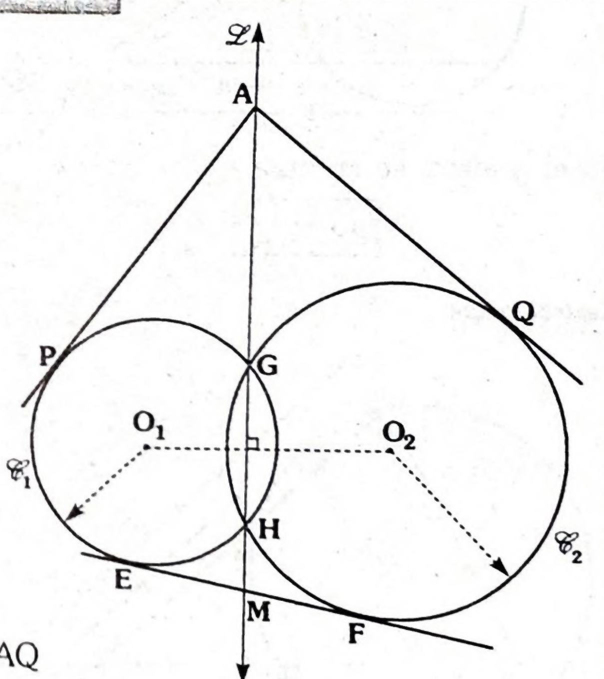
Se cumple:

$$\mathbf{AP = AQ}$$

$$\mathbf{EM = MF}$$

Además:

$$\overline{O_1O_2} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$$



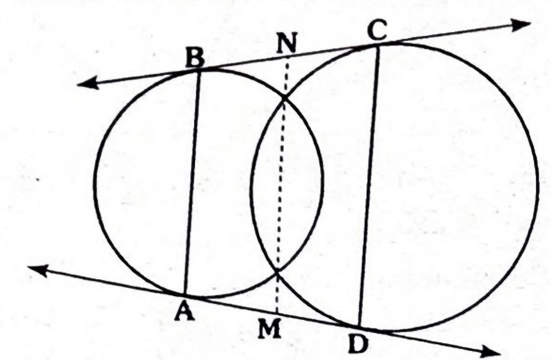
Prueba:

- *Por teorema de la tangente en A:*
  - *Para* $\mathscr{C}_1 : (AP)^2 = (AG)(AH)$
  - *Para* $\mathscr{C}_2 : (AQ)^2 = (AG)(AH)$

  $\Rightarrow$ AP = AQ
- *Análogamente en M, se tendrá:*

$$(EM)^2 = (MH)(MG) \text{ y } (MF)^2 = (MH)(MG) \Rightarrow EM = MF$$

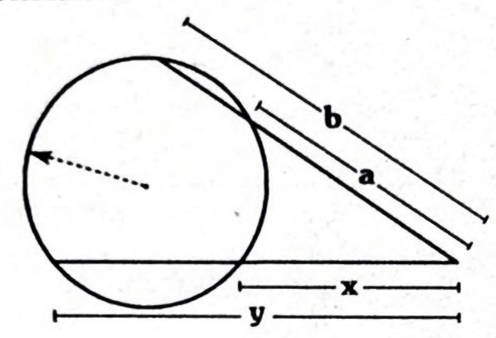
- *Como consecuencia del segundo resultado tenemos:*



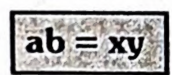
Si, A, B, C y D son puntos de tangencia entonces ABCD es trapecio isósceles y $\overline{MN}$ en su base media.

TEOREMA DE LA SECANTE

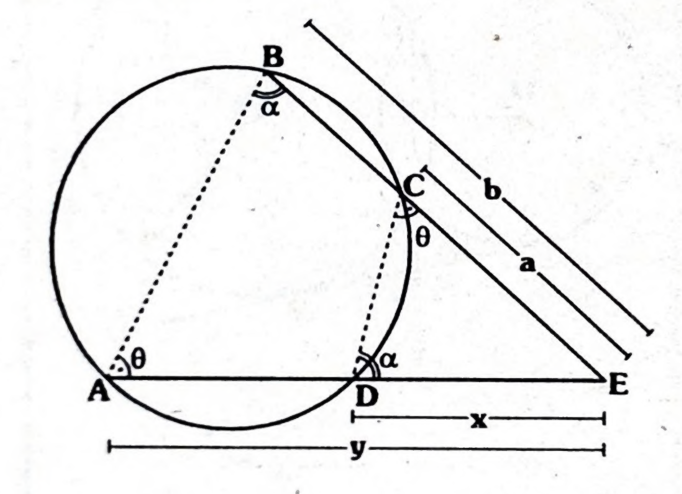
Si desde un punto exterior a una circunferencia trazamos dos o más secantes, se tendrá que el producto de longitudes de la parte externa y del segmento secante, es constante.



En el gráfico, se cumple:



Demostración



- ⌂ABCD inscrito:

$$m\measuredangle BAD = m\measuredangle DCE \quad y$$

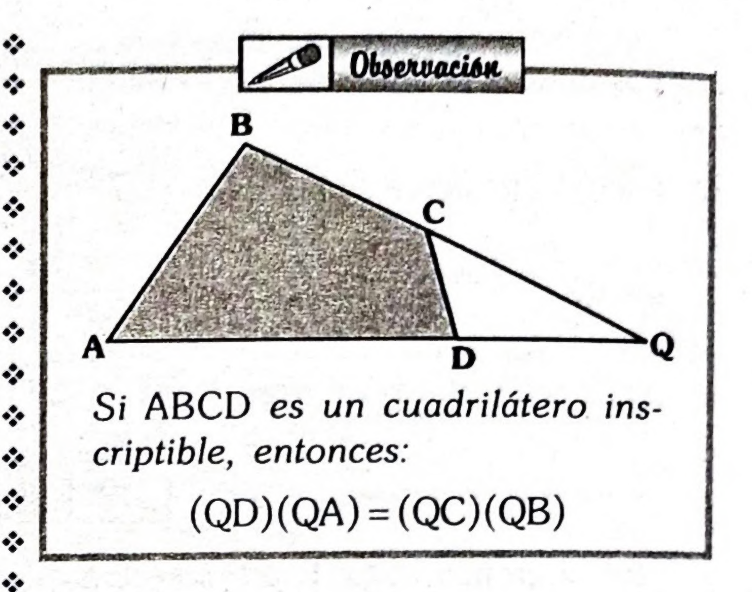
$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle CDE$$

- $\Delta ABE \sim \Delta CDE$

$$\frac{a}{y} = \frac{x}{b}$$

$$\therefore \ ab = xy$$

Observación

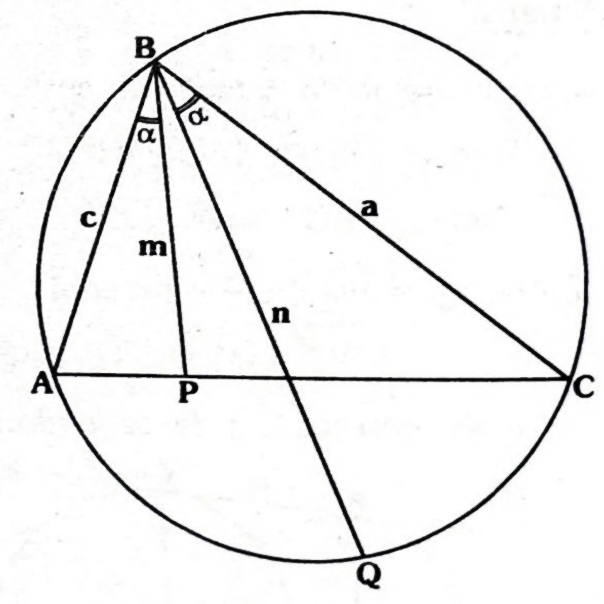


Si ABCD es un cuadrilátero inscriptible, entonces:

$$(QD)(QA) = (QC)(QB)$$

TEOREMA DE LAS ISOGONALES

Sea un triángulo inscrito en una circunferencia, se cumple que el producto de longitudes de dos lados es igual al producto de longitudes de dos segmentos isogonales (*trazados desde el vértice en común*) del ángulo determinado por dichos lados, una de tales isogonales es cuerda y la otra es ceviana interior.

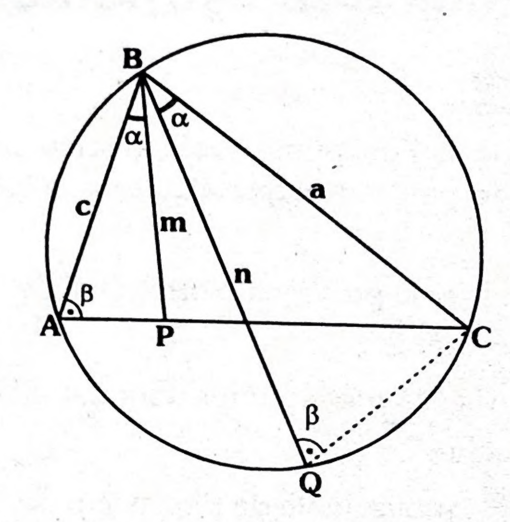


En el gráfico, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son isogonales del $\measuredangle ABC$.

Se cumple:

ac = mn

Demostración



- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BQC$$

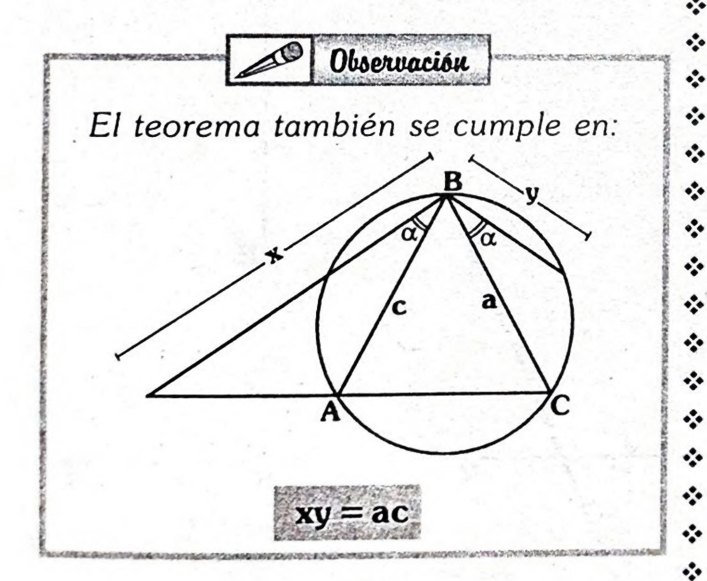
$$\Rightarrow \ \triangle ABP \sim \triangle QBC$$

$$\frac{m}{c} = \frac{a}{n}$$

$$\therefore \ mn = ac$$

Observación

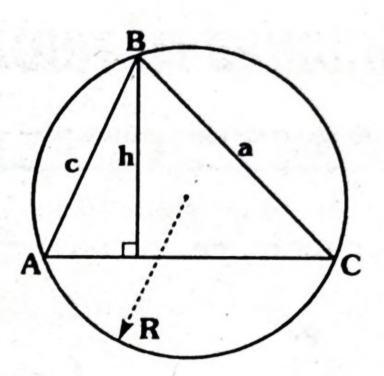
El teorema también se cumple en:



$$xy = ac$$

TEOREMA DEL PRODUCTO DE DOS LADOS

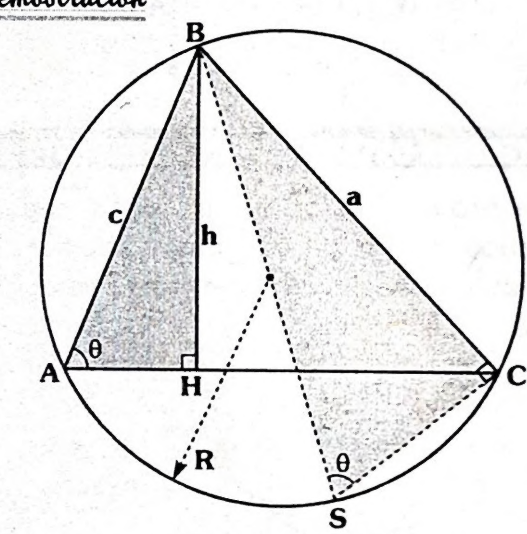
En todo triángulo se cumple que el producto de las longitudes de dos lados es igual al producto de la longitud de la altura relativa al tercer lado con el doble del circunradio.



En el gráfico, se cumple:

$$ac = h(2R)$$

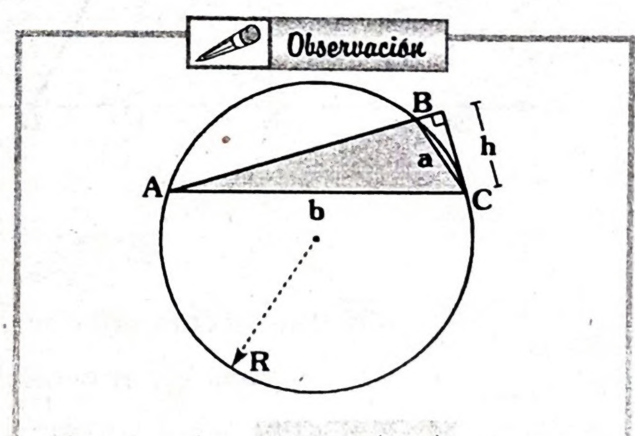
Demostración



- $\triangle AHB \sim \triangle SCB \ \Rightarrow \ \dfrac{h}{c} = \dfrac{a}{2R}$

$$\therefore \ ac = h(2R)$$

Observación

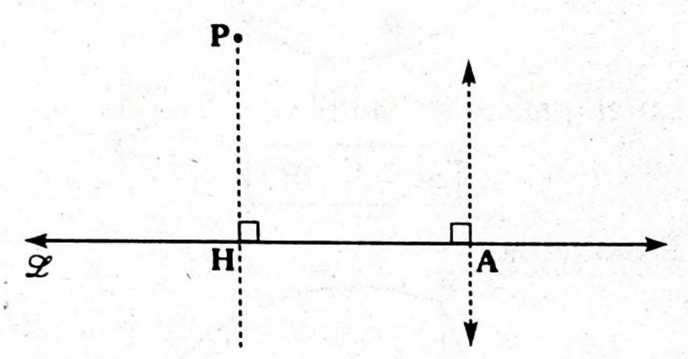


Se cumple: $ab = h(2R)$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

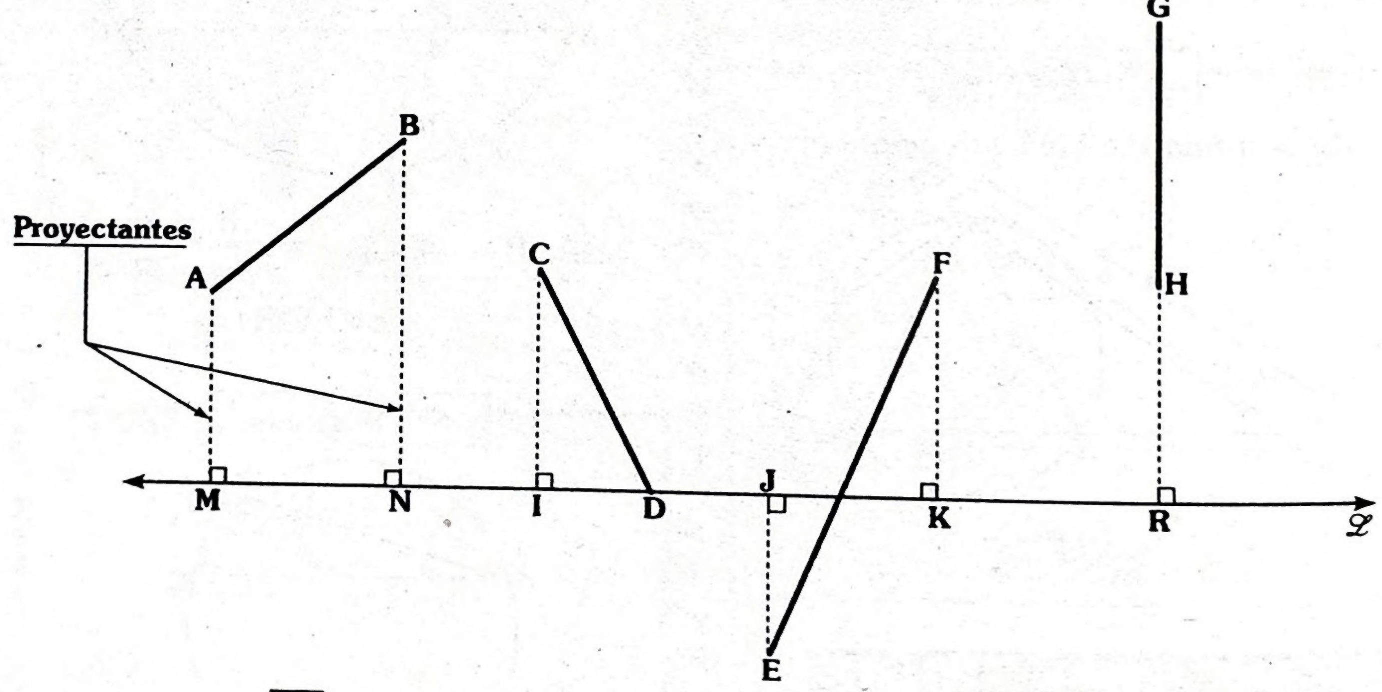
Dados un punto y una recta, la proyección ortogonal del punto sobre la recta dada es la intersección de una recta que pasa por dicho punto y perpendicular a la recta dada.



- "H" es la proyección ortogonal de "P" sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- "A" es la proyección ortogonal de "A" sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- $\overline{PH}$: proyectante de P respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

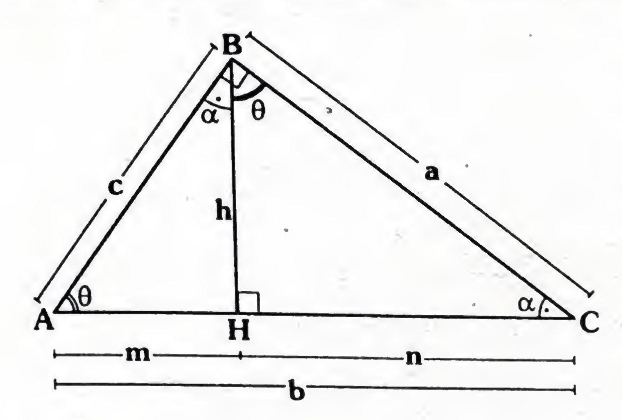
PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es otro segmento cuyos extremos son las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento inicial. En el caso que el segmento sea perpendicular a la recta, la proyección ortogonal será un punto.



- $\overline{MN}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- $\overline{ID}$: Proyección ortogonal de $\overline{CD}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- $\overline{JK}$: Proyección ortogonal de $\overline{EF}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- R : Proyección ortogonal de $\overline{GH}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Ahora como ya conocemos las proyecciones ortogonales, relacionemos ellas y los demás elementos del triángulo rectángulo:

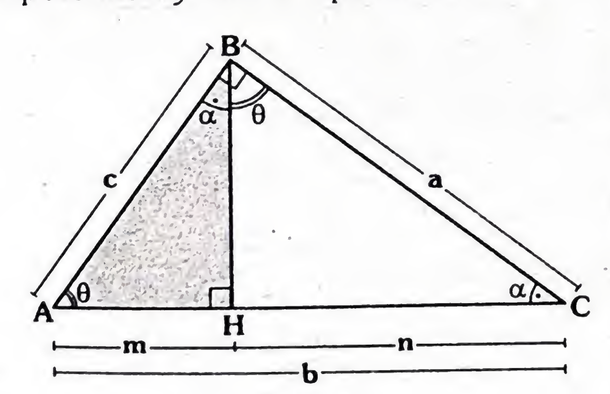


Del gráfico:

- $\overline{AH}$ es la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.
- $\overline{HC}$ es la proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

TEOREMA

En todo triángulo rectángulo, se cumple que el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de longitudes de su proyección ortogonal sobre la hipotenusa y dicha hipotenusa.



En el gráfico, se cumple:

$$a^2 = nb \quad y \quad c^2 = mb$$

Demostración:

- Del gráfico, se tiene:

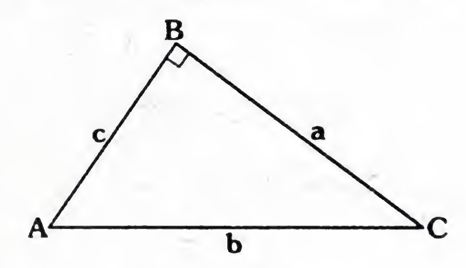
$$\triangle AHB \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore\ c^2 = bm$$

- Análogamente: $a^2 = nb$

TEOREMA DE PITÁGORAS(*)

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.



En el gráfico, se cumple:

$$a^2 + c^2 = b^2$$

Demostración:

- Usemos el gráfico anterior.
- Por teorema:

$$a^2 = nb$$

$$c^2 = mb$$

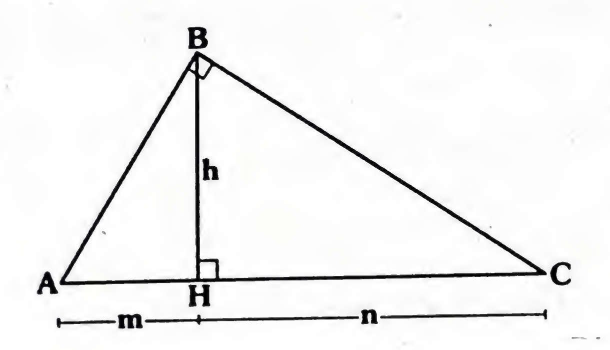
$$\Rightarrow a^2 + c^2 = b\underbrace{(m+n)}_{b}$$

$$\therefore\ a^2 + c^2 = b^2$$

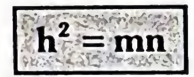
TEOREMA

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de longitudes de las proyecciones.

(*) En la publicación de áreas se dará otras formas de demostración.



En el gráfico, se cumple:



Demostración:

- Del gráfico:

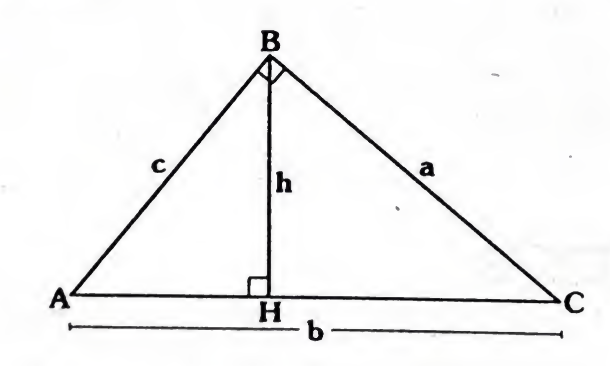
$$\triangle AHB \sim \triangle BHC$$

$$\Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$\therefore h^2 = mn$$

TEOREMA

En todo triángulo rectángulo, se cumple que el producto de longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a ella.



Del gráfico, se cumple:

$$ac = bh$$

Demostración:

- Del gráfico:

$$\triangle AHB \sim \triangle ABC$$

$$\frac{h}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow bh = ac$$

Otra forma:

- Del primer resultado :

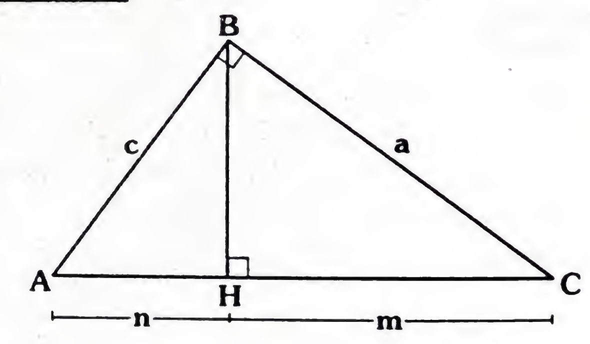
$$a^2 = nb$$

$$c^2 = mb$$

$$\Rightarrow a^2c^2 = \underbrace{mn}_{h^2}b^2$$

$$\therefore ac = hb$$

TEOREMA



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{m}{n}$$

Demostración:

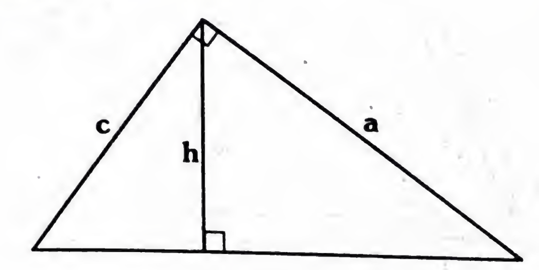
- Del primer resultado, en $\triangle ABC$:

$$a^2 = m(AC)$$

$$b^2 = n(AC)$$

$$\therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}$$

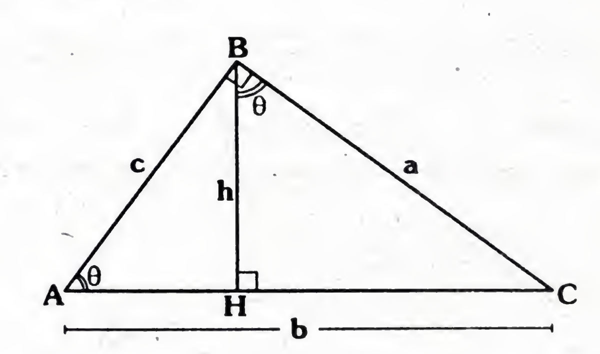
TEOREMA



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

Demostración:



- Usemos:

$* \quad a^2+c^2=b^2 \quad \ldots \text{(I)}$

$* \quad ac=hb \Rightarrow a^2c^2=h^2b^2 \quad \ldots \text{(II)}$

- Dividiendo (I) y (II):

$$\frac{a^2+c^2}{a^2c^2}=\frac{b^2}{h^2b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}$$

Otra forma:

- Usemos la siguiente identidad:

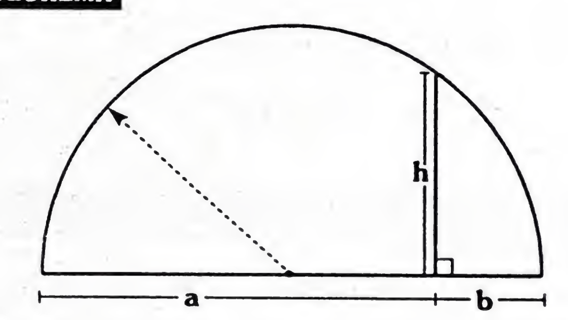
$$\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

- $\triangle$AHB: $\text{sen}\theta=\frac{h}{c} \quad \ldots \text{(I)}$
- $\triangle$BHC: $\cos\theta=\frac{h}{a} \quad \ldots \text{(II)}$

Elevando al cuadrado (I) y (II) y sumando miembro a miembro:

$$\Rightarrow \frac{h^2}{c^2}+\frac{h^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{h^2}$$

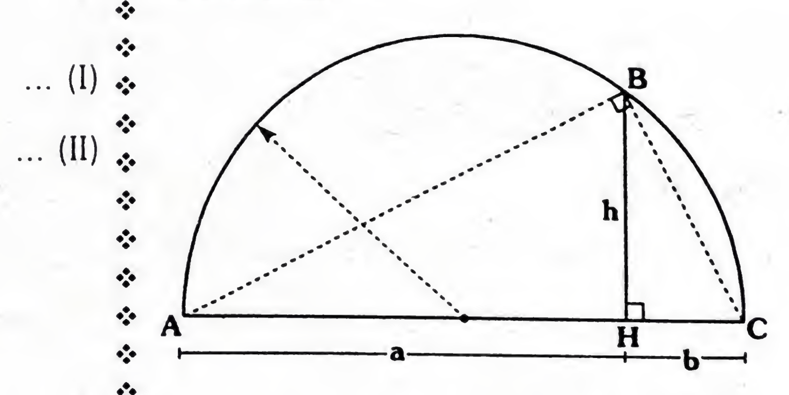
TEOREMA



En el gráfico, se cumple:

$$h^2=ab$$

Demostración:



- Sabemos, por teorema de circunferencia:

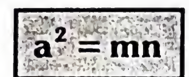
$$m\measuredangle ABC=90^\circ$$

- En $\triangle$ABC, por teorema:

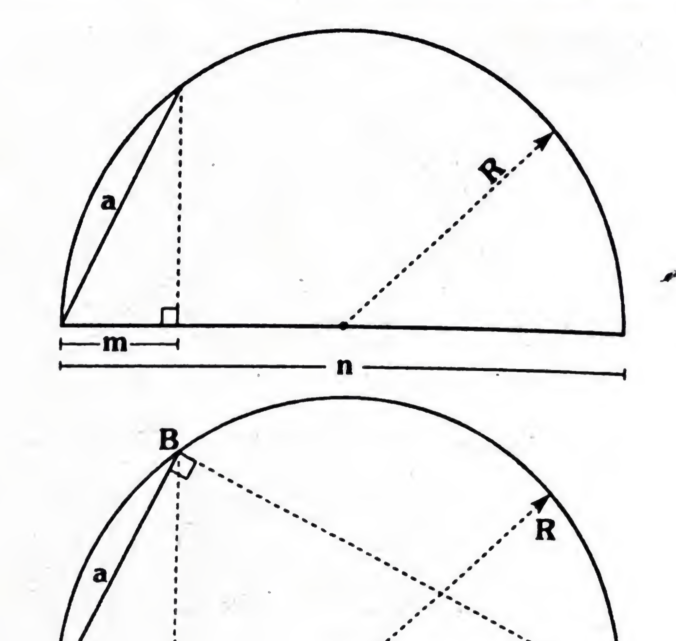
$$\therefore \quad h^2=ab$$

TEOREMA

En el gráfico, se cumple:



$$a^2 = mn$$



Demostración:

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle ABC = 90°$$

- En ⊿ABC, por teorema:

$$a^2 = mn$$

Nota

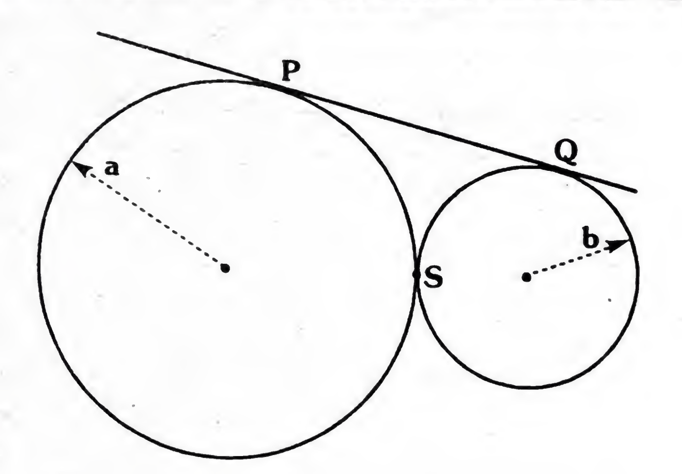
El teorema también se puede expresar así: $a^2 = m(2R)$

TEOREMA

En el gráfico P, Q y S son puntos de tangencia.

Se cumple:

$$PQ = 2\sqrt{ab}$$

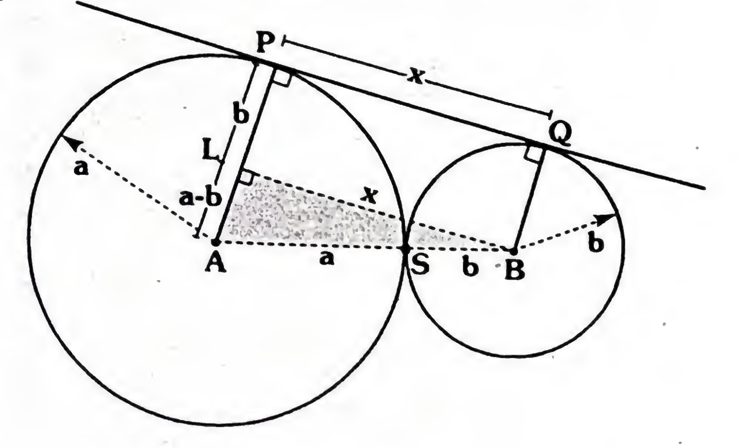


Demostración:

- Sin pérdida de generalidad, sea $a \geq b$.
- Por teorema, A, S y B son colineales.
- Se traza $\overline{BL} \perp \overline{AP}$ (L en $\overline{AP}$)
- En ⊿ALB: $x^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$

$$\Rightarrow x^2 = \underbrace{(a+b)^2 - (a-b)^2}_{4ab}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{ab}$$



TEOREMA

En el gráfico P, Q, T, A, B y C son puntos de tangencia.

Se cumple:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

Demostración:

- Por teorema anterior:

  $AP=2\sqrt{ax}$; $AQ=2\sqrt{bx}$ y $PQ=2\sqrt{ab}$

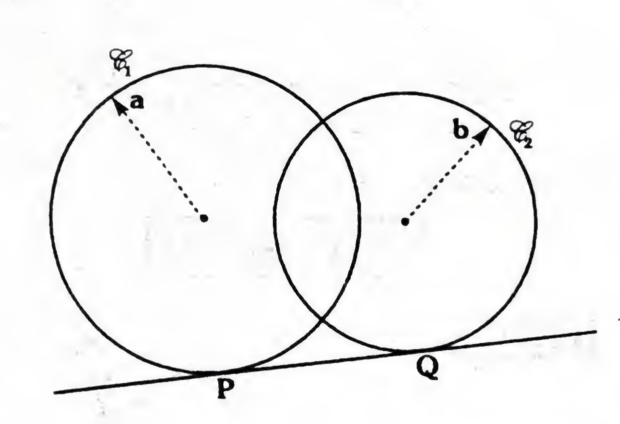
- Como: $PQ=AP+AQ \Rightarrow \not{2}\sqrt{ab}=\not{2}\sqrt{ax}+\not{2}\sqrt{bx} \Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias ortogonales P y Q son puntos de tangencia.

Se cumple:

$$PQ=\sqrt{2ab}$$



Demostración:

- Sea $a \geq b$
- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales, entonces:

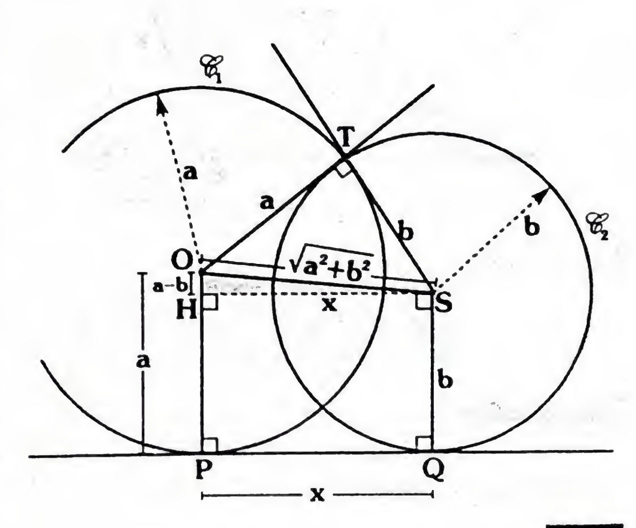
  $m\measuredangle OTS=90° \Rightarrow OS=\sqrt{a^2+b^2}$

- En el trapecio OPQS, se traza:

  $\overline{SH} \perp \overline{OP} \Rightarrow OH=a-b$

- En $\triangle OHS$: $x^2+(a-b)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$

  $\therefore\ x=\sqrt{2ab}$



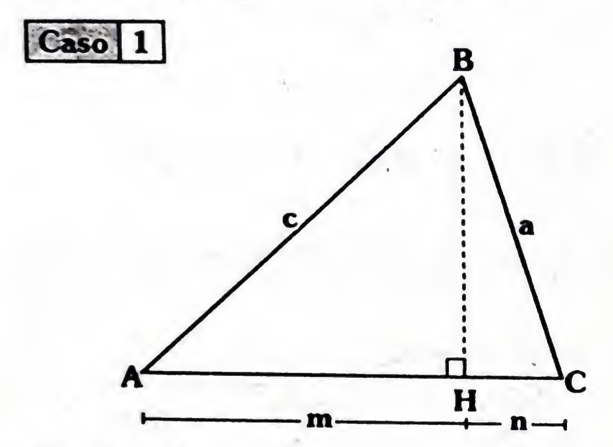
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES

En todo triángulo se cumple que la diferencia de cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la diferencia de cuadrados de las longitudes de sus respectivas proyecciones ortogonales sobre el tercer lado.

Veamos los siguientes casos:

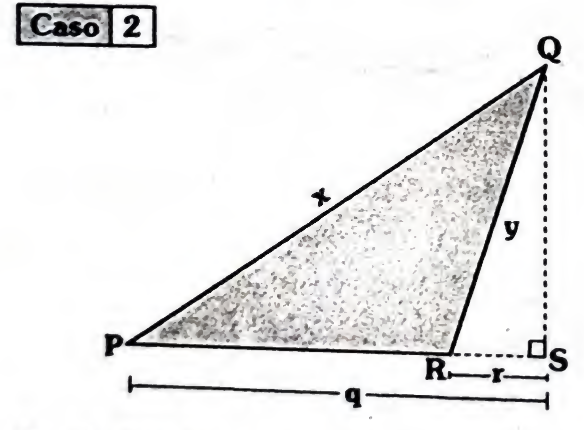
Caso 1



En el gráfico, se cumple:

$$c^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

Caso 2



En el gráfico, se cumple:

$$x^2 - y^2 = q^2 - r^2$$

Demostración:

- Veamos el primer caso:

  – Por teorema de Pitágoras en:

  $\triangle AHB$: $c^2 = (BH)^2 + m^2$ ... (I)

  $\triangle BHC$: $a^2 = (BH)^2 + n^2$ ... (II)

  – Restando (I) y (II):

  $$c^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

- En el segundo caso:

  – Teorema de Pitágoras en:

  $\triangle PSQ$: $x^2 = (QS)^2 + q^2$ ... (III)

  $\triangle RSQ$: $y^2 = (QS)^2 + r^2$ ... (IV)

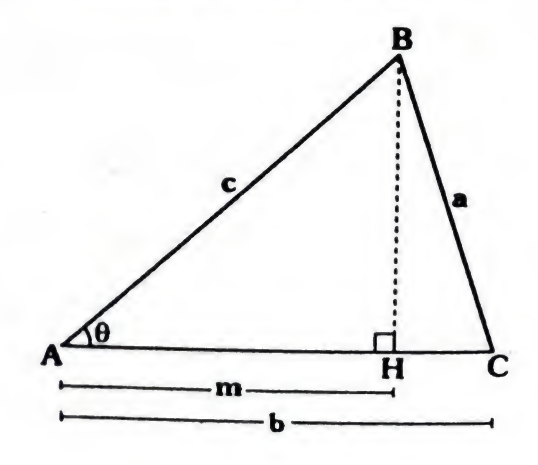
  – Restando (III) y (IV):

  $$x^2 - y^2 = q^2 - r^2$$

TEOREMA DE EUCLIDES

Caso 1

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado opuesto a un ángulo interior agudo, es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble del producto de las longitudes de uno de ellos con la proyección ortogonal del otro sobre él.



En el gráfico, sea $\theta < 90°$

Se cumple:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$$

Demostración:

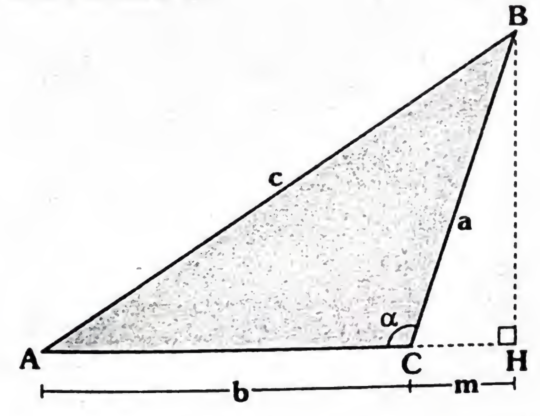
- En el gráfico, $HC = b - m$
- Por teorema de las proyecciones:

$$a^2 - c^2 = (b-m)^2 - m^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2 - 2bm$$

Caso 2

En un triángulo obtusángulo, se cumple que el cuadrado de la longitud del lado mayor es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos más el doble producto de longitudes de uno de dichos lados con la proyección ortogonal del otro sobre él.



En el gráfico $\alpha > 90°$, se cumple:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 + 2bm}$$

Demostración:

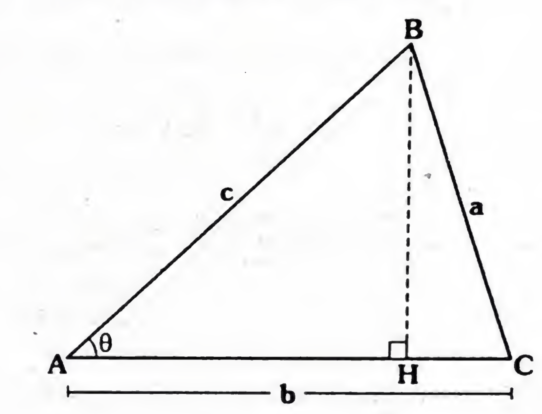
- Por teorema de las proyecciones (segundo caso).

$$c^2 - a^2 = (b+m)^2 - m^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2bm$$

TEOREMA DE COSENOS

En todo triángulo, se cumple que el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble producto de longitudes de dichos lados con el coseno de la medida del ángulo entre ellos.



En el gráfico, $\theta < 90°$, se cumple:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb(\cos\theta)}$$

Demostración:

- En el gráfico, por teorema de Euclides:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b(AH) \qquad \ldots (I)$$

- En el ⊿AHB: $AH = (c)\cos\theta$
- En (I): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$

También:

- En el gráfico, $\alpha > 90°$, se cumple:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

Demostración:

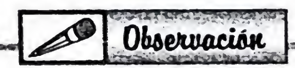
- Por teorema de Euclides (segundo caso)

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2b(CH)$$

- En el ⊿CHB: $CH = a\cos\beta$
- Como $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\beta$

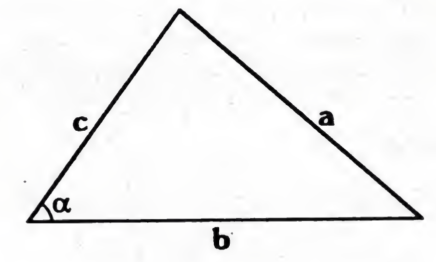
$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cdot a(-\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos\alpha)$$



Observación

*Como conclusión de los teoremas anteriores, podemos analizar también la **naturaleza del triángulo**.*



Se cumple:

$$\alpha < 90° \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

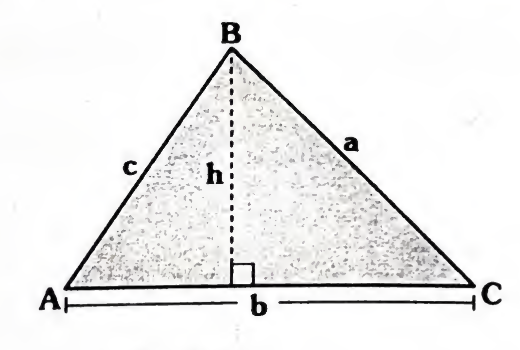
$$\alpha = 90° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\alpha > 90° \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA ALTURA

(Teorema de Herón)

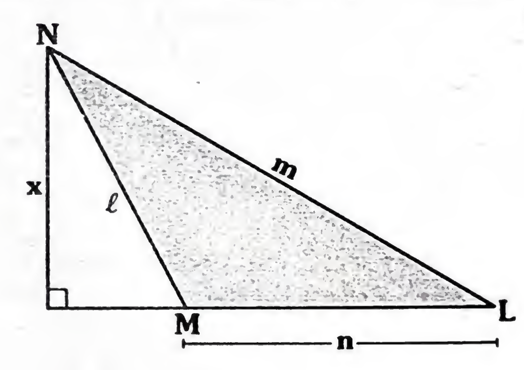
En todo triángulo se cumple que la longitud de la altura relativa a un lado, es igual al producto del doble de la inversa de la longitud de dicho lado, con la raíz cuadrada de los productos entre el semiperímetro del triángulo con la diferencia de dicho semiperímetro con la longitud de cada lado.



- Sea $p = \dfrac{a+b+c}{2}$
- Se cumple:

$$\mathbf{h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

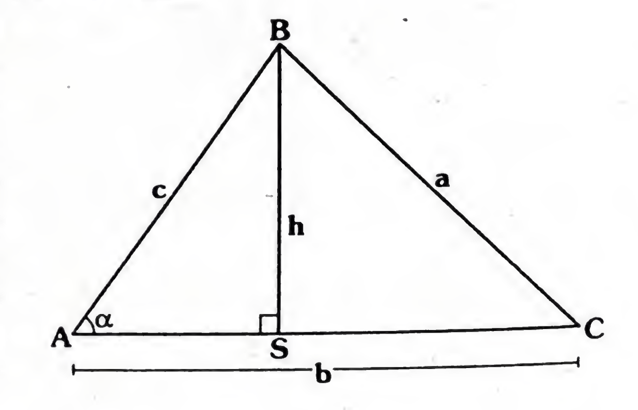
También, si el triángulo es obtusángulo.



- Sea $p = \dfrac{m+n+\ell}{2}$
- Se cumple:

$$\mathbf{x = \frac{2}{n}\sqrt{p(p-m)(p-n)(p-\ell)}}$$

Demostración:



- Para cualquiera de los dos casos es similar:

$\measuredangle ASB: \; h = c(\text{sen}\alpha) \Rightarrow 2hb = 2bc\,\text{sen}\alpha \Rightarrow 4b^2c^2\text{sen}^2\alpha = 4h^2b^2$ ... (I)

- Por teorema de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos\alpha)$

$2bc(\cos\alpha) = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow 4b^2c^2\cos^2\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)^2$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

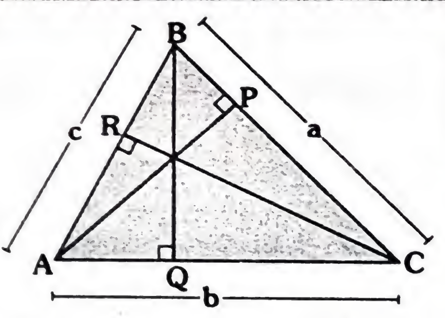
$$4b^2c^2\underbrace{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1} = 4h^2b^2 + (b^2+c^2-a^2)^2 \Rightarrow 4h^2b^2 = (2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

$$4h^2b^2 = [2bc + (b^2+c^2-a^2)][2bc - (b^2+c^2-a^2)] \Rightarrow 4h^2b^2 = [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]$$

- Acomodando: $4h^2b^2 = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$

$$\Rightarrow \; 4h^2b^2 = 2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)$$

$$\therefore \; h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



- *Sea* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$AP = h_a$; $CR = h_c$ y $BQ = h_b$

- *Se cumple*: $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

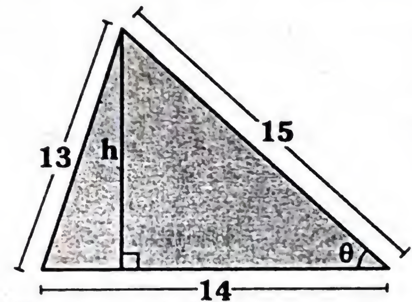
$h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y $h_c = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- *De lo anterior o con ayuda de la semejanza, se deduce:* $\mathbf{ah_a = bh_b = ch_c}$

- *Se deduce, que las longitudes de un lado y la altura relativa a él son inversamente proporcionales. Entonces la "**mayor altura**" **es relativa al** "**menor lado**" y viceversa.*

- *Es importante conocer algunos resultados, debido a su presencia en muchos ejercicios, por ejemplo:*

$$p = \frac{13+14+15}{2} \Rightarrow p = 21$$



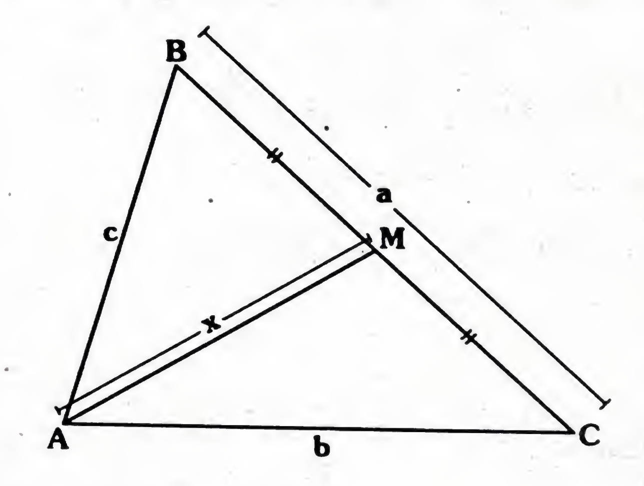
- *Por teorema de Herón*:

$$h = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-14)(21-15)(21-16)}$$

$$\Rightarrow \; h = 12 \wedge \theta = 53°$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA MEDIANA

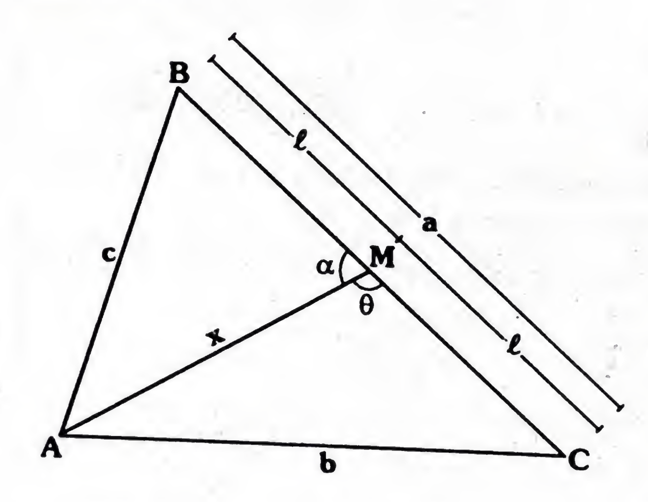
En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la suma del doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado con la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.



En el gráfico, $\overline{AM}$ es mediana, se cumple:

$$b^2+c^2=2x^2+\frac{a^2}{2}$$

Demostración:



- Del gráfico, como $\overline{AM}$ es mediana $\ell=\frac{a}{2}$; $\alpha+\theta=180°$ ⇒ $\cos\alpha=-\cos\theta$

- Por teorema de cosenos:

  * $b^2=x^2+\ell^2-2x\ell\cos\theta$ ... (I)

  * $c^2=x^2+\ell^2-2x\ell\cos\alpha$ ... (II)

- Sumando (I) y (II), debido a que: $\cos\alpha+\cos\theta=0$, se tendrá:

$$b^2+c^2=2x^2+2\ell^2$$

$$\Rightarrow\ b^2+c^2=2x^2+\frac{a^2}{2}$$

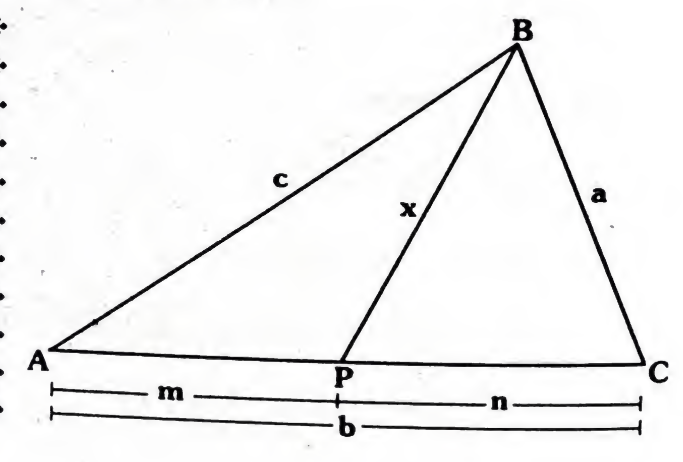
Observación

La mayor mediana es relativa al menor lado y viceversa.

TEOREMA DE STEWART

(Cálculo de una ceviana)

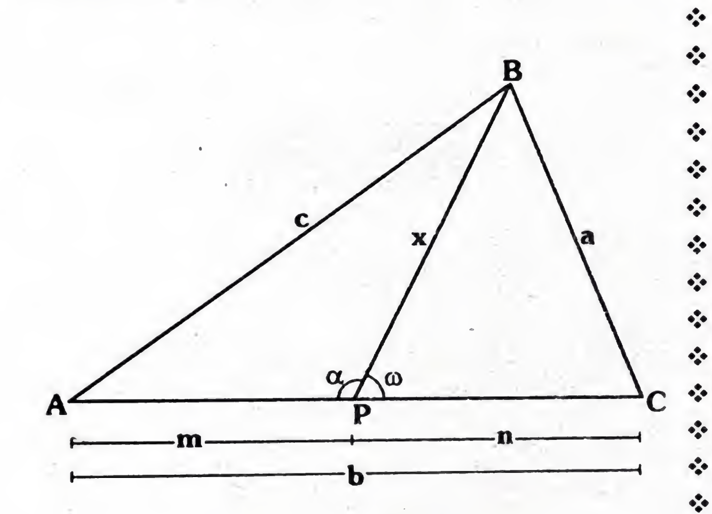
En todo triángulo se cumple, que la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos parciales opuestos determinados en el tercer lado por la ceviana, es igual al producto del cuadrado de la longitud de la ceviana con la longitud del lado al cual es relativa más el producto de longitudes de dicho lado con los dos segmentos parciales.



En el gráfico, se cumple:

$$a^2m+c^2n=x^2b+mnb$$

Demostración:



- En el gráfico:

$$\alpha+\omega=180°$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\cos\omega$$

$$\Rightarrow \cos\alpha+\cos\omega=0$$

- Por teorema de cosenos, en:

ΔAPB: $c^2=x^2+m^2-2xm\cos\alpha$ ... (I)

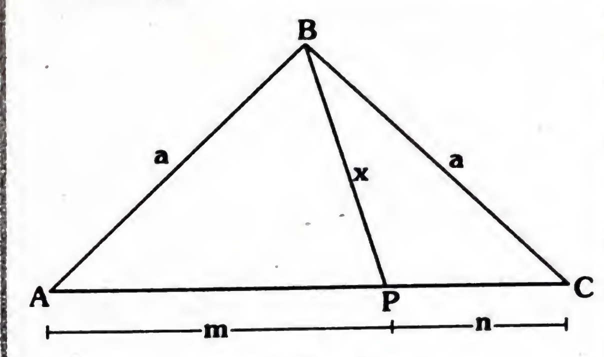
ΔPBC: $a^2=x^2+n^2-2xn\cos\omega$ ... (II)

- Sumemos la expresión (I) por "n" con la expresión (II) por "m":

$$ma^2+nc^2=(m+n)x^2+mn(m+n)$$

$$\therefore\ ma^2+nc^2=bx^2+mnb$$

Teorema de Stewart en el triángulo isósceles:



Se cumple: $a^2-x^2=mn$

Prueba:

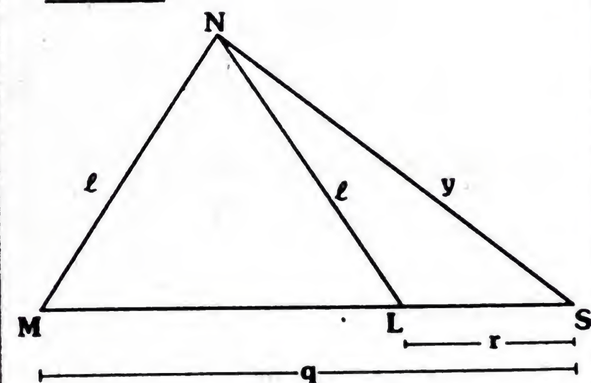
Por teorema de Stewart en ΔABC

$$a^2n+a^2m=x^2(m+n)+mn(m+n)$$

$$\Rightarrow a^2=x^2+mn$$

$$\therefore\ a^2-x^2=mn$$

También:



Se cumple: $y^2-\ell^2=qr$

Prueba:

Teorema de Stewart en ΔMNS:

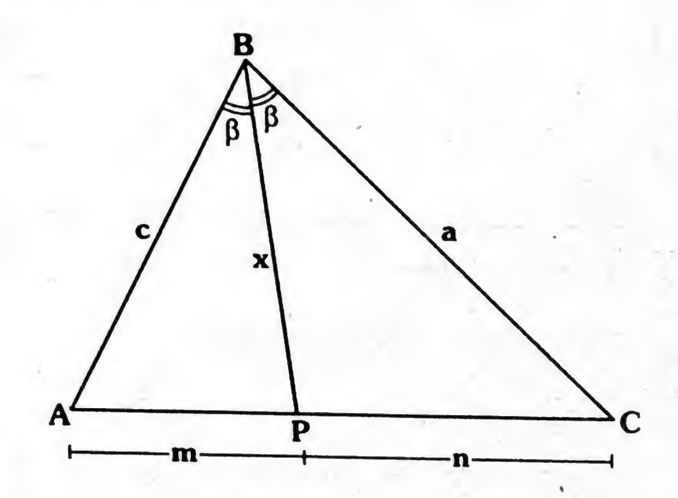
$$y^2(q-r)+\ell^2\cdot r=\ell^2q+qr(q-r)$$

$$\Rightarrow y^2=\ell^2+qr$$

$$\therefore\ y^2-\ell^2=qr$$

TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo, se cumple que el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz, con el de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo.



En el gráfico, $\overline{BP}$ es bisectriz interior se cumple :

$$x^2 = ac - mn$$

Demostración:

- Se traza la circunferencia circunscrita, notemos que $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son isogonales, por teorema:

$$ac = x(x+y)$$

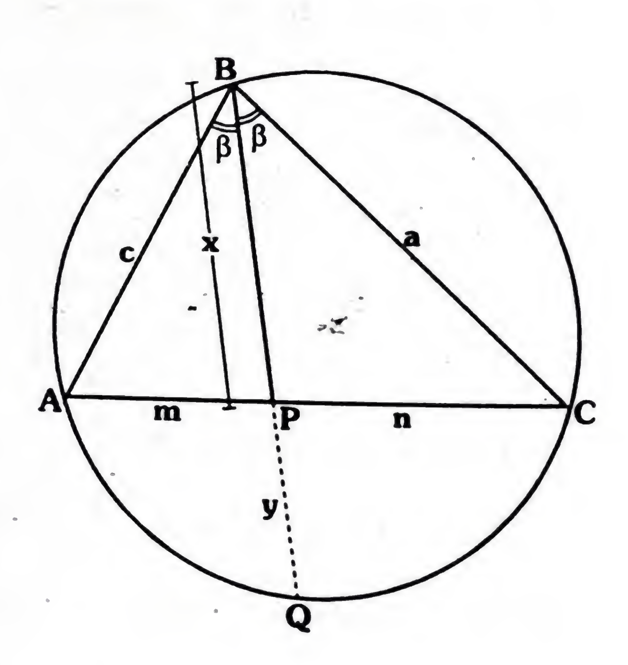
$$\Rightarrow \quad ac = x^2 + xy \quad \text{... (I)}$$

- Por teoremas de las cuerdas:

$$xy = mn \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

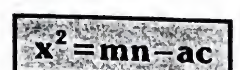
$$x^2 = ac - mn$$



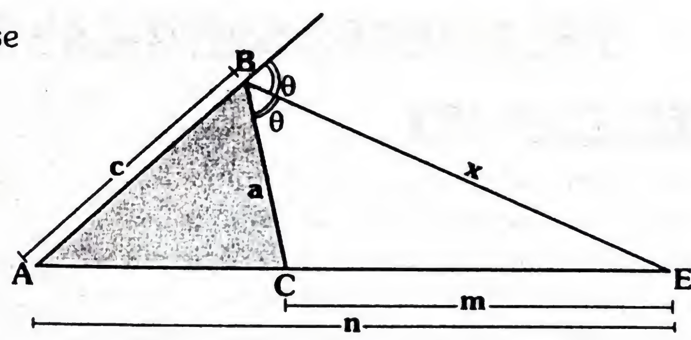
TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En un triángulo, al trazar la bisectriz exterior, se cumple que el cuadrado de la longitud de la bisectriz exterior es igual a la diferencia de productos de las longitudes de los segmentos determinados por la bisectriz en el tercer lado, con el de los lados adyacentes a dicha bisectriz.

En el gráfico, $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, se cumple:



$$x^2 = mn - ac$$



Demostración:

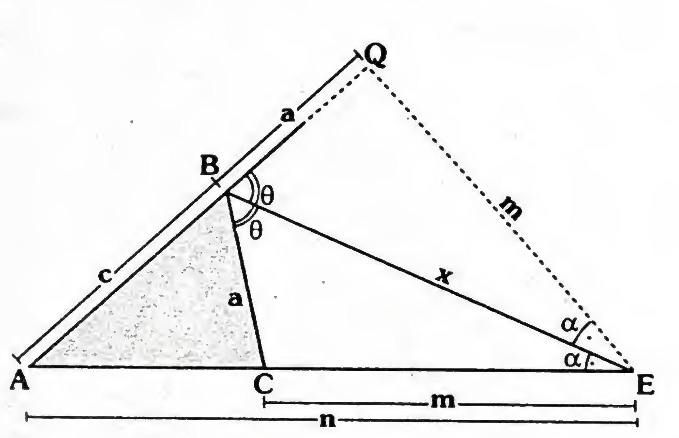
- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta Q, tal que CB=BQ=a, entonces:

$$\Delta CBE \cong \Delta QBE \text{(LAL)}$$

$$\Rightarrow QE = CE = m \quad y \quad m\measuredangle CEB = m\measuredangle BEQ$$

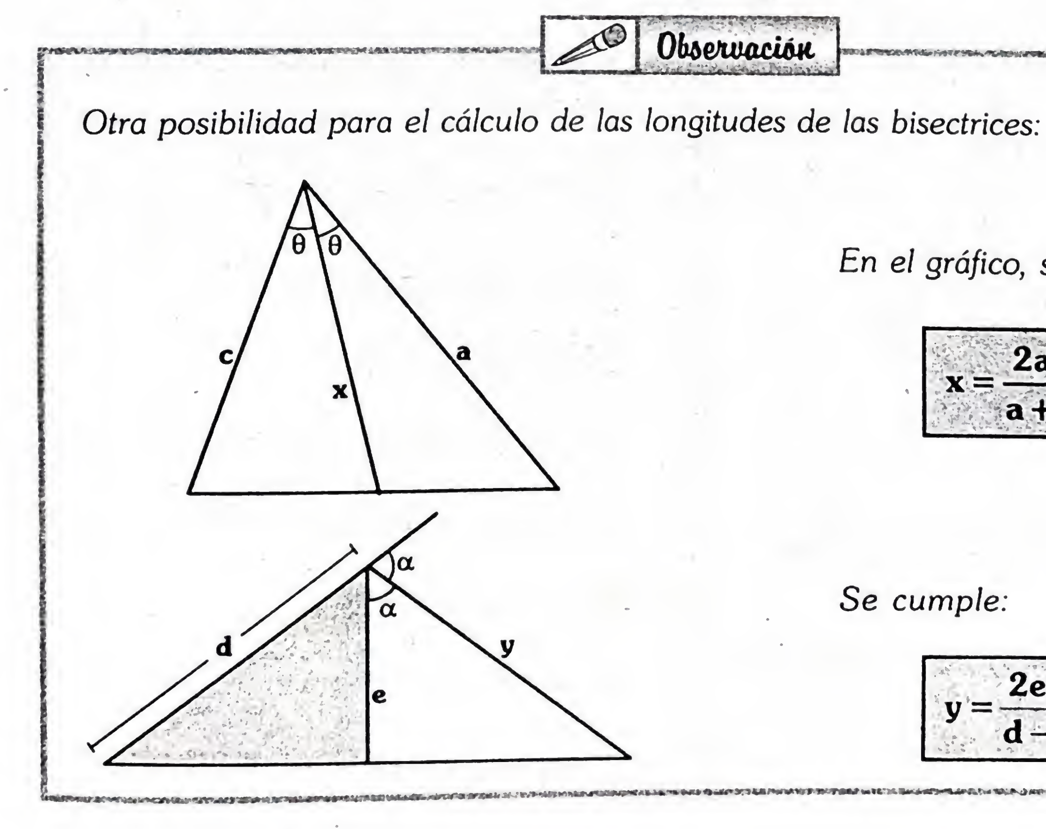
- En ΔAQE, como $\overline{EB}$ bisectriz interior,

$$x^2 = mn - ac$$



Observación

Otra posibilidad para el cálculo de las longitudes de las bisectrices:



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\theta$$

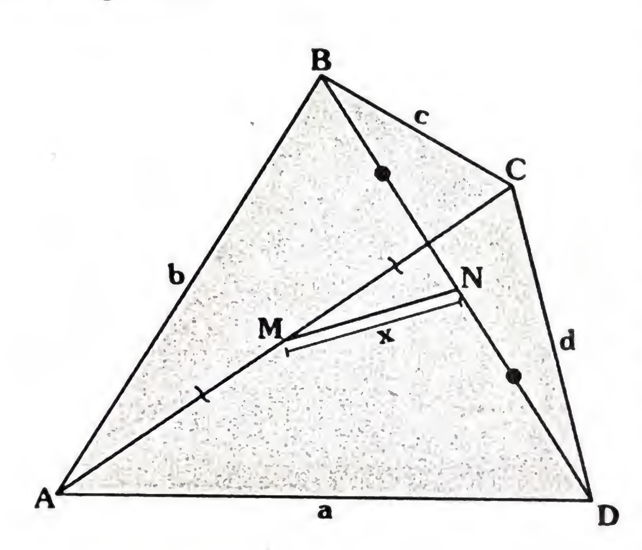
Se cumple:

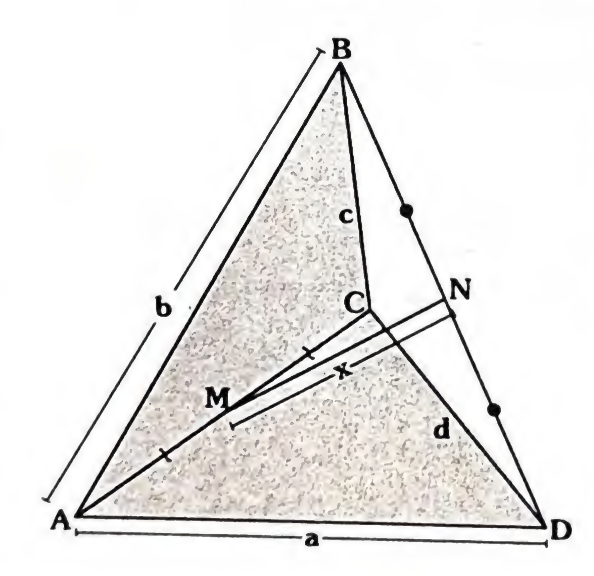
$$y = \frac{2ed}{d-e} \cdot \cos\alpha$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero se cumple que la suma de cuadrados de las longitudes de sus cuatro lados, es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la distancia de los puntos medios de las diagonales.





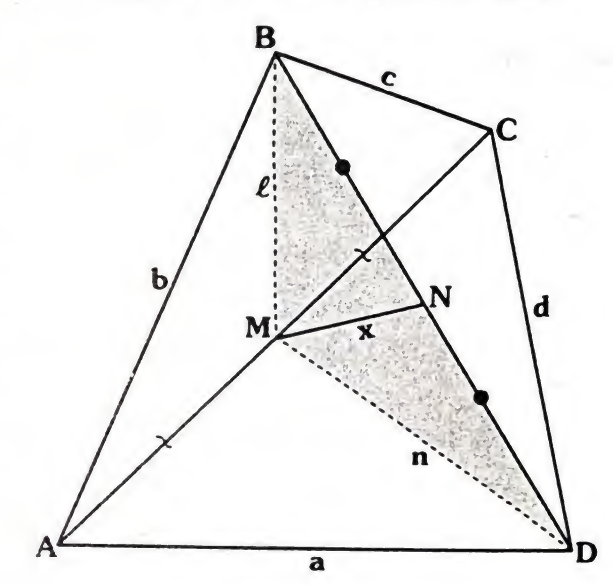
En los gráficos, se tiene los cuadriláteros convexo y no convexo, en ambos casos M y N son puntos medios de las diagonales.

Se cumple:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(AC)^2+(BD)^2+4x^2$$

Demostración:

En cualquiera de los dos casos, la prueba es análoga, veamos el primer caso.



- Usemos el teorema del cálculo de la mediana, en:

$\triangle ABC$: $b^2+c^2=2\ell^2+\dfrac{(AC)^2}{2}$ ... (I)

$\triangle ADC$: $a^2+d^2=2n^2+\dfrac{(AC)^2}{2}$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

$a^2+b^2+c^2+d^2=2(\ell^2+n^2)+(AC)^2$ ... (III)

- En $\triangle MBD$: $n^2+\ell^2=2x^2+\dfrac{(BD)^2}{2}$ ... (IV)

- Reemplazando (IV) en (III):

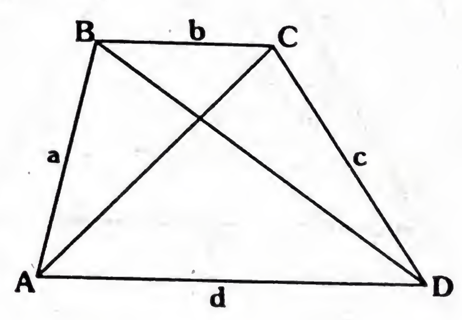
$$a^2+b^2+c^2+d^2=2\left[2x^2+\frac{(BD)^2}{2}\right]+(AC)^2$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2=(AC)^2+(BD)^2+4x^2$$

Observación

* *El teorema de Euler, también se cumple en los cuadriláteros alabeados.*

* *Teorema de Euler en el trapecio:*



- Si $\overline{AD} // \overline{BC}$, se cumple:

$$(AC)^2+(BD)^2=a^2+c^2+2bd$$

- Prueba

La distancia entre los puntos medios de las diagonales es:

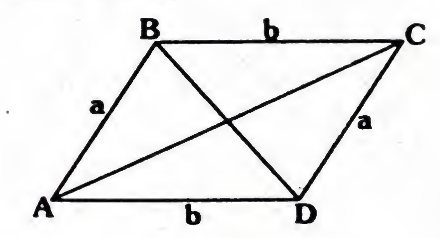
$$\frac{d-b}{2}$$

Por teorema de Euler:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(AC)^2+(BD)^2+4\left(\frac{d-b}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ a^2+c^2+2bd=(AC)^2+(BD)^2$$

* *Teorema de Euler en el paralelogramo:*

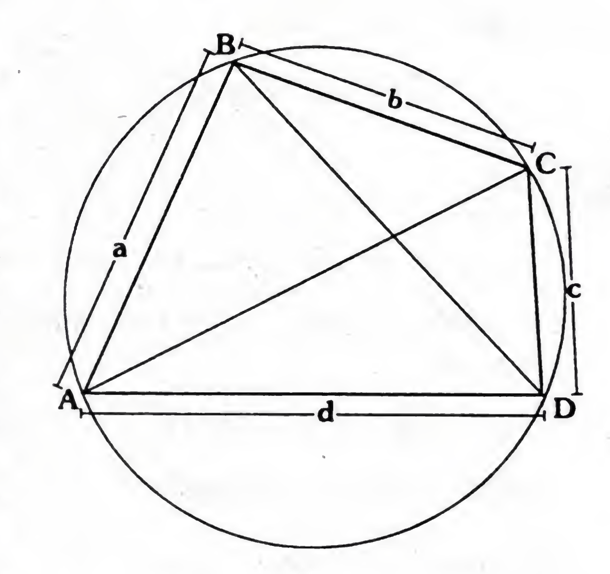


- *Si ABCD es paralelogramo se cumple:*

$$(AC)^2+(BD)^2=2(a^2+b^2)$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, se cumple que el producto de las longitudes de las diagonales, es igual a la suma de productos de las longitudes de los lados opuestos.

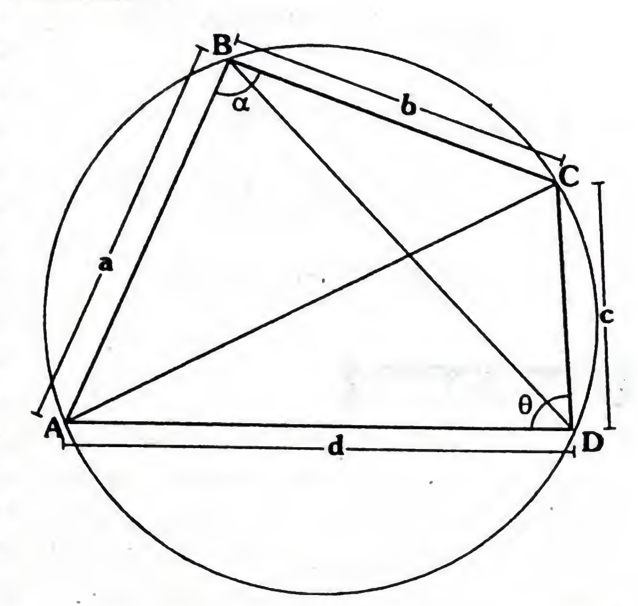


En el gráfico, se cumple:

$$(AC)(BD)=ac+bd$$

Demostración:

Método I



- Por teorema de cosenos, en el cuadrilátero (ver pág. 64–65), como:

$$\alpha+\theta=180^\circ \Rightarrow \cos(\alpha+\theta)=-1$$

$$(AC)^2(BD)^2=(ac)^2+(bd)^2-2abcd\underbrace{\cos(\alpha+\theta)}_{-1}$$

$$(AC)^2(BD)^2=(ac+bd)^2$$

$$\therefore\ (AC)(BD)=ac+bd$$

Método II

- Como $\alpha+\theta=180^\circ \Rightarrow \cos\alpha=-\cos\theta$
- En ΔABC y ΔADC, por teorema de cosenos:

$$(AC)^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha \qquad \dots (1)$$

$$(AC)^2=c^2+d^2-2cd\cos\theta \qquad \dots (2)$$

- Sumando así : $cd(1)+ab(2)$

$$(cd+ab)(AC)^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$$

$$\Rightarrow (AC)^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(cd+ab)} \qquad \dots (I)$$

- Análogamente:

$$\Rightarrow (BD)^2=\frac{(ac+bd)(cd+ab)}{(ad+bc)} \qquad \dots (II)$$

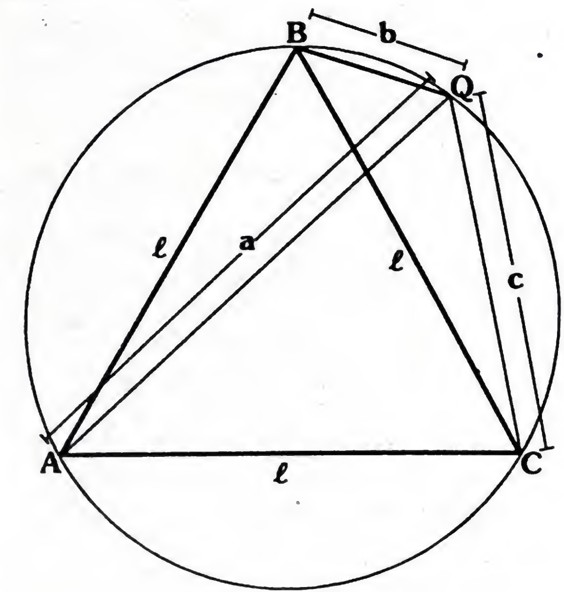
- Multiplicando (I) y (II):

$$(AC)^2(BD)^2=(ac+bd)^2$$

$$\therefore\ (AC)(BD)=ac+bd$$

TEOREMA DE CHADÚ

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, donde tres de sus vértices son los de un triángulo equilátero, se cumple que la suma de las distancias del cuarto vértice a dos vértices más cercanos es igual a la distancia de dicho vértice al vértice más lejano.



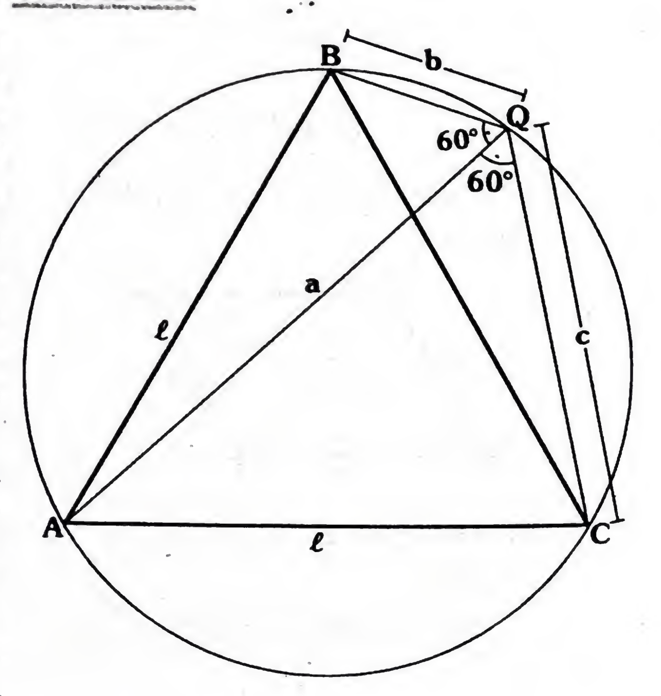
En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero se cumple:

$$\boxed{a=b+c}$$

Además:

$$\boxed{\ell^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

Demostración:



- Por teorema de Ptolomeo en el $\triangle$ABQC: $a\ell = b\ell + c\ell$

$$\Rightarrow \quad a=b+c \qquad \ldots (I)$$

- Para la segunda parte, en ΔBQC, usemos el teorema de cosenos:

$$\ell^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \ell^2 = b^2 + c^2 + bc \qquad \ldots (II)$$

- La expresión (I) al cuadrado:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \qquad \ldots (III)$$

- La expresión (II) por "2":

$$2\ell^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2bc$$

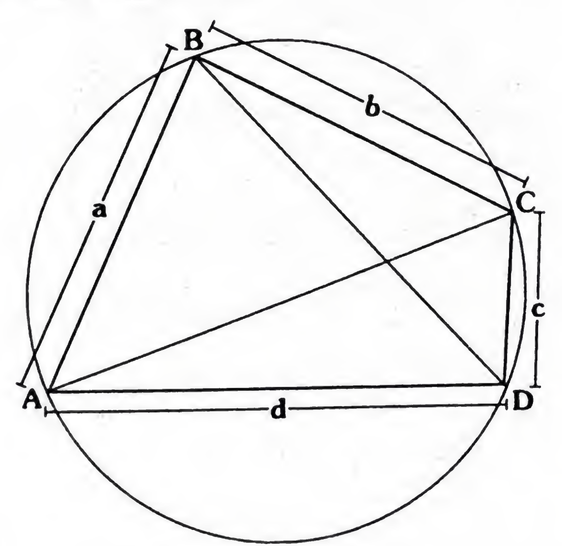
y como: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

$$\Rightarrow \quad 2\ell^2 - a^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore \quad \ell^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

TEOREMA DE VIETTE

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, se cumple que la razón de longitudes de las diagonales es igual a la razón entre la suma de productos de las longitudes de los lados que concurren en los extremos de cada diagonal.



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BD}} = \frac{\mathbf{ad + bc}}{\mathbf{ab + cd}}}$$

Demostración:

Método I

- Usemos el resultado obtenido en el segundo método del teorema de Ptolomeo. (Expresión I y II)

$$(AC)^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(cd + ab)}$$

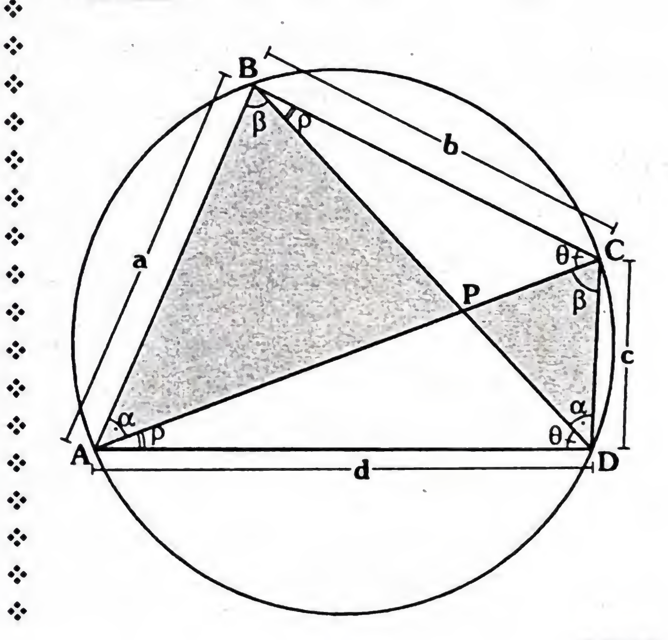
$$(BD)^2 = \frac{(ac + bd)(cd + ab)}{(ad + bc)}$$

- Dividiendo:

$$\frac{(AC)^2}{(BD)^2} = \frac{(ad + bc)^2}{(cd + ab)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{cd + ab}$$

Método II



- Aprovechemos el hecho que:

$$\Delta APB \sim \Delta DPC \quad y \quad \Delta APD \sim \Delta BPC$$

- Para los Δ_s APB y DPC, la razón de semejanza es $\frac{\text{“a”}}{c}$, entonces convenientemente :

$$AP = a(dk) \quad y \quad PD = c(dk) = d(ck)$$

- En ΔAPD y ΔBPC, la razón de semejanza es $\frac{d}{b}$, como $PD = d(ck)$ y $AP = d(ak)$, entonces $BP = b(ak)$ y $CP = b(ck)$.

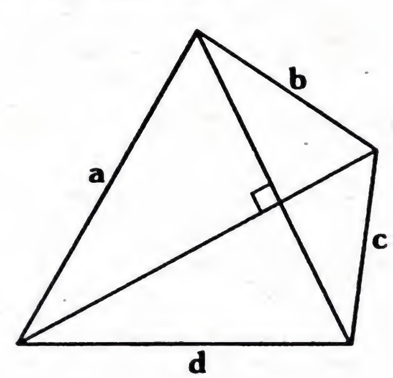
- Finalmente:

$$AC = AP + PC = k(ad + bc) \quad y$$

$$BD = BP + PD = k(ab + cd)$$

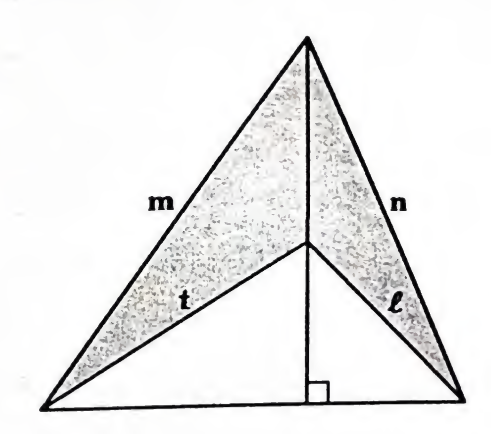
$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

En todo cuadrilátero de diagonales perpendiculares se cumple que la suma de cuadrados de las longitudes de los lados opuestos son iguales.



Se cumple:

$$\mathbf{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$$

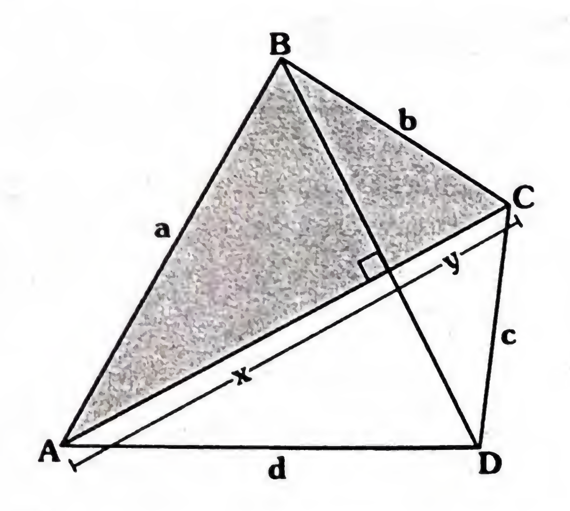


Se cumple:

$$\mathbf{m^2 + \ell^2 = t^2 + n^2}$$

Demostración:

- Para cualquiera de los dos casos la prueba es similar, veamos el primero:



- Por teorema de las proyecciones en:

$$\Delta ABC: \; a^2 - b^2 = x^2 - y^2$$

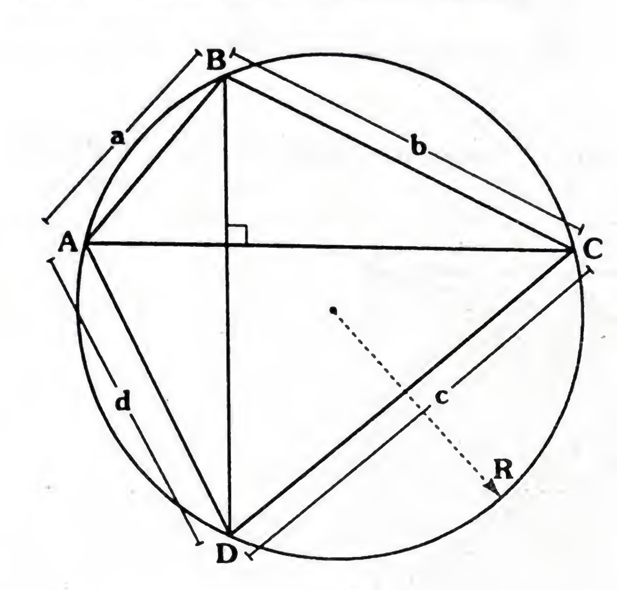
$$\Delta ADC: \; d^2 - c^2 = x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow \; a^2 - b^2 = d^2 - c^2$$

$$\therefore \; a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

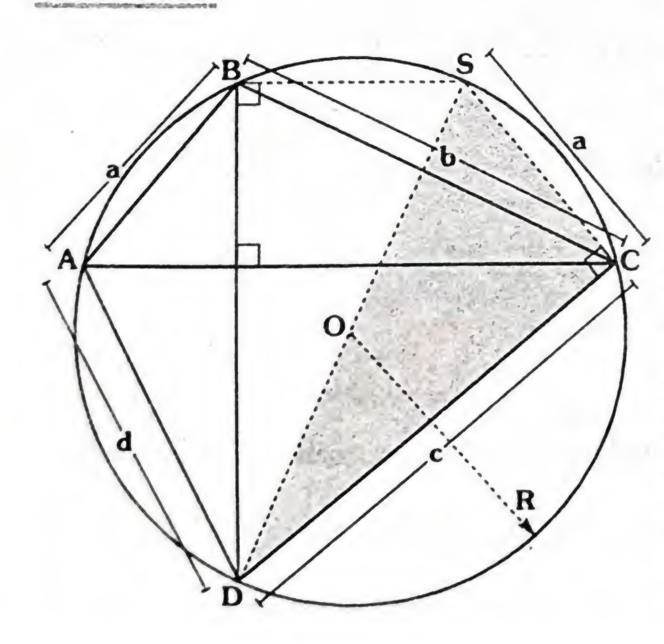
En un cuadrilátero inscrito o inscriptible de diagonales perpendiculares, se cumple que la suma de cuadrados de las longitudes de los lados opuestos son iguales e iguales a cuatro veces el cuadrado de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero.



En el gráfico, se cumple:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$$

Demostración:



- Se traza el diámetro $\overline{DS}$, entonces:

$$m\measuredangle DBS = m\measuredangle DCS = 90°$$

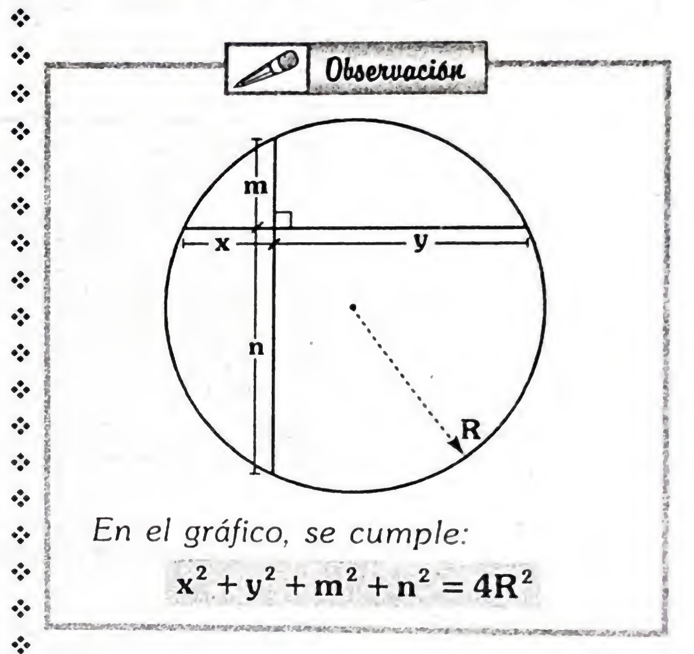
- ABSC es un trapecio isósceles CS=a
- En $\triangle$DCS:

$$a^2 + c^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

- Usando el teorema anterior concluímos:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2 = 4R^2$$

Observación

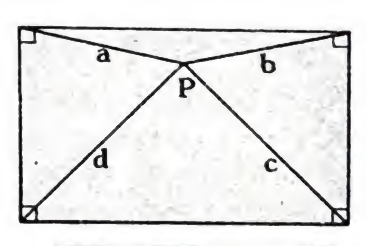


En el gráfico, se cumple:

$$x^2 + y^2 + m^2 + n^2 = 4R^2$$

TEOREMA DE MARLEN

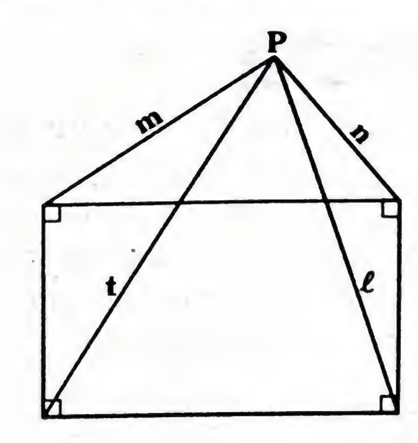
En todo rectángulo, se cumple que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera a los vértices opuestos son iguales.



Se cumple: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

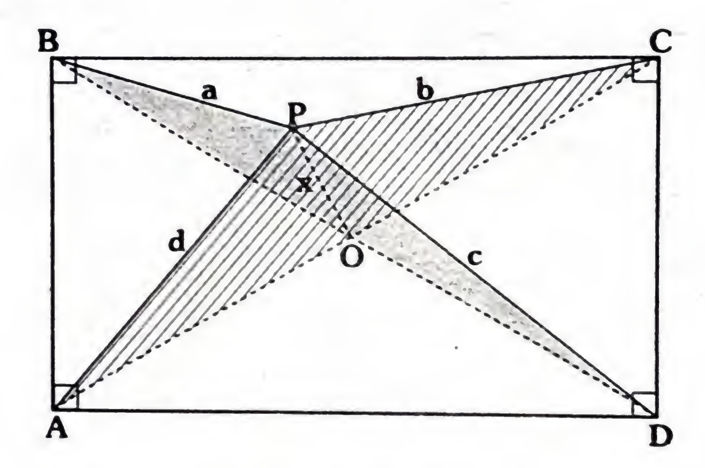
Se cumple:

$$m^2 + \ell^2 = t^2 + n^2$$



Demostración:

- Para cualquiera de los dos casos, se prueba en forma análoga, veamos el primer caso.



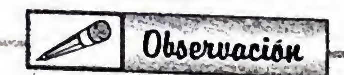
- Se trazan las diagonales, por teorema AC=BD y O es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
- Por teorema de la mediana:

$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{(BD)^2}{2} \quad \ldots \text{(I)}$$

$$b^2 + d^2 = 2x^2 + \frac{(AC)^2}{2} \quad \ldots \text{(II)}$$

- Como AC=BD, de (I) y (II):

$$\therefore\ a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$



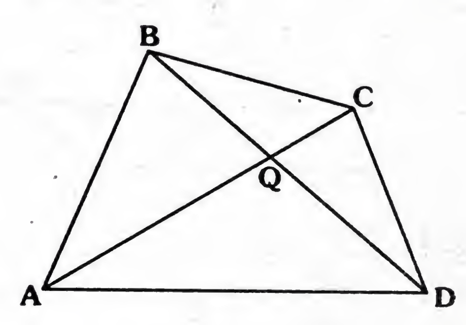
El teorema es válido aunque el punto se ubique fuera del plano determinado por el rectángulo.

TEOREMAS ADICIONALES

En este capítulo estudiaremos algunos teoremas complementarios a los teoremas ya mencionados, así como el análisis de algunos teoremas recíprocos.

TEOREMA

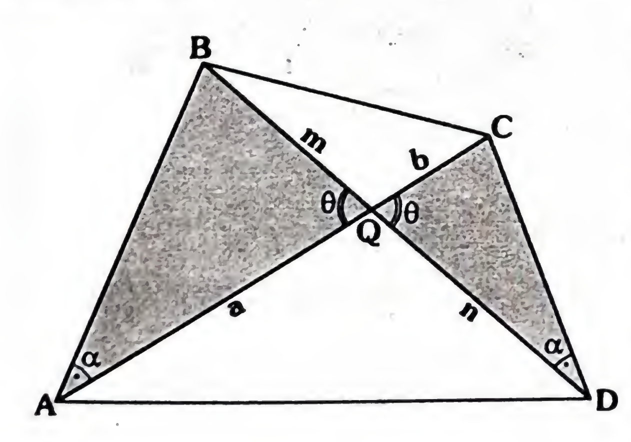
Si un cuadrilátero convexo, cumple el teorema de las cuerdas, respecto a las diagonales, entonces dicho cuadrilátero es inscriptible.



En el gráfico, se cumple:

Si : (AQ)(QC) = (BQ)(QD)
⇒ ABCD es inscriptible

Demostración:



- De la condición: $ab = mn \Rightarrow \dfrac{b}{n} = \dfrac{m}{a}$

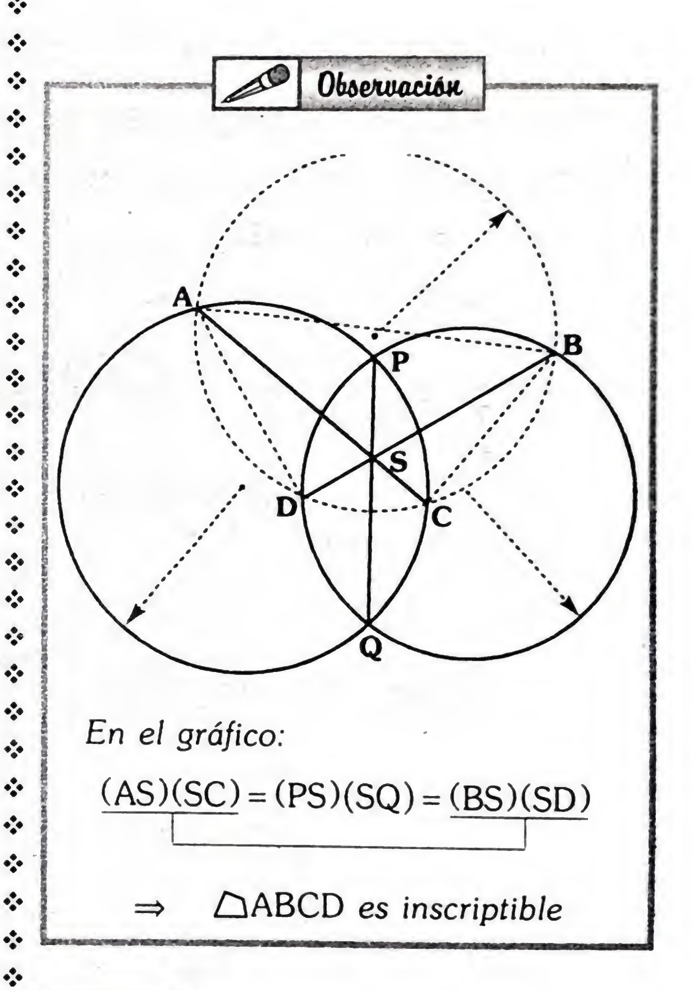
- Como $m\measuredangle AQB = m\measuredangle DQC$

  $\Rightarrow \Delta AQB \sim \Delta DQC$

- Luego: $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle QDC$

  ∴ ⏢ABCD es inscriptible

Observación



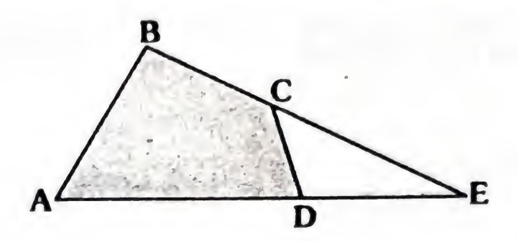
En el gráfico:

$(AS)(SC) = (PS)(SQ) = (BS)(SD)$

⇒ ⏢ABCD *es inscriptible*

TEOREMA

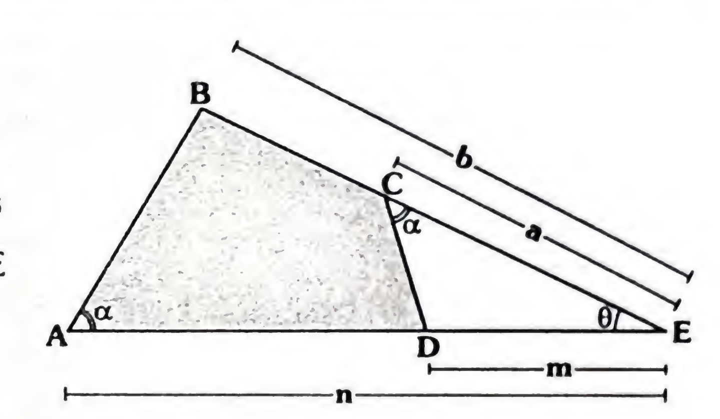
Si al prolongar los lados opuestos de un cuadrilátero convexo se intersecan y se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos determinados por este punto en dichos lados, son iguales, entonces el cuadrilátero es inscriptible.



En el gráfico se cumple:

Si: (ED)(EA) = (EC)(EB), entonces el ⌂ABCD es inscriptible.

Demostración:



- De la condición: $ab = mn \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{n}{b}$ y como m∢CED es común para los triángulos CED y AEB ⇒ ΔABE ~ ΔCDE
- Luego: m∢BAE = m∢DCE

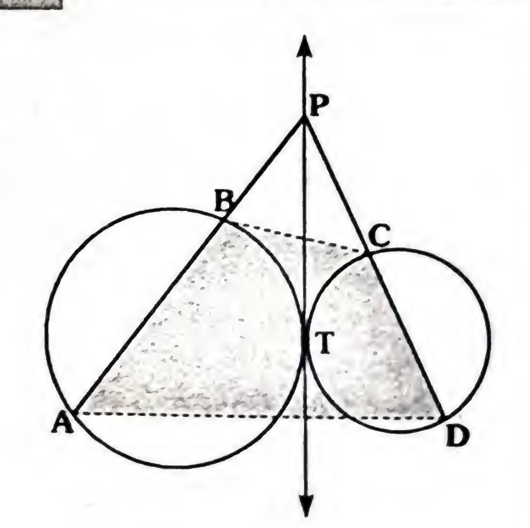
∴ ⌂ABCD es inscriptible.

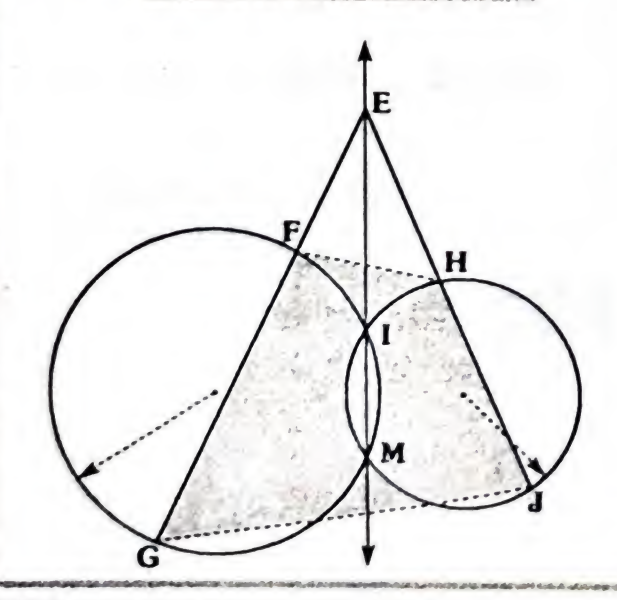
Observación

- *En el gráfico, T es punto de tangencia se cumple:*

$(PT)^2 = (PB)(PA) = (PC)(PD)$

⇒ *⌂ABCD es inscriptible.*





- *En el gráfico, se cumple:*

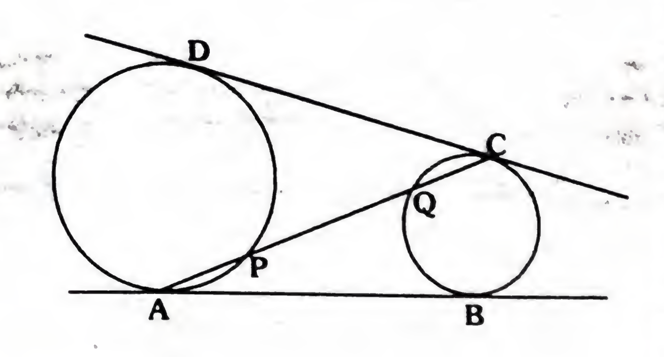
(EF)(EG) = (EI)(EM) = (EH)(EJ)

⇒ *⌂GFHJ es inscriptible.*

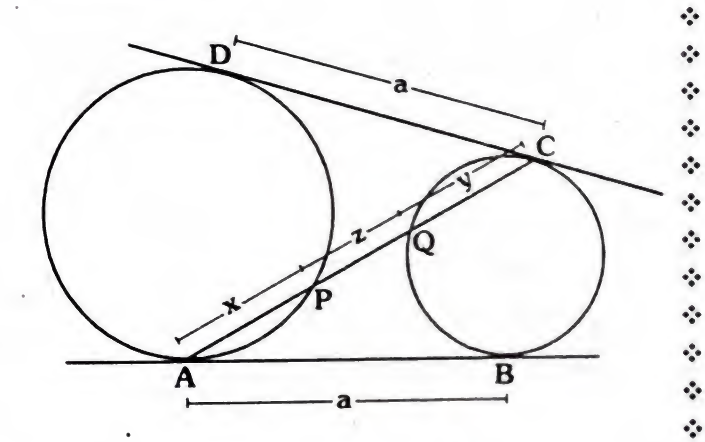
TEOREMA

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Se cumple:

AP = CQ



Demostración:



- Por teorema de circunferencia:

$$AB = CD = a$$

- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (x+z)(AC) \quad \ldots \text{(I)}$$

$$a^2 = (y+z)(AC) \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

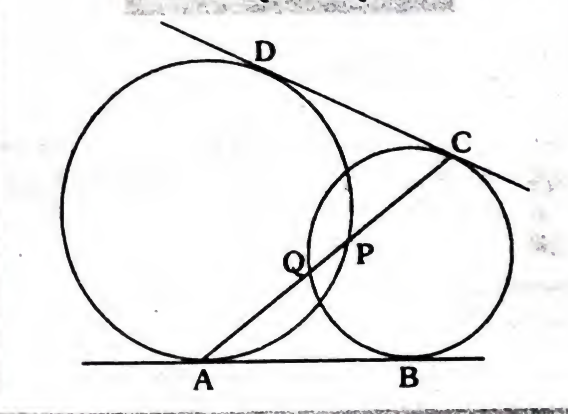
$$x + z = y + z$$

$$\therefore \; x = y$$

Observación

En el gráfico, A, B, C y D *son puntos de tangencia. Se cumple:*

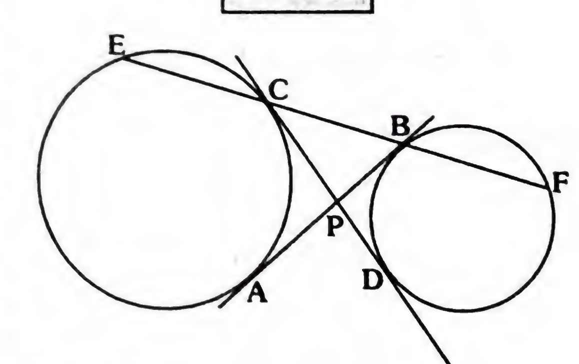
$$AP = CQ \Rightarrow AQ = PC$$



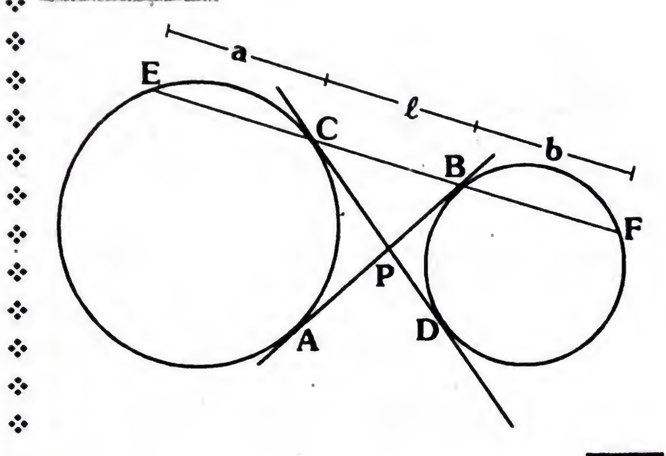
TEOREMA

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Se cumple:

EC = BF



Demostración:



- Por teorema de circunferencia:

$$PC=PA \text{ y } PB=PD \Rightarrow AB=CD$$

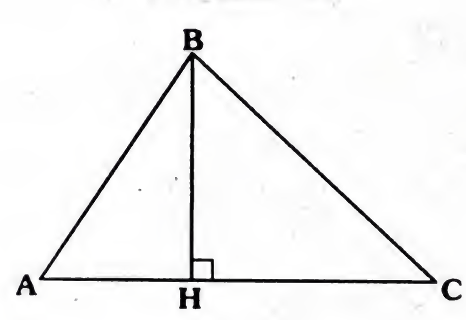
- Por teorema de la tangente:

$$(AB)^2 = \ell(\ell+a)$$
$$(CD)^2 = \ell(\ell+b)$$
$$\Rightarrow \ell+a=\ell+b$$
$$\therefore a=b$$

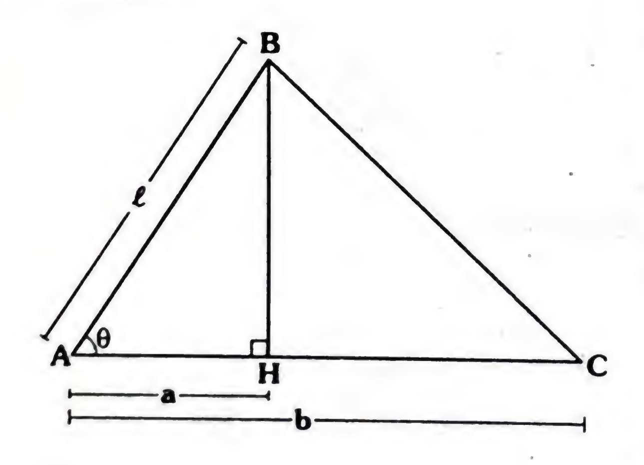
TEOREMA

En el gráfico, si $(AB)^2=(AH)(AC)$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC=90°$$



Demostración:

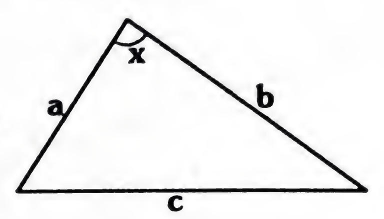


- Por condición, $\ell^2=ab \Rightarrow \frac{\ell}{a}=\frac{b}{\ell}$

$$\Rightarrow \Delta BAH \sim \Delta CAB$$
$$\therefore m\measuredangle AHB = m\measuredangle ABC = 90°$$

TEOREMA

Si un triángulo cumple que la suma de cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la longitud del cuadrado del tercer lado, entonces dicho triángulo es triángulo rectángulo.

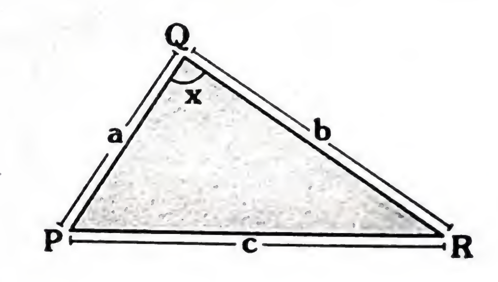


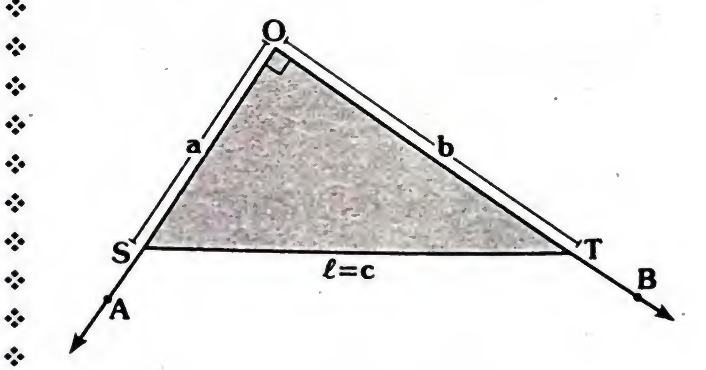
En el gráfico:

$$\textbf{Si: } a^2+b^2=c^2 \Rightarrow x=90°$$

Demostración:

- Se podría optar por teorema de cosenos, aunque también se puede optar, por:





- Se traza el ángulo recto AOB, se ubica S en $\overrightarrow{OA}$ y T en $\overrightarrow{OB}$ tal que OS=a y OT=b, en el ⊿SOT, se cumple $a^2+b^2=\ell^2$ y por condición:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \ell = c$$

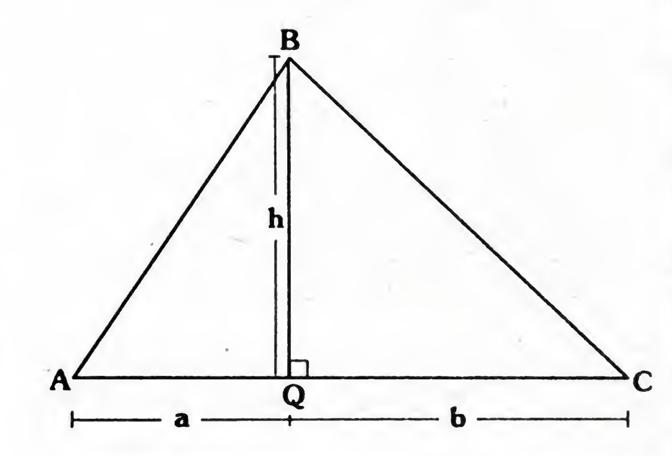
- Luego:

$$\Delta PQR \cong \Delta SOT \quad (LLL)$$

$$\therefore x = 90°$$

TEOREMA

En el gráfico:



Si : $h^2 = ab \Rightarrow m\sphericalangle ABC = 90°$

Demostración:

- En el gráfico, como:

$$h^2 = ab \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{b}{h}$$

$$\Rightarrow \triangle AQB \sim \triangle BQC$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle CBQ \text{ y como:}$$

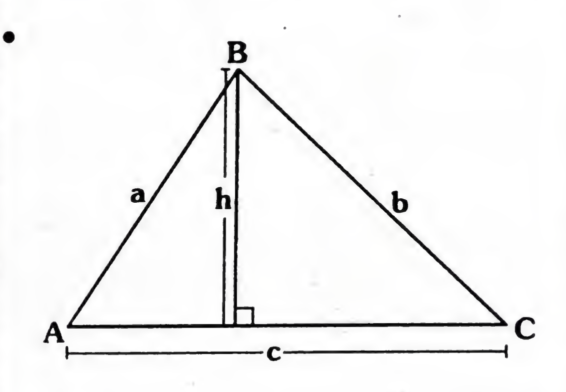
$$m\sphericalangle ABQ = 90° - (m\sphericalangle BAQ)$$

$$\therefore m\sphericalangle ABC = 90°$$

Observación

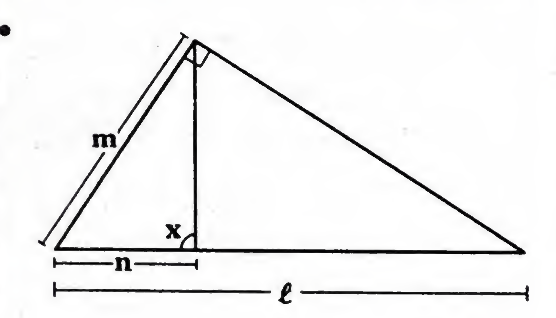
Veamos algunos casos más para los teoremas del triángulo rectángulo.

(Las pruebas quedan como ejercicio para el lector)

- 

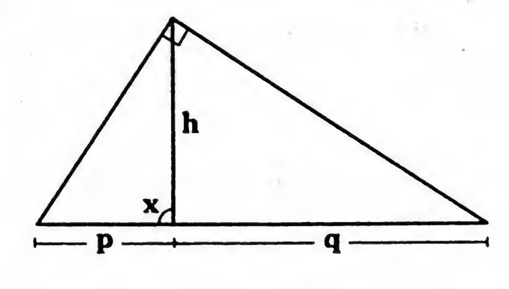
Si:

$ab = hc \Rightarrow m\sphericalangle ABC = 90°$

- 

Si :

$m^2 = n\ell \Rightarrow x = 90°$

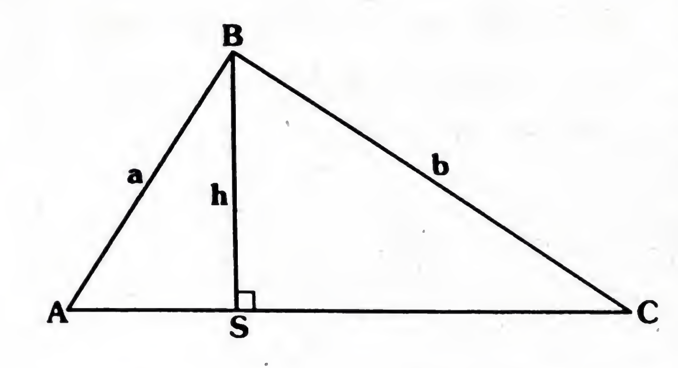
- 

Si:

$h^2 = pq \Rightarrow x = 90°$

TEOREMA

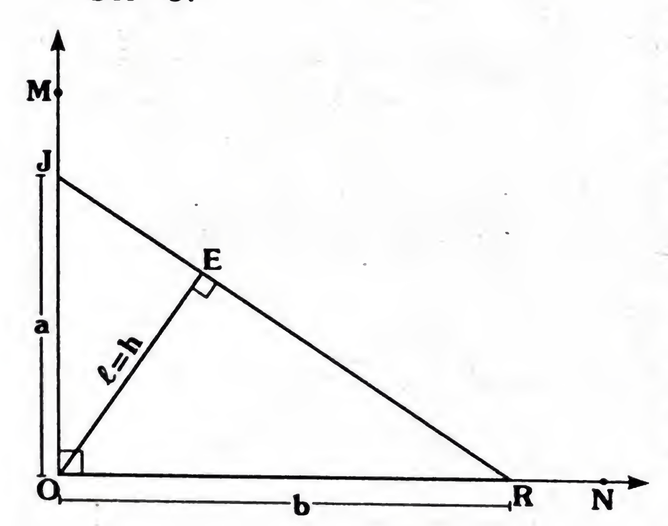
En el gráfico:



Si: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2} \Rightarrow m\sphericalangle ABC = 90°$

Demostración:

- Se puede optar por un método trigonométrico, optemos por una prueba análoga a la del recíproco del teorema de Pitágoras. Construyamos un ángulo recto ($m\sphericalangle MON$) y se ubica J en $\overrightarrow{OM}$ y R en $\overrightarrow{ON}$ tal que OJ=a y OR=b.



- En ◿JOR, por teorema:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{\ell^2}$$

- Por condición:

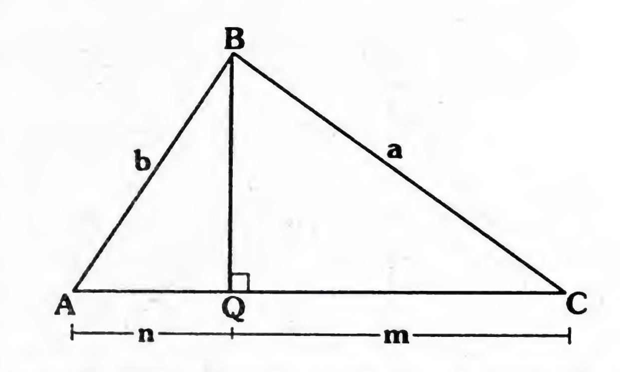
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2} \Rightarrow \ell=h$$

- ◿ASB ≅ ◿JEO ⇒ $m\sphericalangle EOJ = m\sphericalangle ABS$
- ◿OER ≅ ◿BSC ⇒ $m\sphericalangle EOR = m\sphericalangle SBC$

$$\therefore\ m\sphericalangle ABC = 90°$$

TEOREMA

En el gráfico:



Si: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{m}{n}$ y $a \neq b \Rightarrow m\sphericalangle ABC = 90°$

Demostración:

- Por teorema de las proyecciones:

$$a^2-b^2=m^2-n^2 \quad \text{... (I)}$$

- De la condición :

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{m-n}{n}$$

- De (I): $\frac{m^2-n^2}{b^2}=\frac{m-n}{n}$

$$\Rightarrow \frac{(m-n)(m+n)}{b^2}=\frac{m-n}{n}$$

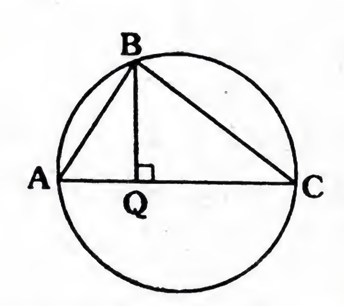
- Como: $a \neq b \Rightarrow m \neq n$

$$\Rightarrow b^2=n(m+n)$$

- Ya fue demostrado:

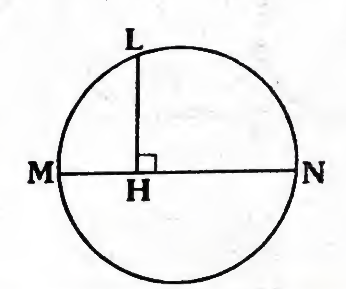
  si: $b^2 = n(m+n) \Rightarrow m\measuredangle ABC = 90°$

Lo siguiente son consecuencias de lo ya demostrado:



Si : $(AB)^2 = (AQ)(AC)$

$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = 180°$



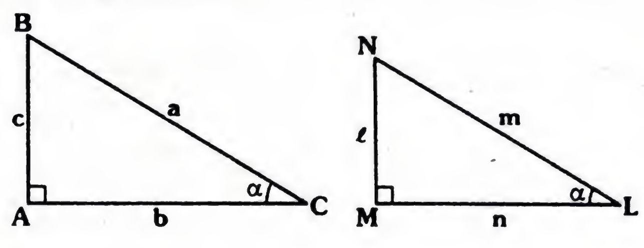
Si: $(LH)^2 = (MH)(HN)$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{MLN} = 180°$

TEOREMA DE DOSTOR

En dos triángulos rectángulos semejantes el producto de las longitudes de las hipotenusas homólogas es igual a la suma de productos de las longitudes de los catetos homólogos.

En el gráfico:



Se cumple:

$$\boxed{am = c\ell + bn}$$

Demostración:

- Como $\triangle BAC \sim \triangle NML$

$$\Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{c}{\ell} = \frac{b}{n}$$

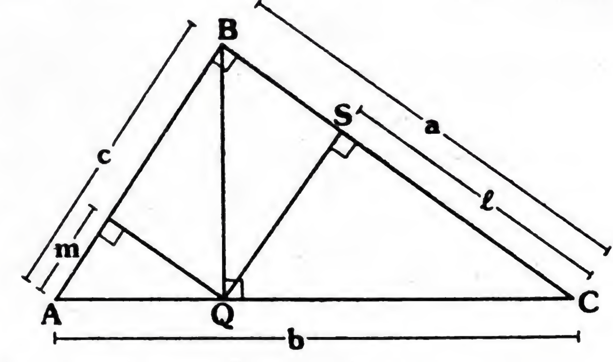
$$\Rightarrow \frac{a \cdot m}{m^2} = \frac{c \cdot \ell}{\ell^2} = \frac{b \cdot n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{am}{m^2} = \frac{c\ell + bn}{\ell^2 + n^2}$$

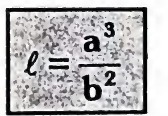
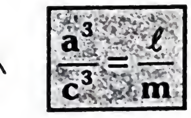
- Como $m^2 = \ell^2 + n^2 \Rightarrow am = c\ell + bn$

TEOREMA

En el gráfico:



Se cumple:

$$\boxed{\ell = \frac{a^3}{b^2}} \quad \wedge \quad \boxed{\frac{a^3}{c^3} = \frac{\ell}{m}}$$

Demostración:

- En el $\triangle ABC$: $a^2 = (QC)b$ ... (I)
- En el $\triangle BQC$: $(QC)^2 = a\ell$ ... (II)

- La expresión (I) al cuadrado:

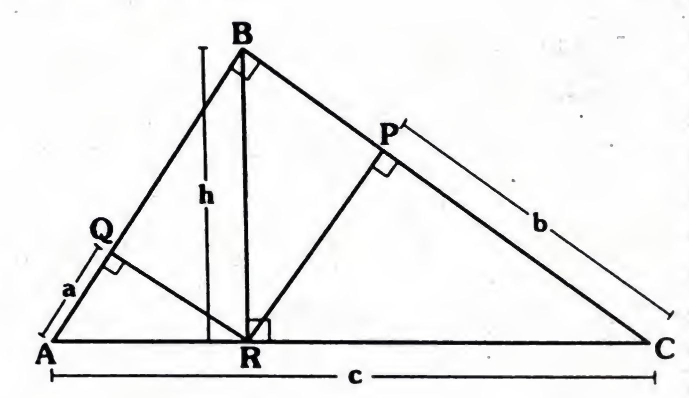
$$a^4 = (QC)^2 b^2 \Rightarrow a^4 = a\ell b^2 \Rightarrow \frac{a^3}{b^2} = \ell$$

- Análogamente: $\frac{c^3}{b^2} = m$

$$\therefore \frac{a^3}{b^2} = \frac{\ell}{m}$$

TEOREMA

En el gráfico:



Se cumple:

$$h^3 = abc \wedge c^{2/3} = a^{2/3} + b^{2/3}$$

Demostración:

- Del teorema anterior:

$$b = \frac{(BC)^3}{c^2} \quad \dots (I)$$

$$a = \frac{(AB)^3}{c^2} \quad \dots (II)$$

$$\Rightarrow abc = \frac{(AB)^3 (BC)^3}{c^3}$$

- En $\triangle ABC$: $(AB)(BC) = hc$

$$\Rightarrow (AB)^3 (BC)^3 = h^3 c^3$$

$$\therefore abc = h^3$$

- De (I) y (II) tenemos: $BC = (bc^2)^{1/3}$

$$AB = (ac^2)^{1/3}$$

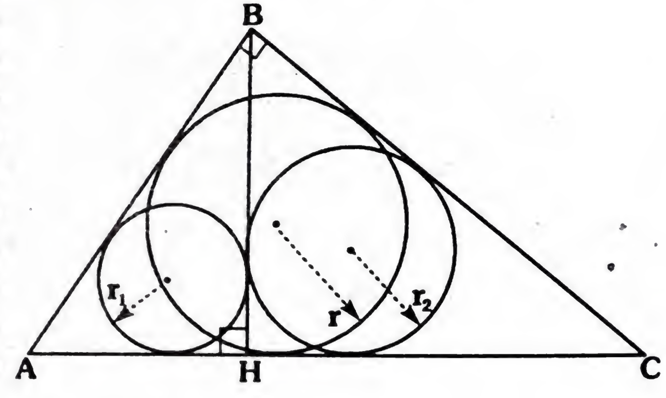
- Como: $(BC)^2 + (AB)^2 = c^2$

$$\Rightarrow (bc^2)^{2/3} + (ac^2)^{2/3} = c^2$$

$$\therefore b^{2/3} + a^{2/3} = c^{2/3}$$

TEOREMA

En el gráfico, r_1, r_2 y r son inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC respectivamente.



Se cumple:

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

Demostración:

- Como: $\triangle AHB \sim \triangle BHC \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{AB} = \frac{r_2}{BC} = \frac{r}{AC} \quad \dots (I)$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^2}{(AB)^2} = \frac{r_2^2}{(BC)^2} = \frac{r^2}{(AC)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{(AB)^2 + (BC)^2} = \frac{r^2}{(AC)^2}$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

Observación

En la expresión (I):

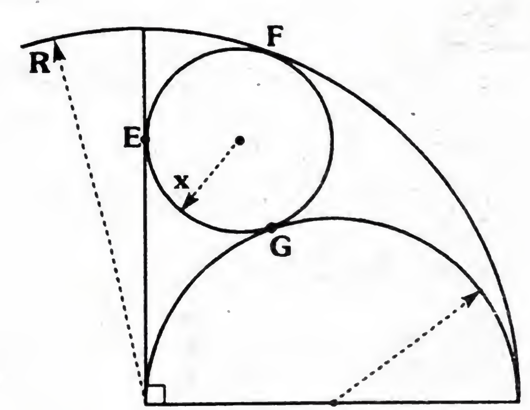
$$\frac{r_1(AB)}{(AB)^2}=\frac{r_2(BC)}{(BC)^2}=\frac{r(AC)}{(AC)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1(AB)+r_2(BC)}{\cancel{(AB)^2+(BC)^2}}=\frac{r(AC)}{\cancel{(AC)^2}}$$

$$\therefore\ r_1(AB)+r_2(BC)=r(AC)$$

TEOREMA

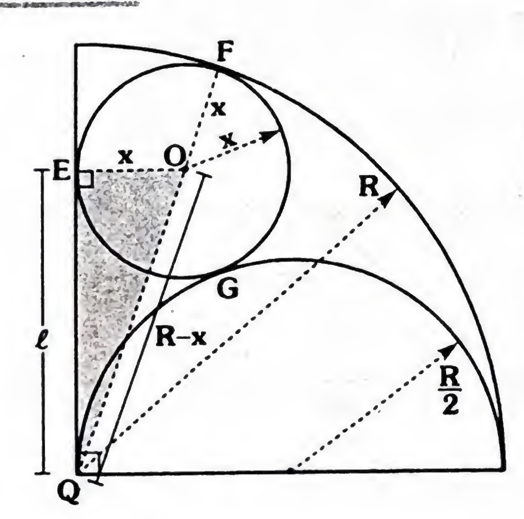
En el gráfico, E, F y G son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$\mathbf{x=\frac{R}{4}}$$

Demostración:



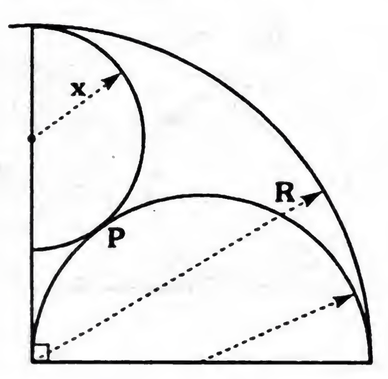
- Por teorema, Q, O y F son colineales.
- Por teorema : $\ell=2\sqrt{\frac{Rx}{2}}\ \Rightarrow\ \ell^2=\frac{Rx}{2}$
- En $\measuredangle$QEO: $\ell^2+x^2=(R-x)^2$

$$\Rightarrow \frac{Rx}{2}+\cancel{x^2}=R^2+\cancel{x^2}-2Rx$$

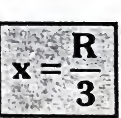
$$\therefore\ x=\frac{R}{4}$$

TEOREMA

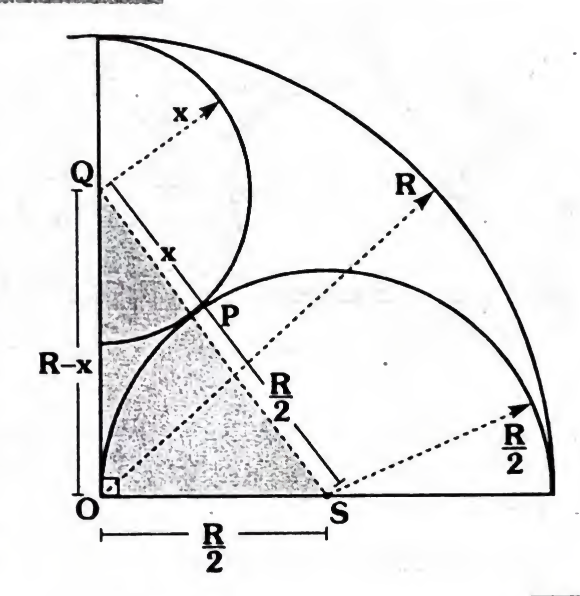
En el gráfico, P es punto de tangencia.



Se cumple:



Demostración:



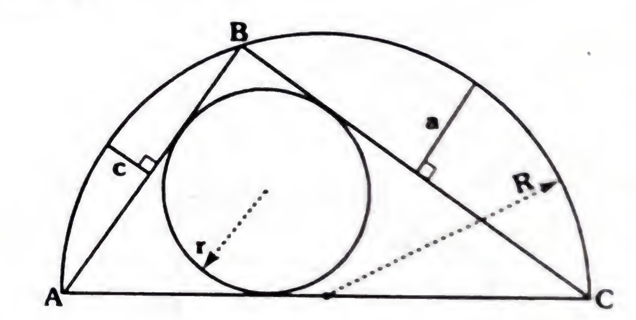
- Q, P y S son colineales.
- En ⊿QOS:

$$(R-x)^2+x^2=\left(\frac{R}{2}+x\right)^2$$

$$\therefore\ x=\frac{R}{3}$$

TEOREMA

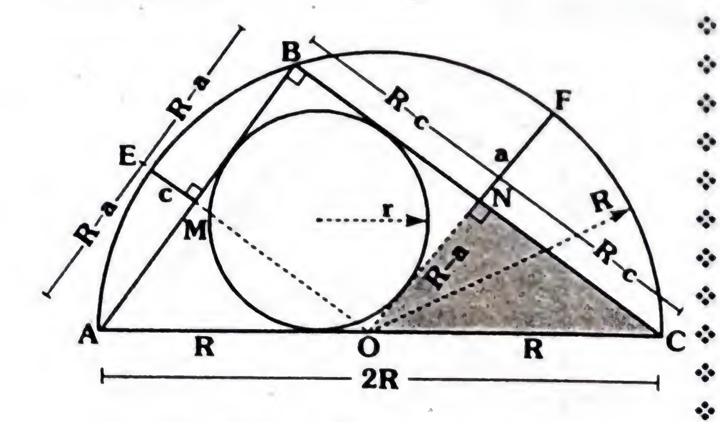
En el gráfico, a y c son las longitudes de las flechas respecto de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y "r" es inradio del triángulo ABC.



Se cumple:

$$\mathbf{a+c+r=R \wedge r=\sqrt{2ac}}$$

Demostración:



- Como $\overline{EM}$ y $\overline{FN}$ son flechas, entonces las prolongaciones de $\overline{FN}$ y $\overline{EM}$ pasan por el centro.
- Por teorema de Poncelet:

$$\underbrace{AB} + \underbrace{BC} = AC+2r$$

$$2(R-a)+2(R-c)=2R+2r$$

$$\therefore\ R=a+c+r$$

- En ⊿ONC:

$$R^2=(R-a)^2+(R-c)^2$$

$$0=R^2+a^2+c^2-2aR-2cR$$

$$2ac=\underbrace{(R-a-c)}_{r}{}^2$$

$$\therefore\ r=\sqrt{2ac}$$

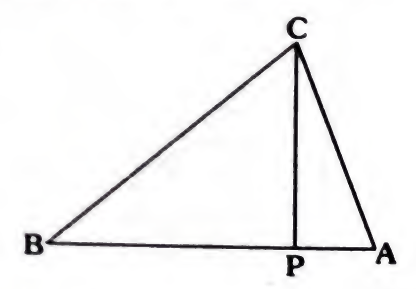
TEOREMA

(Recíproco del teorema de las proyecciones)

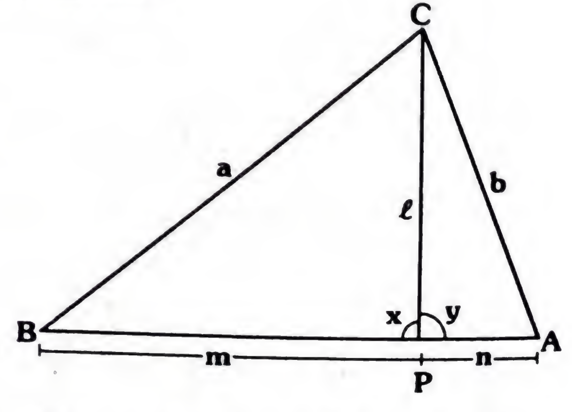
En el gráfico, si:

$$(BC)^2-(AB)^2=(PB)^2-(AP)^2$$

Se cumple, que $\overline{CP}$ es altura.



Demostración:



- Por condición $a^2-b^2=m^2-n^2$

- Como: $x + y = 180°$

$\Rightarrow \cos x = -\cos y$

- En ΔBPC:

$$a^2 = m^2 + \ell^2 - 2m\ell\cos x \quad \text{... (I)}$$

- En ΔPCA:

$$b^2 = n^2 + \ell^2 - 2n\ell\cos y$$

$$\Rightarrow b^2 = n^2 + \ell^2 + 2n\ell\cos x \quad \text{... (II)}$$

- Restando (I) y (II):

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2 - 2\ell(m+n)\cos x$$

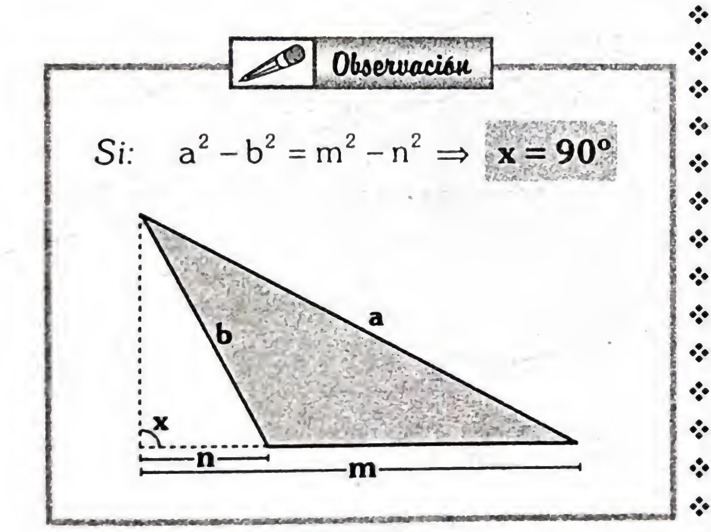
$$\Rightarrow \underbrace{2\ell(m+n)}_{\neq 0}\cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$$

$\therefore$ $\overline{CP}$ es altura

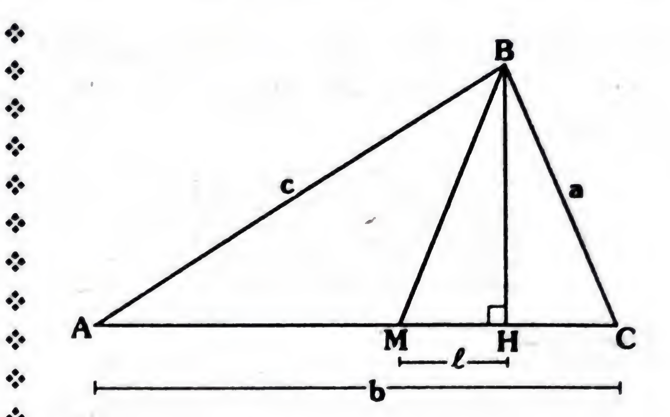
Observación

Si: $a^2 - b^2 = m^2 - n^2 \Rightarrow$ **$x = 90°$**



TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo se cumple que la diferencia de cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble producto de las longitudes del tercer lado con la proyección de la mediana sobre dicho tercer lado.



En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$ y c>a, se cumple:

$$c^2 - a^2 = 2b\ell$$

Demostración:

- Por teorema de las proyecciones:

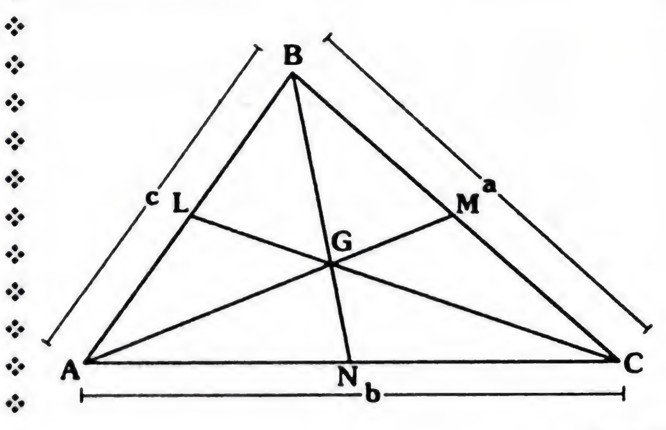
$$c^2 - a^2 = (AH)^2 - (HC)^2$$

$$c^2 - a^2 = \underbrace{(AH + HC)}_{b} \cdot \underbrace{(AH - HC)}_{2\ell}$$

$$\therefore \ c^2 - a^2 = 2b\ell$$

TEOREMA DE BOOTH

En todo triángulo, se cumple que la razón entre la suma de cuadrados de las longitudes de los lados y las medianas es cuatro tercios.



En el gráfico, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$ son medianas. Si $AM = m_a$, $BN = m_b$ y $CL = m_c$, se cumple:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

Demostración:

- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$\cdot\ a^2+b^2=2(m_c)^2+\frac{c^2}{2} \quad \ldots (I)$$

$$\cdot\ b^2+c^2=2(m_a)^2+\frac{a^2}{2} \quad \ldots (II)$$

$$\cdot\ a^2+c^2=2(m_b)^2+\frac{b^2}{2} \quad \ldots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

Observación

– *Un resultado interesante también es:*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{m_a^4+m_b^4+m_c^4}=\frac{16}{9}$$ (Ver prob. resuelto Nº 181)

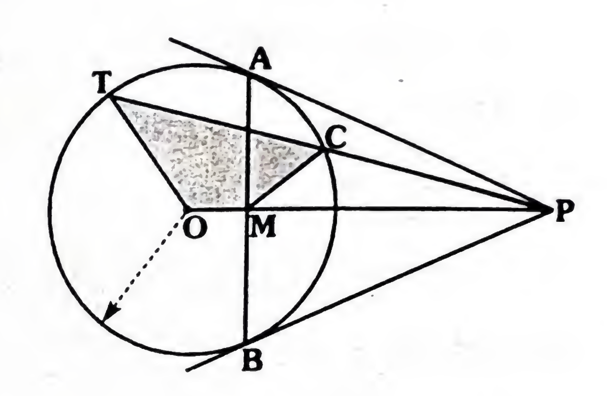
– *En el gráfico, también se cumple:*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2}=3$$

(Segundo teorema de Booth)

TEOREMA

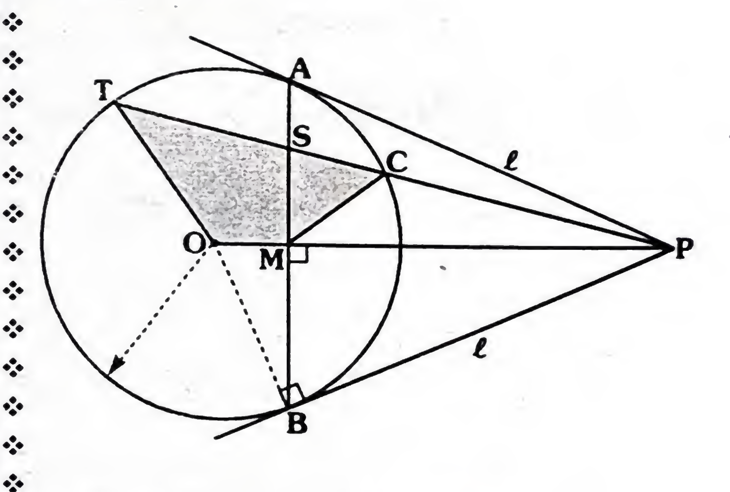
En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.



Se cumple:

⌂CMOT es inscriptible

Demostración:



- Por teorema de la tangente:

$$\ell^2=(PT)(PC)$$

- En ⊿OBP:

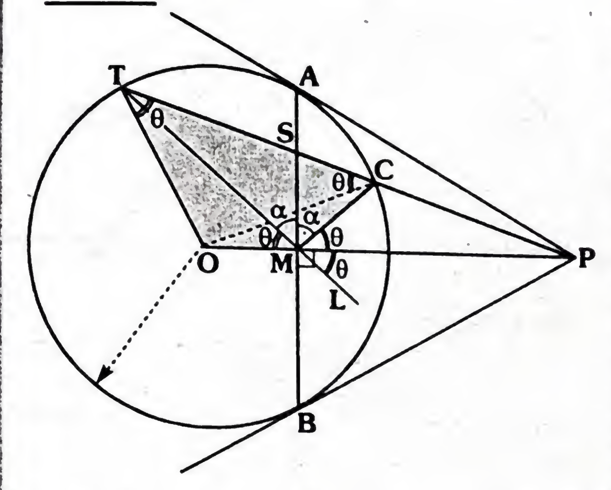
$$\ell^2=(PM)(PO)$$

$$\Rightarrow\ (PT)(PC)=(PM)(PO)$$

- Por recíproco del teorema de la secante, el ⌂CMOT es inscriptible.

Los puntos P, C, S y T forman una cuaterna armónica.

Prueba:



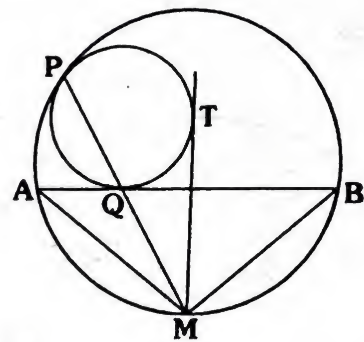
- *Como el* $\triangle$*CMOT es inscriptible, el* Δ*TOC es isósceles*

  $\Rightarrow m\measuredangle OMT = m\measuredangle OCT = m\measuredangle OTC$
- *Como :*

  $m\measuredangle PMA = 90° \Rightarrow m\measuredangle CMS = m\measuredangle SMT$
- *En* ΔTMC, $\overline{MS}$ *es bisectriz interior y* $\overline{MT}$ *bisectriz exterior, por lo tanto* ***P, C, S y T son cuaterna armónica.***

TEOREMA

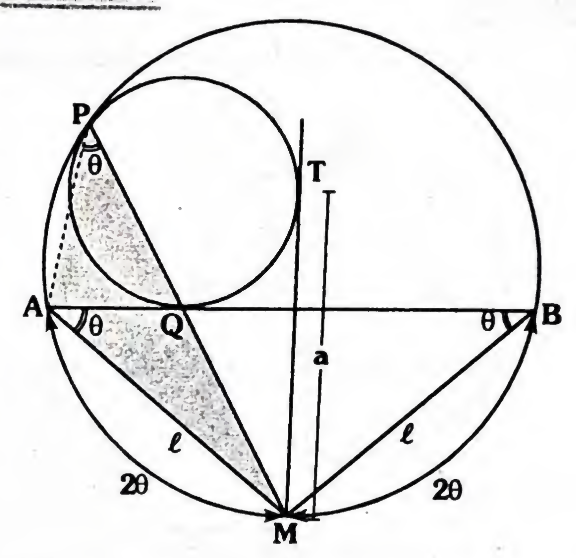
En el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$MA = MB = MT$$

Demostración:



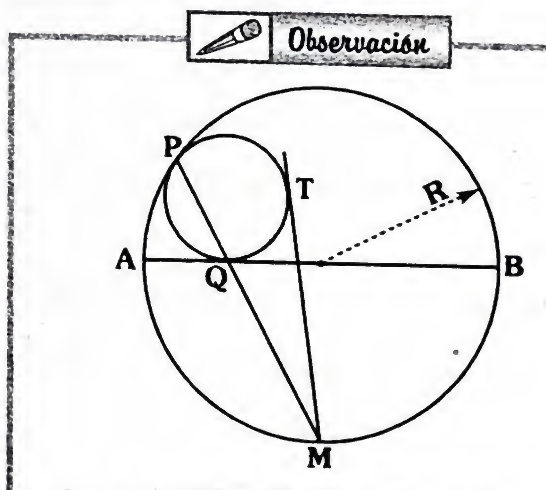
- Por teorema de circunferencia:

  $$m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$$

  $\Rightarrow \Delta AMB$: isósceles $\Rightarrow AM = MB$
- Por teorema de la tangente:

  $$a^2 = (MQ)(MP) \quad \ldots (I)$$
- En ΔMPA: como $m\measuredangle APM = m\measuredangle MAQ$, por teorema de semejanza.

  $$\ell^2 = (MQ)(MP) \quad \ldots (II)$$
- De (I) y (II): $a = \ell$

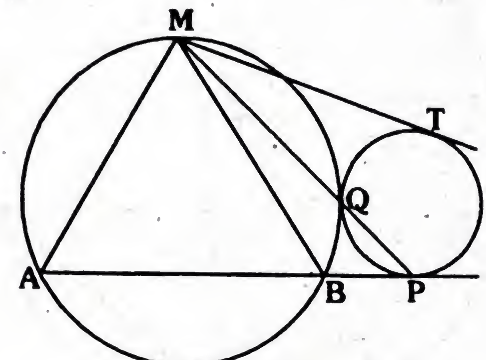


En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia, se cumple:

$$MT = R\sqrt{2}$$

TEOREMA

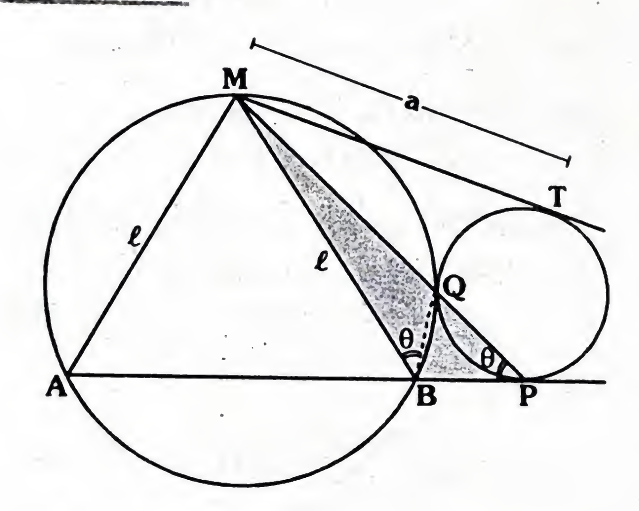
En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$MA = MB = MT$$

Demostración:



- Por teorema de circunferencia:

$$m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MQB} \Rightarrow AM = BM$$

- Como:

$$m\overset{\frown}{MQ} = m\overset{\frown}{QP} \Rightarrow m\sphericalangle MBQ = m\sphericalangle BPM$$

- Por teorema de semejanza en ΔPBM:

$$\ell^2 = (MQ)(MP) \qquad \dots (I)$$

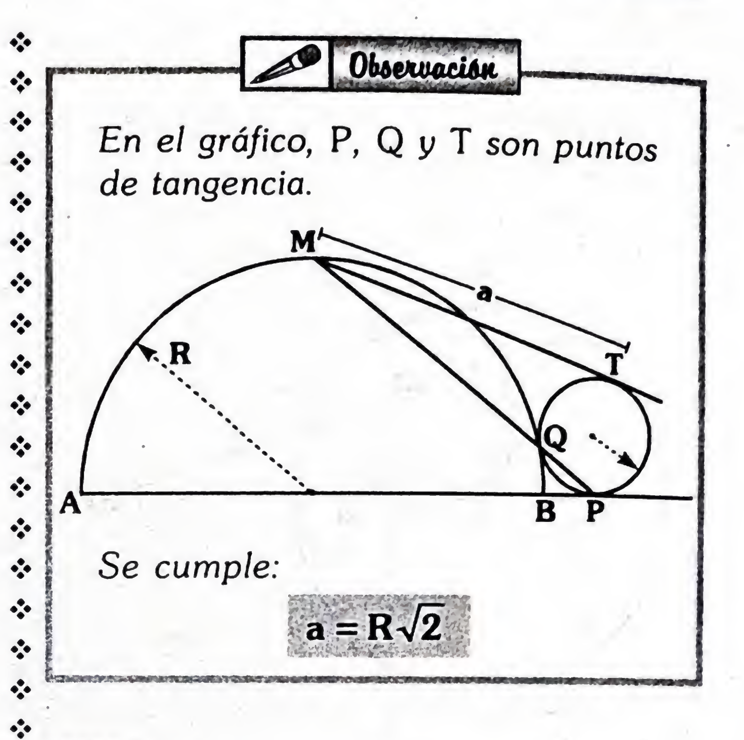
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (MQ)(MP) \qquad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $a = \ell$

Observación

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.

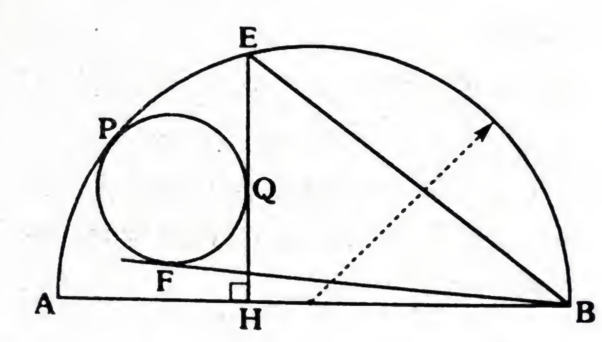


Se cumple:

$$a = R\sqrt{2}$$

TEOREMA

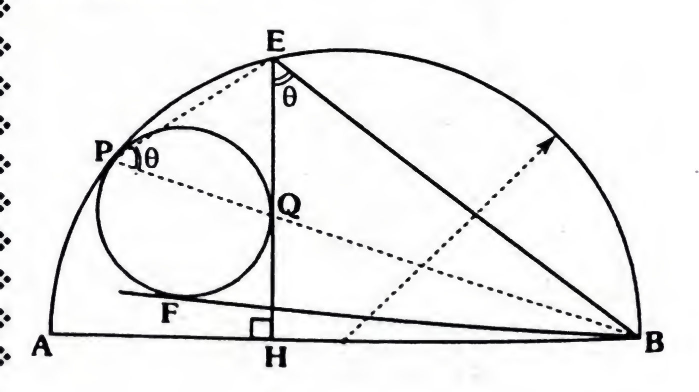
En el gráfico P, Q y F son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$BE = BF$$

Demostración:



- Por teorema de circunferencia P, Q y B son colineales.
- Por teorema de la tangente:

$$(BF)^2 = (BQ)(BP) \qquad \ldots (I)$$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\sphericalangle BPE = m\sphericalangle HEB$$

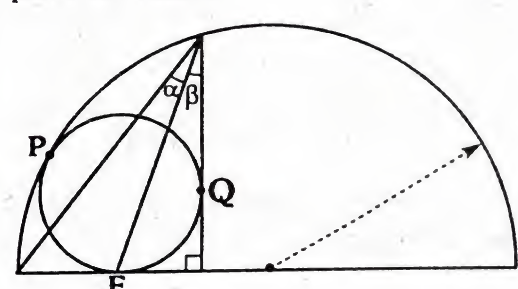
- En ΔBPE:

$$(BE)^2 = (BQ)(BP) \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

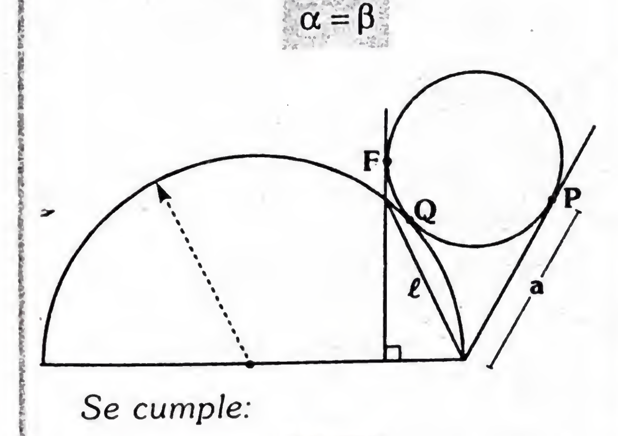
$$BF = BE$$

- *Los siguientes resultados se prueban en forma análoga. (En cada caso, P, Q y F son puntos de tangencia).*
- *La prueba se deja como ejercicio para el lector.*



Se cumple:

$$\alpha = \beta$$

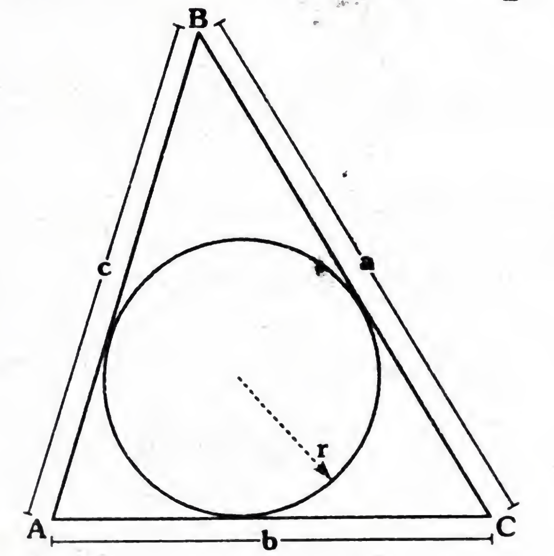


Se cumple:

$$a = \ell$$

TEOREMA

En el gráfico, "r" es inradio y $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

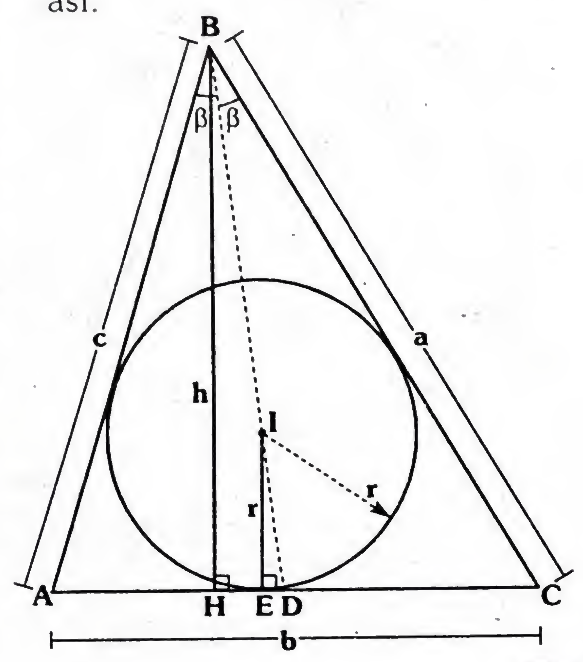


Se cumple:

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demostración:

- Aunque el resultado se obtiene fácilmente con dos expresiones sobre áreas, también podemos proceder así:



- Como I es incentro, por teorema:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{a+c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{BI+ID}^{BD}}{ID}=\frac{\overbrace{a+b+c}^{2p}}{b} \quad \ldots (I)$$

- Por teorema de Heron:

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \ldots (II)$$

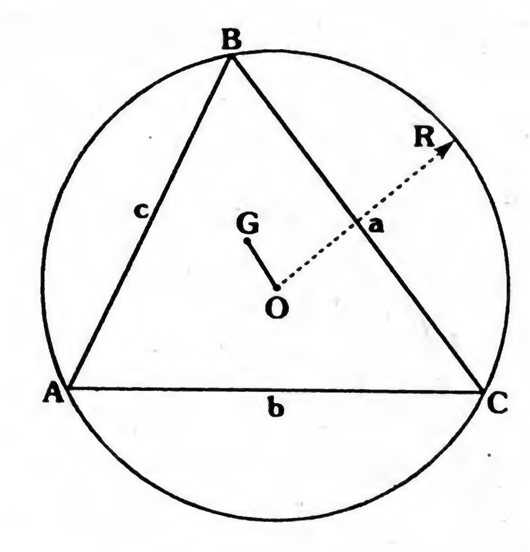
- $\triangle HBD \sim \triangle EID$

$$\Rightarrow \frac{BD}{ID}=\frac{h}{r} \Rightarrow \frac{2p}{b}=\frac{h}{r}$$

$$\therefore \; pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

TEOREMA (Del Metacentro)

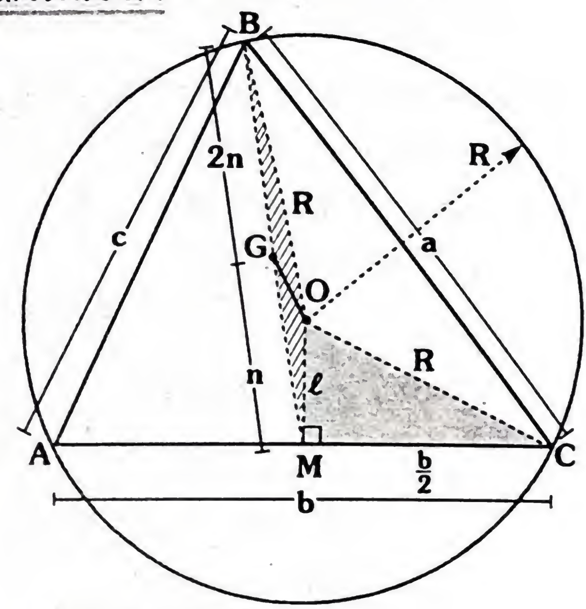
En el gráfico, O y G son circuncentro y baricentro del triángulo ABC respectivamente.



Se cumple:

$$\boxed{OG=\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right)}}$$

Demostración:



- Sea $OG=x$
- Como G es baricentro $\Rightarrow \overline{BM}$ es mediana, $BG=2(GM)$ y $\overline{OM}\perp\overline{AC}$.
- Teorema de Stewart, en el ΔBMO:

$$R^2(n)+\ell^2(2n)=x^2(3n)+2n(n)(3n)$$

$$R^2+2\ell^2=3x^2+6n^2$$

$$\Rightarrow 3R^2+6\ell^2=9x^2+18n^2 \quad \ldots (I)$$

- En el ΔABC, teorema del cálculo de la mediana:

$$a^2+c^2=2(3n)^2+\frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow 18n^2+\frac{b^2}{2}=a^2+c^2 \quad \ldots (II)$$

- En $\triangle OMC$:

$$\ell^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow 6R^2=6\ell^2+\frac{3}{2}b^2 \quad \ldots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$9R^2-(a^2+b^2+c^2)=9x^2$$

$$\therefore \; x=\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right)}$$

Observación

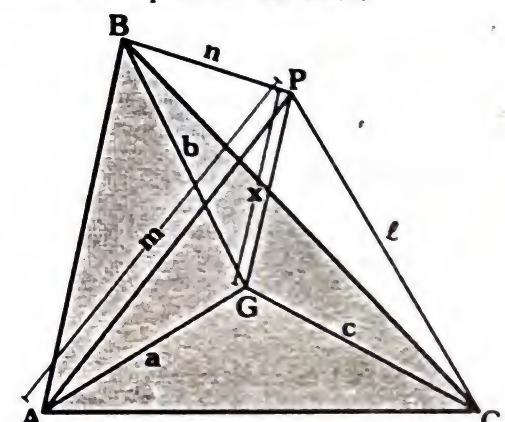
Como: $R^2 - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{9} \geq 0$

$\Rightarrow \quad 9R^2 \geq a^2+b^2+c^2$

La igualdad se cumple para el triángulo equilátero.

TEOREMA

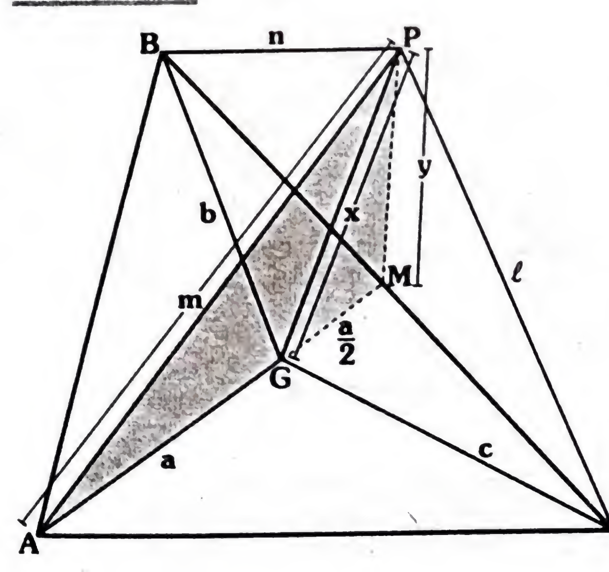
En el gráfico, G es baricentro del ΔABC y **P es un punto cualquiera** del plano determinado por el ΔABC.



Se cumple:

$$a^2+b^2+c^2 = m^2+n^2+\ell^2-3x^2$$

Demostración:



- Al prolongar $\overline{AG}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, entonces BM=MC y $GM = \frac{a}{2}$.
- Por cálculo de teorema de la mediana en:

$$\Delta BGC: \ b^2+c^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad \ldots (I)$$

$$\Delta BPC: \ n^2+\ell^2 = 2y^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad \ldots (II)$$

- Restando (I) y (II):

$$b^2+c^2-n^2-\ell^2 = \frac{a^2}{2} - 2y^2 \quad \ldots (III)$$

- Teorema de Stewart en el ΔAMP :

$$m^2\left(\frac{a}{2}\right) + y^2(a) = x^2\left(\frac{3a}{2}\right) + a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 3x^2 + \frac{3}{2}a^2 - m^2 \quad \ldots (IV)$$

- (IV) en (III):

$$b^2+c^2-n^2-\ell^2 = \frac{a^2}{2} - \left(3x^2+\frac{3}{2}a^2-m^2\right)$$

$$\therefore \ a^2+b^2+c^2 = m^2+n^2+\ell^2-3x^2$$

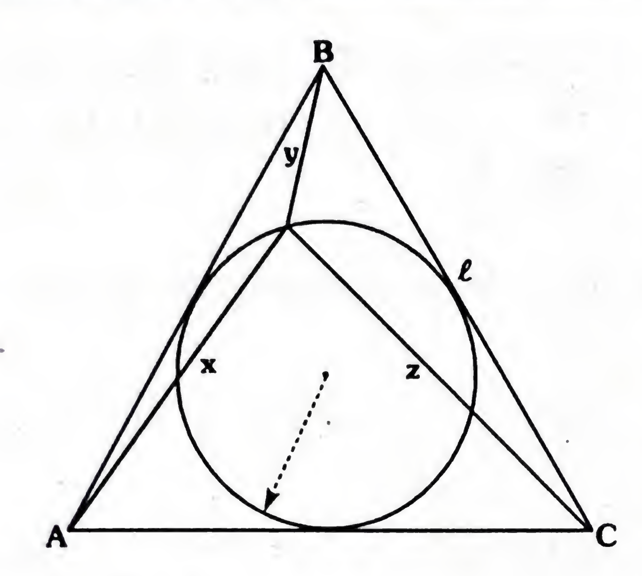
Observación

De lo anterior, se deduce:

$$a^2+b^2+c^2 \leq m^2+n^2+\ell^2$$

TEOREMA

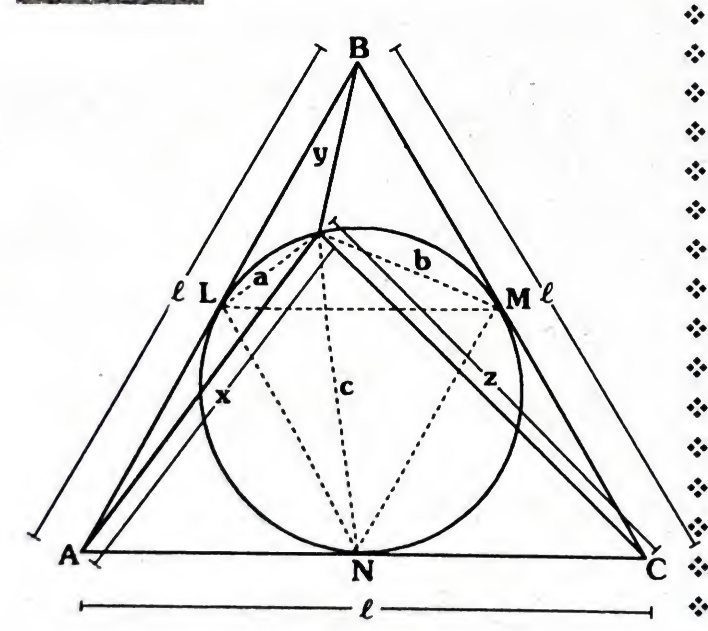
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero ABC.



Se cumple:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}\ell^2$$

Demostración:



- L, M y N son puntos medios de los lados, con ello ΔLMN también es equilátero, cuyo lado mide $\ell/2$.
- Por teorema de la mediana:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 + \frac{\ell^2}{2} \qquad \text{... (I)}$$

$$y^2 + z^2 = 2b^2 + \frac{\ell^2}{2} \qquad \text{... (II)}$$

$$x^2 + z^2 = 2c^2 + \frac{\ell^2}{2} \qquad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2}\ell^2 \qquad \text{... (IV)}$$

- Por teorema de Chadú (2do caso):

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

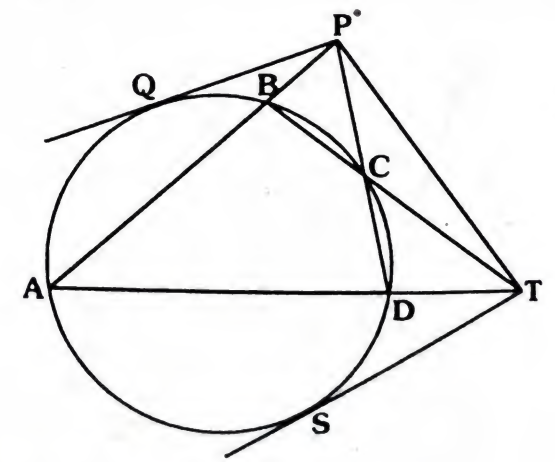
- Reemplazando en IV:

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2\left(\frac{\ell^2}{2}\right) + \frac{3}{2}\ell^2$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}\ell^2$$

TEOREMA

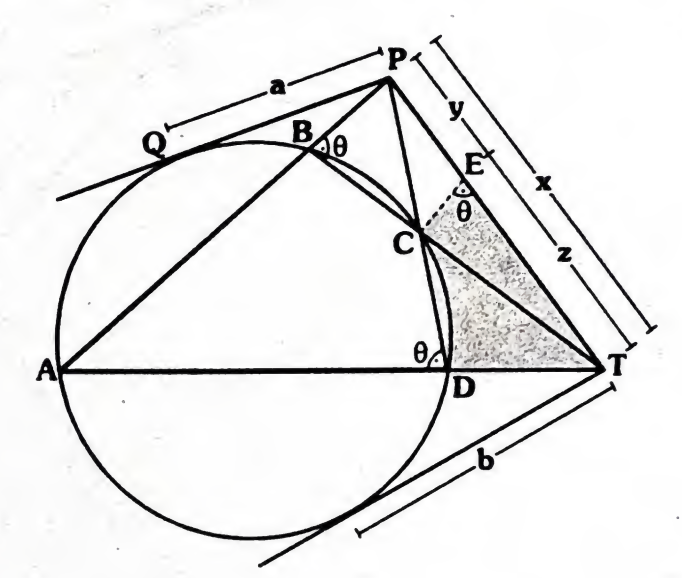
En el gráfico, S y Q son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$(PT)^2 = (PQ)^2 + (TS)^2$$

Demostración:

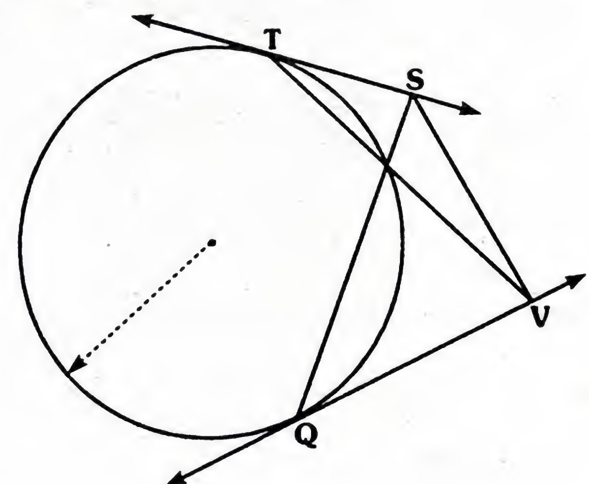


- Tracemos $\overline{CE}$ tal que:
  $m\measuredangle CET = \theta \Rightarrow$ ⏢DCET y ⏢BPEC son inscriptibles.
- Por teorema de la tangente:
  $a^2 = (PC)(PD)$ ... (I)
  $b^2 = (TC)(TB)$ ... (II)
- Por teorema de la secante:
  $(PC)(PD) = yx$
  $(TC)(TB) = zx$
- Sumando (I) y (II):

$$a^2 + b^2 = zx + yx \Rightarrow a^2 + b^2 = x\underbrace{(z+y)}_{x} \qquad \therefore\ a^2 + b^2 = x^2$$

TEOREMA

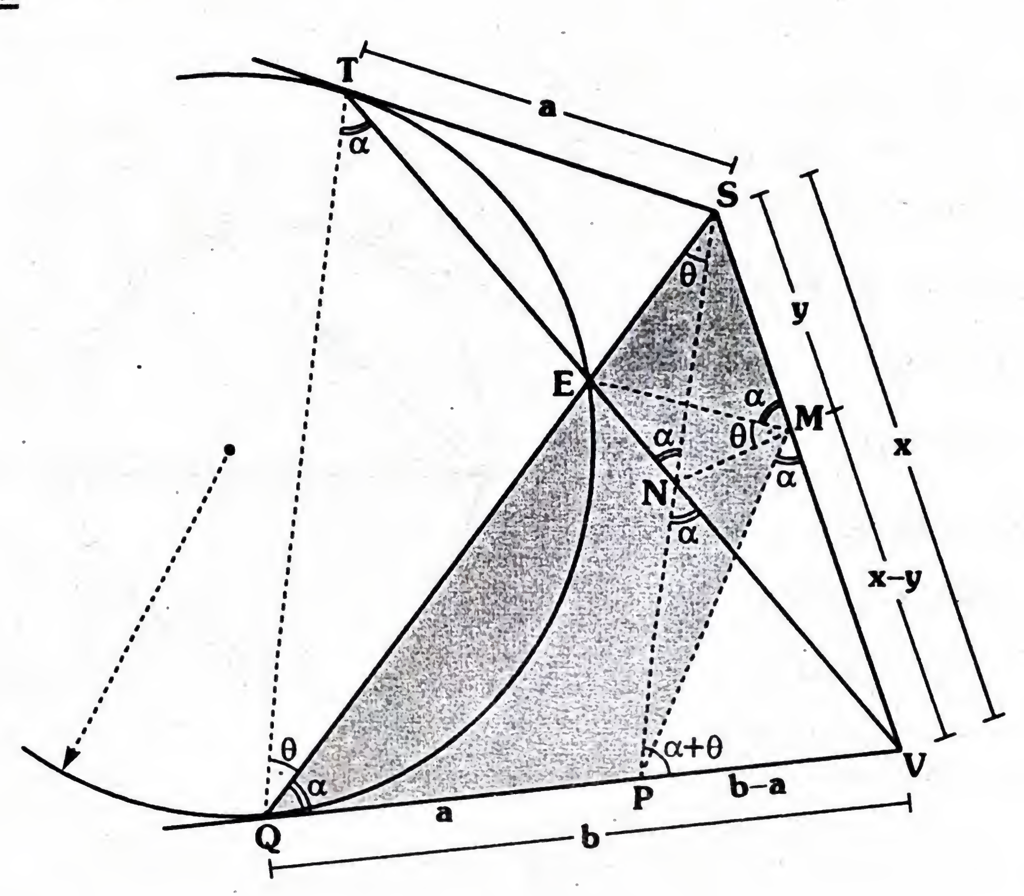
En el gráfico, Q y T son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$SV = \sqrt{(VQ)^2 + (ST)^2 - (VQ)(ST)}$$

Demostración:



- Sea SV=x, ST=a y VQ=b.
- Sin pérdida de generalidad consideremos $b \geq a$.
- Por teorema de la tangente: $a^2 = (SE)(SQ)$ ... (I)
- Se ubica M en $\overline{VS}$ tal que $m\measuredangle EMS = m\measuredangle SQV = \alpha$, luego el ⌂QEMV es inscriptible, por teorema de la secante:

$$(SE)(SQ) = \underbrace{(SM)}_{y}x \quad ; \quad \text{de (I):} \quad a^2 = xy \qquad \text{... (II)}$$

- Se traza $\overline{SP} // \overline{TQ} \Rightarrow$ TSPQ es trapecio isósceles

$$\Rightarrow QP = a \quad y \quad m\measuredangle PSQ = m\measuredangle SQT = \theta \quad y \quad m\measuredangle SNE = \alpha$$

- ⌂ESMN: inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle NME = \theta$
- Como: $m\measuredangle NMS = m\measuredangle NPV = \alpha + \theta \Rightarrow$ ⌂PNMV: inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle PMV = m\measuredangle PNV = \alpha$$

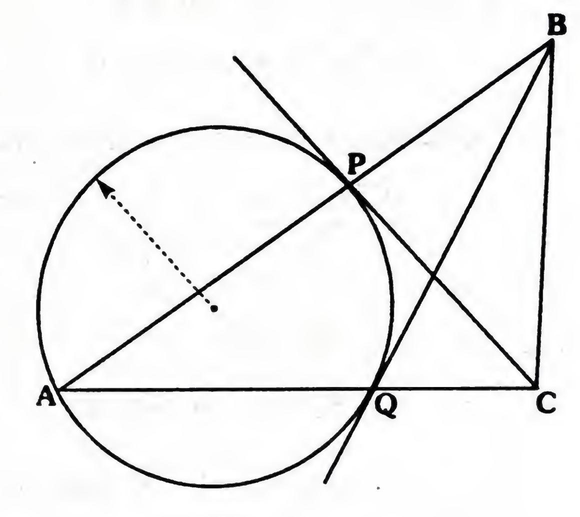
- Finalmente el ⊿QSMP es inscriptible, pues:

$$m\measuredangle SQP = m\measuredangle PMV \quad \Rightarrow \quad (x-y)x = (b-a)b$$

$$x^2 - \underbrace{xy}_{a^2} = b^2 - ab$$

$$\therefore \quad x^2 = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

TEOREMA

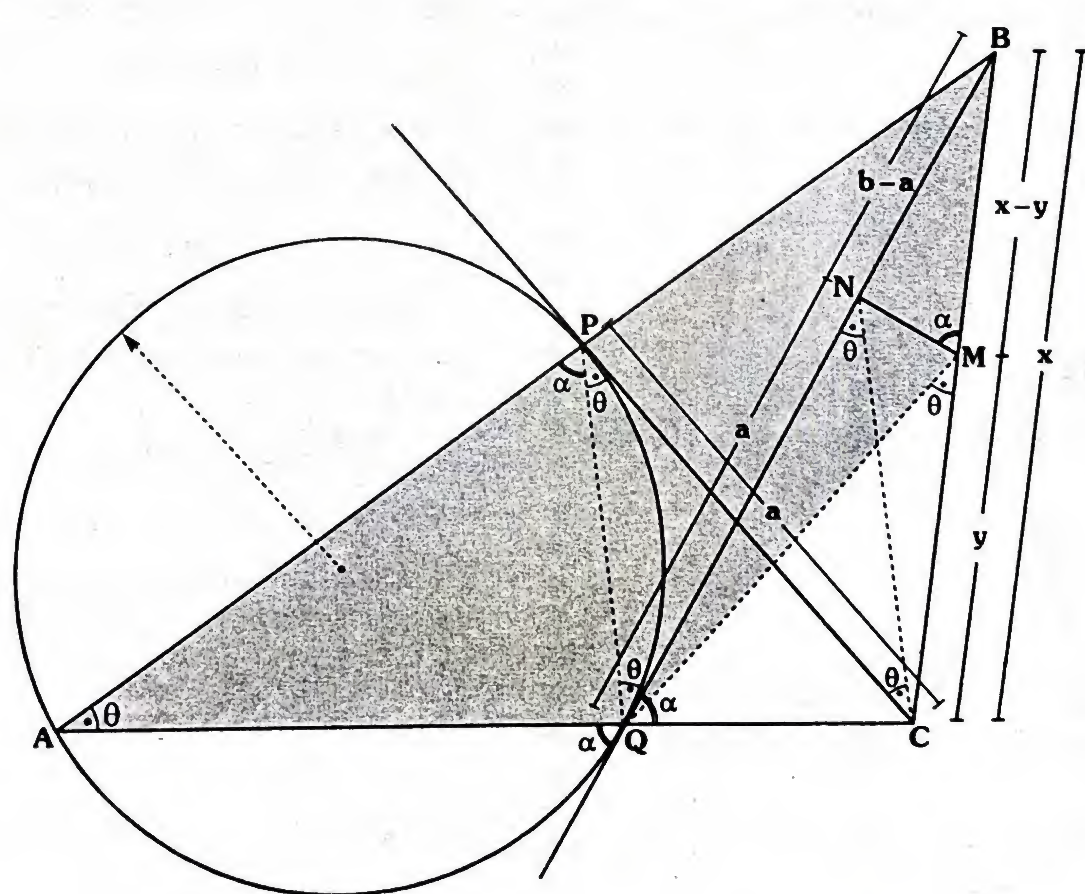


En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia.

Se cumple:

$$BC = \sqrt{(BQ)^2 + (CP)^2 - (BQ)(CP)}$$

Demostración:



- Sea BC=x, CP=a y BQ=b consideremos sin pérdida de generalidad.

$$b \geq a$$

- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (QC)(CA) \quad \ldots (I)$$

- Se ubica M en $\overline{BC}$ tal que:

$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle QMC = \theta$$

- $\triangle$ABMQ es inscriptible, entonces:

$$\underbrace{(CQ)(CA)}_{a^2} = yx$$

$$a^2 = yx \quad \ldots (II)$$

- Tracemos $\overline{CN} // \overline{QP}$

$$\Rightarrow \; CP = QN = a \;\Rightarrow\; NB = b - a$$

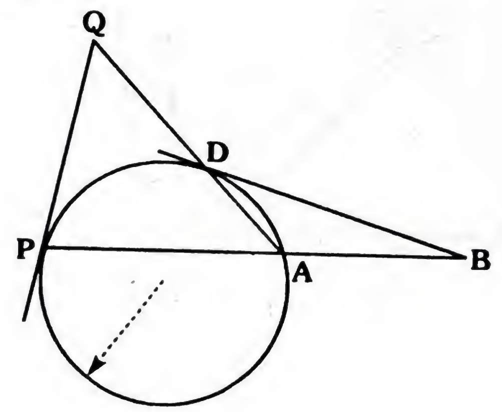
- Como $m\measuredangle CNQ = \theta$ entonces el $\triangle$QNMC es inscriptible, por teorema de la secante:

$$(x-y)x = (b-a)b \Rightarrow x^2 - \underbrace{xy}_{a^2} = b^2 - ab$$

$$\therefore \; x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

TEOREMA

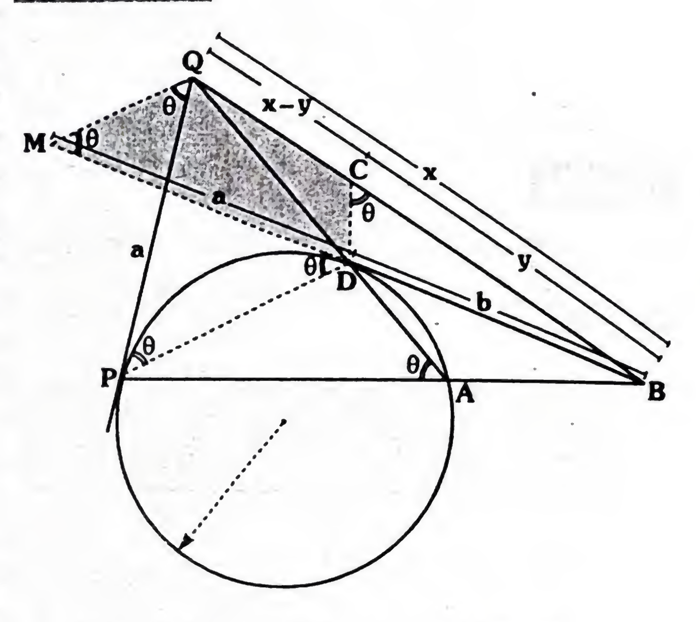
En el gráfico, P y D son puntos de tangencia.



Se cumple:

$$\boxed{BQ = \sqrt{(QP)^2 + (BD)^2 + (QP)(BD)}}$$

Demostración:



- Sea BQ=x, QP=a y BD=b.
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (QD)(QA) \quad \ldots (I)$$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\measuredangle DAP = m\measuredangle DPQ = m\measuredangle PDM = \theta$$

- Se ubica C en $\overline{QB}$, tal que:

$$m\measuredangle DCB = \theta \Rightarrow \triangle ADCB$$

es inscriptible, por teorema de la secante:

$$(QD)(QA) = (QC)x \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $a^2 = (x-y)x \quad \ldots (III)$
- Se ubica M en la prolongación de $\overline{BD}$ tal que DM=PQ=a $\Rightarrow \overline{PD} // \overline{MQ}$, luego: MQCD es inscriptible
- Por teorema de la secante:

$$b(b+a) = yx \quad \ldots (IV)$$

- De (III) y (IV): $a^2 + b^2 + ab = x^2$

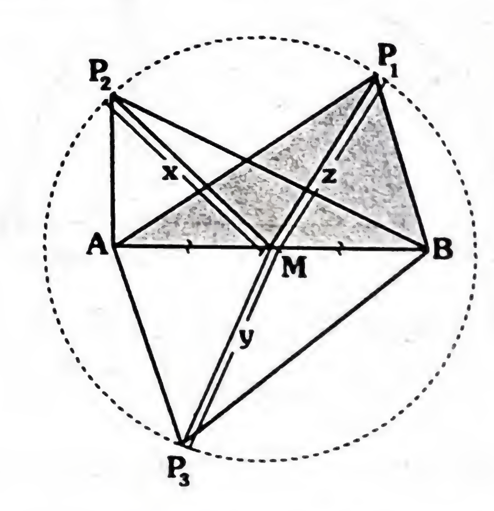
$$\therefore \; x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

ALGUNAS CONSTRUCCIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Caso 1

En un plano se considera el segmento AB fijo y un punto P móvil, el lugar geométrico de P tal que $(PA)^2+(PB)^2$ es constante es una circunferencia.

Demostración:



- Sean los puntos móviles: P_1, P_2 y P_3 entonces:

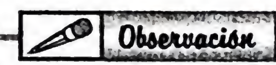
$$(AP_1)^2+(P_1B)^2=(AP_2)^2+(P_2B)^2=$$
$$=(AP_3)^2+(P_3B)^2=cte$$

- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$2x^2+\frac{(AB)^2}{2}=2y^2+\frac{(AB)^2}{2}=2z^2+\frac{(AB)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=y=z$$

- Es decir los puntos P_1, P_2 y P_3 equidistan del punto medio de $\overline{AB}$, por lo tanto están sobre una circunferencia.



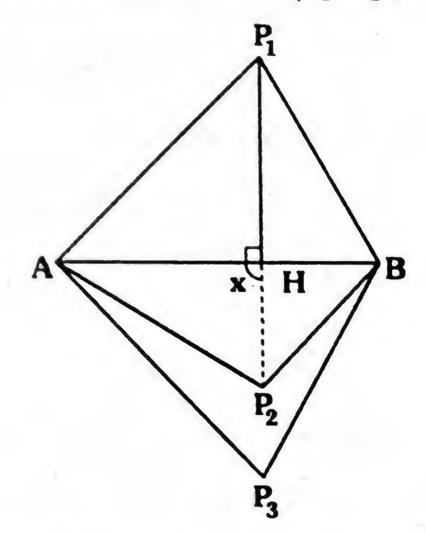
El lugar geométrico de los puntos del espacio, tal que $(AP)^2+(PB)^2$ es constante es una superficie esférica, cuyo centro es el punto medio de $\overline{AB}$.

Caso 2

En un plano se considera el segmento AB fijo y un punto P móvil, el lugar geométrico de P tal que $(PA)^2-(PB)^2$ es constante es una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

Demostración:

- Análogo al anterior, consideremos puntos con tal condición (P_1, P_2 y P_3).



$$(AP_1)^2-(BP_1)^2=(AP_2)^2-(BP_2)^2=$$
$$=(AP_3)^2-(BP_3)^2=cte$$

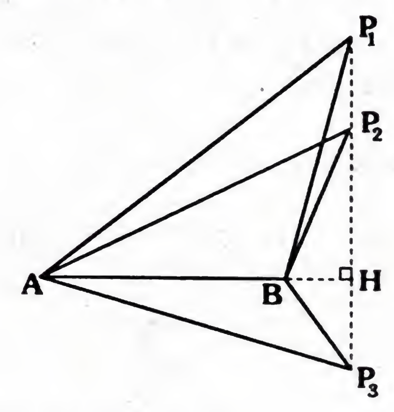
- En el ΔAP_1B, se traza la altura P_1H, por teorema de las proyecciones:

$$\underbrace{(AP_1)^2-(BP_1)^2}_{(AP_2)^2-(BP_2)^2}=(AH)^2-(HB)^2$$

- En el ΔAP_2B, por recíproco del teorema de las proyecciones: $x=90°$.
- Análogo en ΔAP_3B, se tendrá:

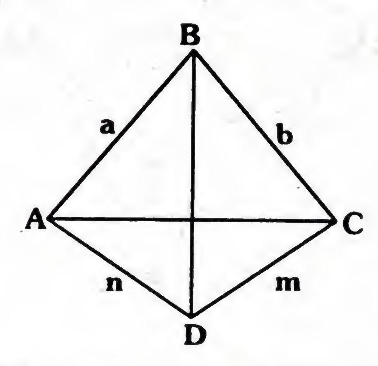
$m\measuredangle AHP_3=90° \Rightarrow P_1$, P_2 y P_3 estan sobre una recta perpendicular a $\overline{AB}$ en H.

- *El punto H no necesitariamente está en* $\overline{AB}$.



- *En el gráfico, si:*

$$a^2+m^2=b^2+n^2 \Rightarrow \overline{AC}\perp\overline{BD}$$



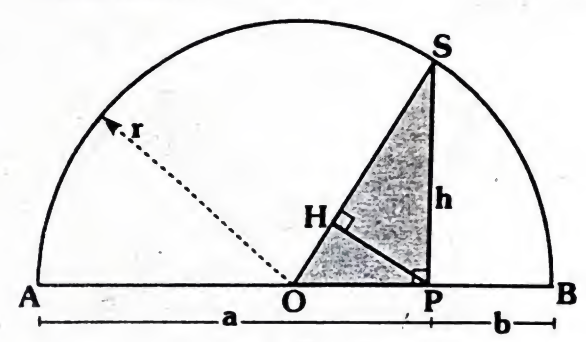
- *El lugar geométrico de los puntos del espacio talque* $(AP)^2-(PB)^2$ *es constante, es un plano perpendicular al segmento.*

Caso 3

Dados dos segmentos, construir las medias aritmética, geométrica, armónica y cuadrática.

Solución

- Sean las longitudes de los segmentos "a" y "b" (se $a\geq b$, sin pérdida de generalidad).



- Ubiquemos O el punto medio de $\overline{AB}$.

$$\Rightarrow AO=OB=r=\frac{a+b}{2}$$

(r: *representa la media aritmética de* a y b)

- Al trazar la semicircunferencia de diámetro AB y $\overline{PS}\perp\overline{AB} \Rightarrow h^2=ab \Rightarrow h=\sqrt{ab}$, "h" representa la media geométrica de a y b.
- En $\triangle OPS$: $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ... (I)
- La igualdad se cumple O=P, cuando es decir a=b.
- En $\triangle OPS$:

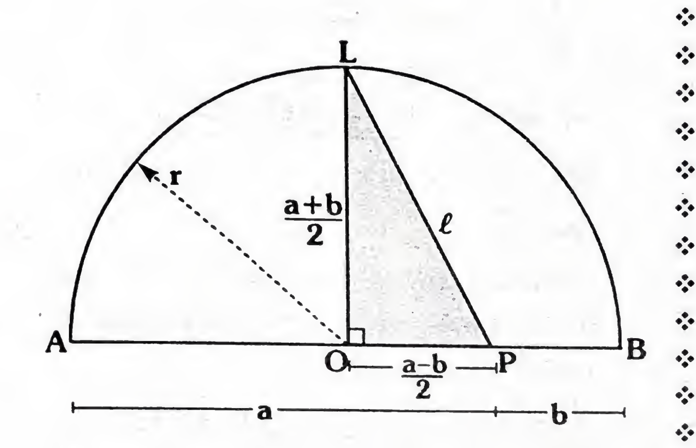
$$\underbrace{h^2}_{ab}=(HS)\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow HS=\frac{2ab}{a+b}$$

- Es decir "HS" representa la media armónica de a y b. En $\triangle PHS$.

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab} \qquad \text{... (II)}$$

- Cuando O=P⇒O coincide con H, es decir a=b.
- De (I) y (II):

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad \dots \text{(III)}$$



- En ⊿LOP: $\ell^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad \ell = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

- Luego:

$$\frac{a+b}{2} \le \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \dots \text{(IV)}$$

- De (III) y (IV):

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

- Este resultado se conoce como teorema de las medias para dos variables.
- Puede quedar así:

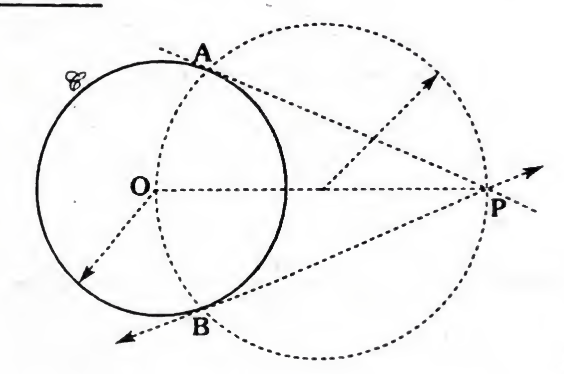
Sea $a, b \in \mathbb{R}^+ / b \le a$

$$\mathbf{b \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le a}$$

Caso 4

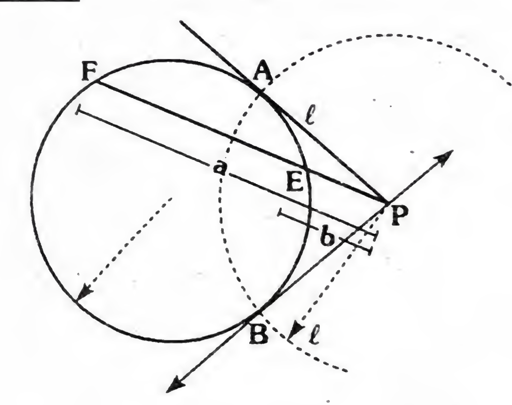
Dado un punto exterior a una circunferencia, trazar la tangente desde ese punto.

Método 1:



- Dados 𝒞 y P; con diámetro $\overline{OP}$ se traza la semicircunferencia, los puntos de intersección son los puntos de tangencia (A y B). Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$.

Método 2:



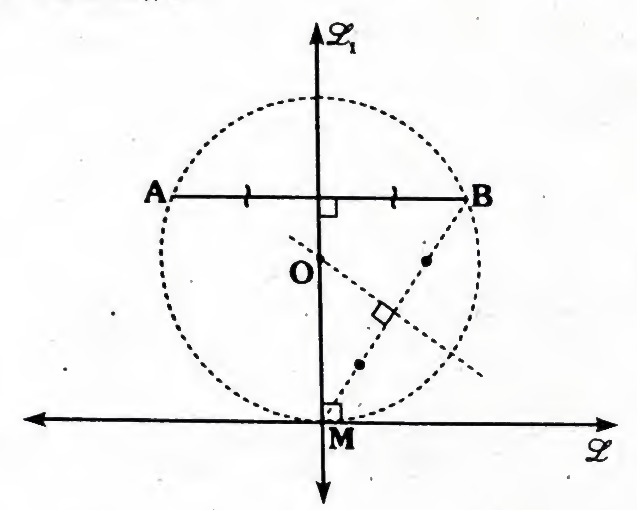
- Trazamos la secante PEF y obtenemos la media geométrica de PE y PF $(\ell^2 = ab)$. Con centro P y radio ℓ, se traza el arco, los puntos A y B son los puntos de tangencia.

Caso 5

Dados dos puntos (fijos) ubicados en un mismo semiplano respecto a una recta fija, trazar una circunferencia tangente a dicha recta y que pase por los puntos fijos.

PRIMERA POSIBILIDAD:

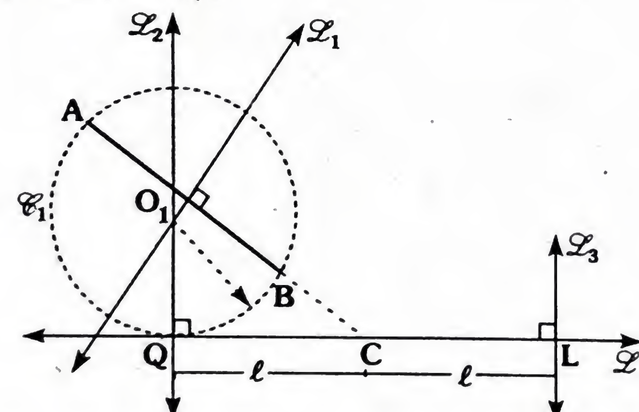
* Si $\overline{AB} // \vec{\mathscr{L}}$



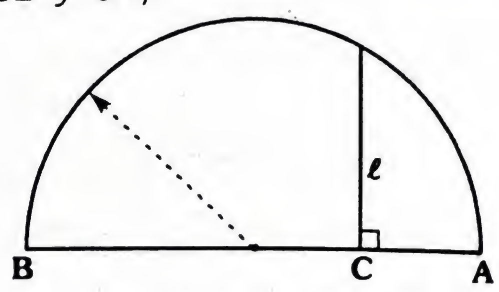
- Se traza la mediatriz ($\vec{\mathscr{L}}_1$) de $\overline{AB}$, la cual corta a $\overline{AB}$ en M.
- Se traza la mediatriz de $\overline{MB}$ la cual corta a $\vec{\mathscr{L}}_1$ en O.
- O es el centro de la circunferencia pedida.

SEGUNDA POSIBILIDAD:

* Si $\overline{AB} \not\parallel \vec{\mathscr{L}}$



- Sea C el punto de intersección de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.
- $\vec{\mathscr{L}}_1$ es la mediatriz de $\overline{AB}$, allí se ubi-ca el centro de la circunferencia pedida.
- Hallemos la media geométrica CB y CA (Sea ℓ la media geométrica de CB y CA):



- Se sabe : $\ell^2 = (BC)(BA)$
- Ubicamos Q y L en $\vec{\mathscr{L}}$ tal que: $QC = CL = \ell$
- Se trazan las rectas $\vec{\mathscr{L}}_2$ y $\vec{\mathscr{L}}_3$ perpendiculares a $\vec{\mathscr{L}}$ en Q y L respectivamente.

  $\{O_1\} = \vec{\mathscr{L}}_1 \cap \vec{\mathscr{L}}_2$ y $\{O_2\} = \vec{\mathscr{L}}_1 \cap \vec{\mathscr{L}}_3$

  O_1 es centro de $\mathscr{C}_1$, es una de las circunferencias pedidas.

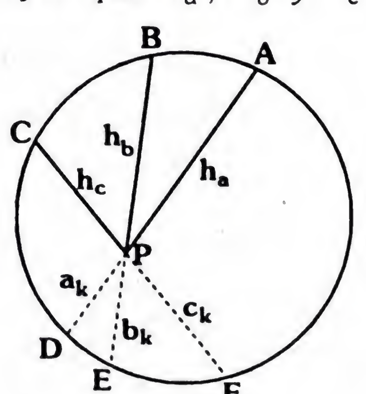
  O_2 es centro de la otra circunferencia (no se muestra en el gráfico).

Caso 6

Dadas las longitudes de las tres alturas, construir el triángulo.

Solución

Sean h_a, h_b y h_c dichas longitudes y como las longitudes de los lados son inversamente proporcionales a las alturas, se traza una circunferencia cuyo diámetro sea mayor que h_a, h_b y h_c.

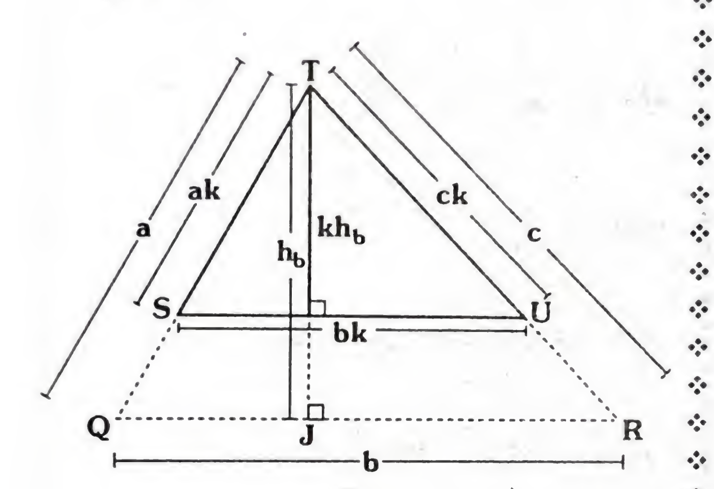


- Por teorema de las cuerdas:

$$(PD)h_a=(PE)h_b=(PF)h_c$$

$\Rightarrow$ PD, PE y PF son proporcionales a las longitudes de los lados "a", "b" y "c" respectivamente.

- Se construye el triángulo con PD, DE y PF:



- El ΔSTU es semejante al triángulo pedido.

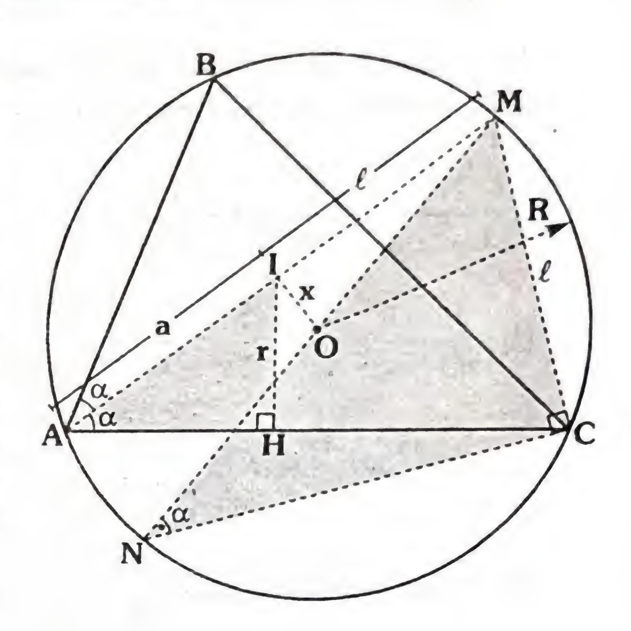
- Se traza la altura $(\overline{TL})$ relativa al lado que mide bk, la cual mide kh_b. Se ubica "J" en $\overleftrightarrow{TL}$ J tal que $JT=h_b$ desde J se traza la paralela a $\overline{SU}$ entonces el ΔQTR es el triángulo pedido.

TEOREMA DE EULER

Otro de los teoremas importantes de Euler, es el siguiente:

- En todo triángulo el cuadrado de la distancia del incentro al circuncentro es igual a la diferencia entre el cuadrado del circunradio y el doble del producto del inradio y circunradio.

Demostración:



- Sea I el incentro del ΔABC y "r" es su inradio.

- Por teorema de puntos notables, MI=MC.

- Por teorema de las cuerdas:

$$R^2-x^2=a\ell \qquad \dots \text{(I)}$$

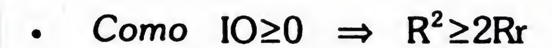
- $\triangle AHI \sim \triangle NCM$

$$\frac{r}{a}=\frac{\ell}{2R} \Rightarrow 2Rr=a\ell \qquad \dots \text{(II)}$$

- En (I):

$$R^2-x^2=2Rr$$

$$\therefore\ x^2=R^2-2Rr$$



- *Como* $IO \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq 2Rr$

$\therefore$ $R \geq 2r$ *Desigualdad de Euler*

- *La igualdad se cumple en el triángulo equilátero.*
- *Hay todo un estudio sobre esta desigualdad, a continuación se da algunas de desigualdades que se relacionan con la desigualdad de Euler:*

i) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$

ii) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac} \geq \dfrac{1}{R^2}$

iii) $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\operatorname{sen}C \leq \dfrac{1}{8}$

iv) $\cos A+\cos B+\cos C \leq \dfrac{3}{2}$

v) $\operatorname{sen}^2\dfrac{A}{2}+\operatorname{sen}^2\dfrac{B}{2}+\operatorname{sen}^2\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{3}{4}$

vi) $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c} \geq \dfrac{2}{R}$

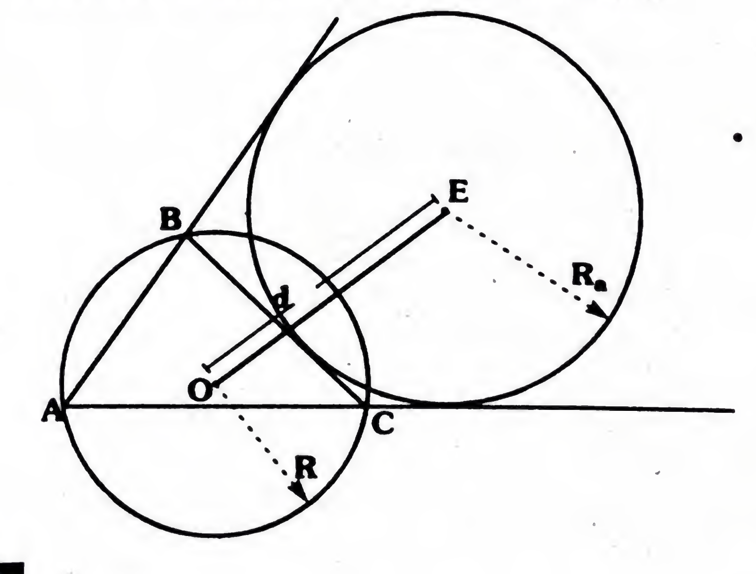
vii) $\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c} \geq \dfrac{2}{R}$

viii) $9r \leq R_a+R_b+R_c \leq \dfrac{9}{2}R$

ix) $9r \leq h_a+h_b+h_c \leq \dfrac{9}{2}R$

x) $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{C-A}{2}\right) \geq \dfrac{2r}{R}$

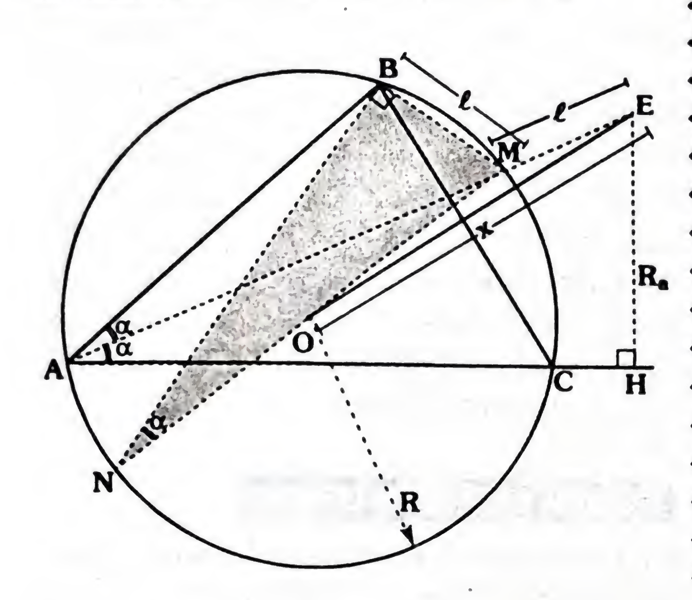
- En todo triángulo, el cuadrado de la distancia del circuncentro al excentro es igual a la suma del cuadrado del circunradio con el doble del producto del exradio (asociado al excentro) con el cincunradio.



- En el gráfico, se cumple:

$d^2=R^2+2RR_a$

Demostración:



- Por teorema de la secante:

$$\ell(EA)=x^2-R^2 \qquad \dots (I)$$

- Por teorema de puntos notables

$$MB=ME=\ell$$

- $\triangle AEH \sim \triangle NMB$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ell}{2R}=\frac{R_a}{(EA)}$$

$$\Rightarrow \ell(EA)=2RR_a \qquad \dots (II)$$

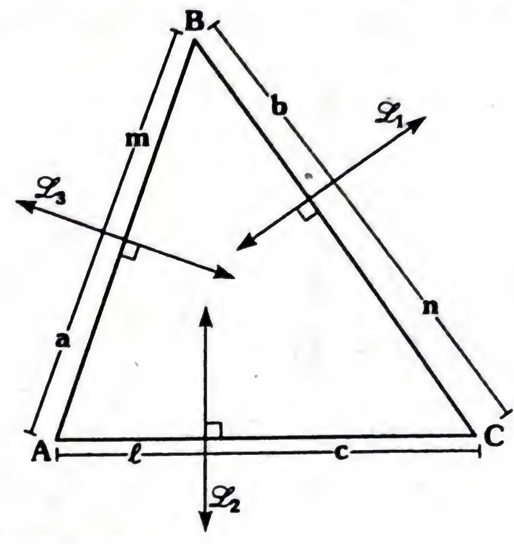
- De (I) y (II):

$$2RR_a=x^2-R^2$$

$$\therefore \quad x^2=R^2+2RR_a$$

TEOREMA DE CARNOT'S

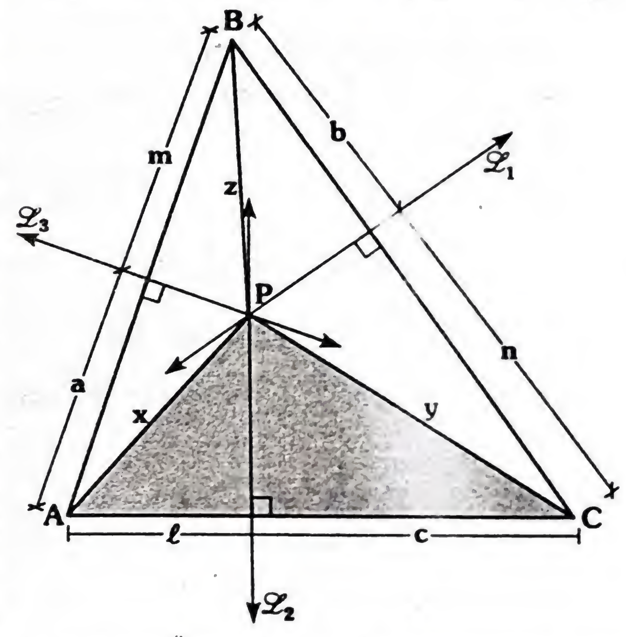
En el gráfico, se cumple:



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=m^2+n^2+\ell^2$

Demostración:

($\Rightarrow$) Demostremos la primera parte. Sean las rectas concurrentes $\overline{\mathscr{L}}_1$, $\overline{\mathscr{L}}_2$, $\overline{\mathscr{L}}_3$.



- Por teorema de las proyecciones, en:

$$\Delta APC: \; y^2-x^2=c^2-\ell^2 \qquad \dots (I)$$

$$\Delta BPC: \; z^2-y^2=b^2-n^2 \qquad \dots (II)$$

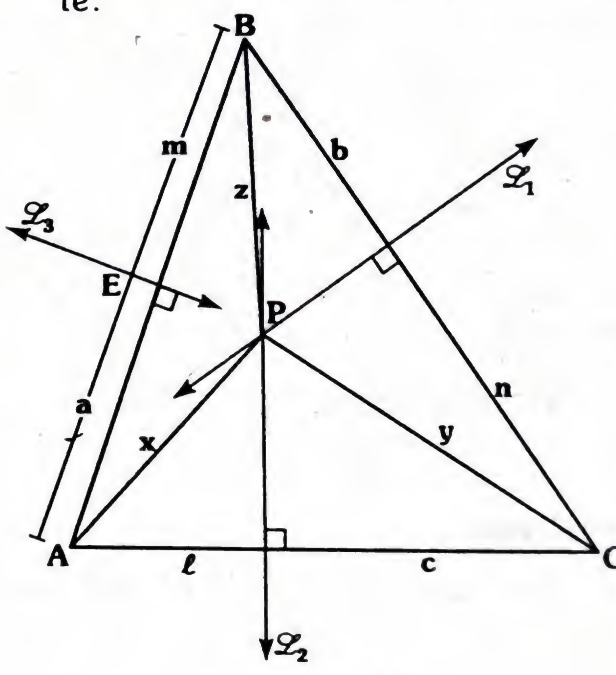
$$\Delta BPA: \; x^2-z^2=a^2-m^2 \qquad \dots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$0=a^2+b^2+c^2-(m^2+n^2+\ell^2)$$

$$\therefore \; a^2+b^2+c^2=m^2+n^2+\ell^2$$

(⇐) Demostremos ahora la segunda parte.



- Consideremos sólo las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, sea $\mathscr{L}_3$ una recta perpendicular a $\overline{AB}$ en E.
- Es condición:

$$a^2+b^2+c^2=m^2+n^2+\ell^2$$

$$\Rightarrow\ b^2+c^2-(n^2+\ell^2)=m^2-a^2$$

- Por teorema de las proyecciones, en:

ΔBPC: $z^2-y^2=b^2-n^2$ ... (I)

ΔCPA: $y^2-x^2=c^2-\ell^2$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

$$z^2-x^2=\underbrace{b^2+c^2-(n^2+\ell^2)}_{m^2-a^2}$$

- En ΔAPB ; como $z^2-x^2=m^2-a^2$ por recíproco del teorema de las proyecciones: $m\measuredangle PEA=90^\circ$ entonces la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ pasa por E y P.

$\therefore\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren.

TEMAS SELECTOS

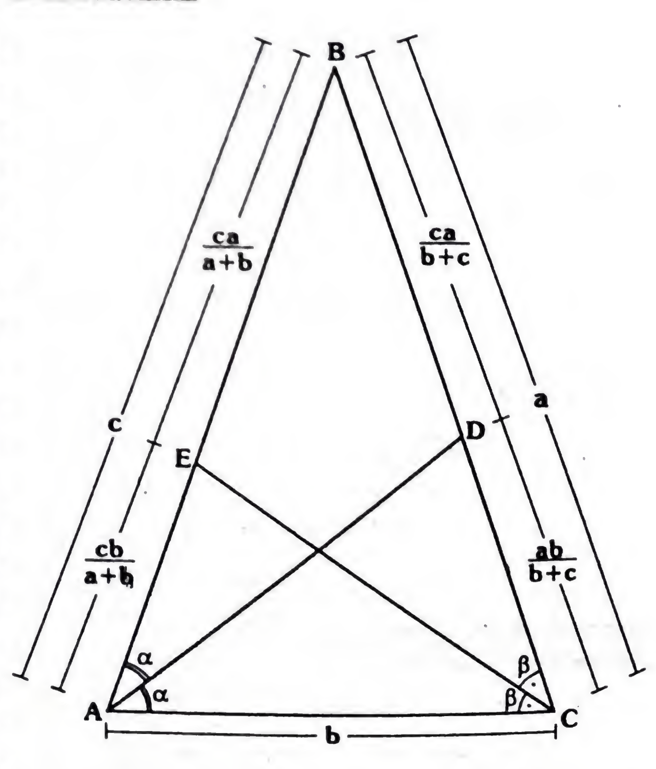
El conjunto de teoremas aquí presentados (es cierto que no son motivo de preguntas de examen de admisión) son demostrados sólo con herramientas de geometría euclideana, sus aplicaciones las encontramos generalmente en problemas de concursos de matemática, nacionales e internacionales, también son mótivo de investigación en foros y revistas matemáticas.

TEOREMA DE STEINER-LEHMUS

Este teorema fue propuesto por primera vez en 1 840 por Lehmus.

"Si dos bisectrices interiores son congruentes, entonces el triángulo es isósceles".

Demostración:



- Una manera de realizar esta demostración es con circunferencia, pero lo analizaremos con el presente tema.

- Por condición AD=CE.
- Por teorema de la bisectriz (sobre proporciones)

$$BD=\frac{ca}{b+c} \quad ; \quad CD=\frac{ab}{b+c} \quad ; \quad AE=\frac{cb}{a+b} \quad ; \quad y \quad BE=\frac{ca}{a+b}$$

- Por cálculo de la bisectriz: $(AD)^2=bc-\left(\frac{ca}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right)$ ... (I)

$$(CE)^2=ab-\left(\frac{ca}{a+b}\right)\left(\frac{cb}{a+b}\right) \quad \text{... (II)}$$

- Igualando (I) y (II) y ordenando:

$$(a-c)\underbrace{[b(b+c)(a+b)+ac(a+c+2b)]}_{\neq 0}=0$$

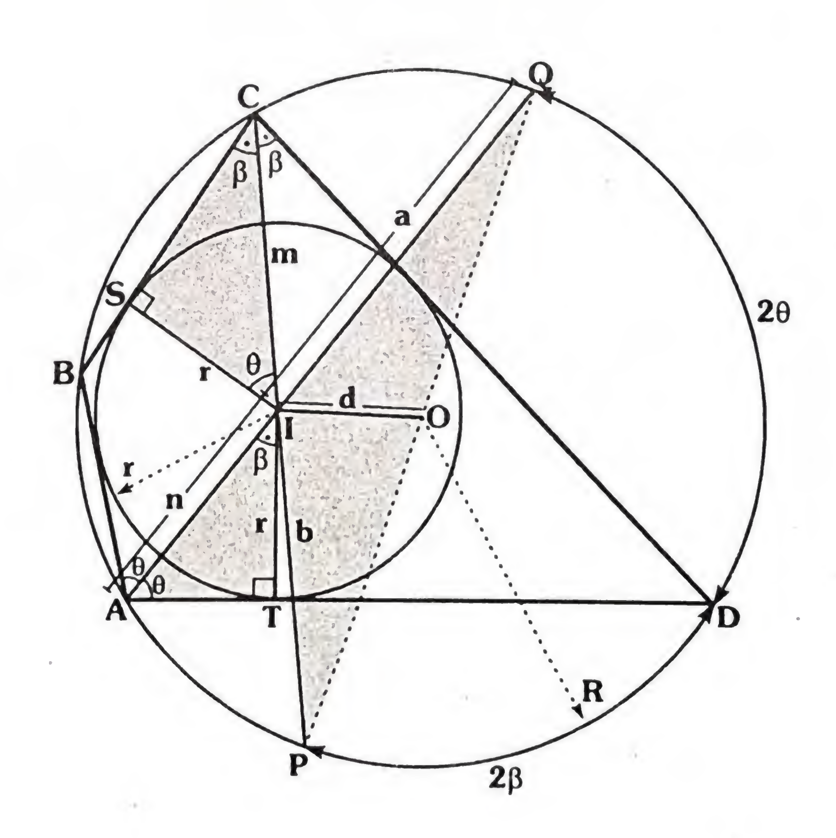
$$\therefore \ a=c$$

TEOREMA DE FUSS

En un cuadrilátero bicéntrico de inradio "r", circunradio "R" y sea "d" la distancia de dichos, centros se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}}$$

Demostración:



- Tenemos que $\overrightarrow{AI}$ y $\overrightarrow{CI}$ es bisectriz de los ángulos BAD y BCD, entonces:

$$2\theta+2\beta=180° \Rightarrow \theta+\beta=90°$$

- También, como $m\widehat{QD}=2\theta$ y

$$m\widehat{PD}=2\beta \Rightarrow m\widehat{PDQ}=180°$$

entonces P, Q y O son colineales, pues $\overline{PQ}$ es diámetro.

- En ΔPIQ, usemos el teorema de la mediana:

$$a^2+b^2=2d^2+\frac{(2R)^2}{2}=2(d^2+R^2) \quad \ldots (I)$$

- Por teorema de las cuerdas:

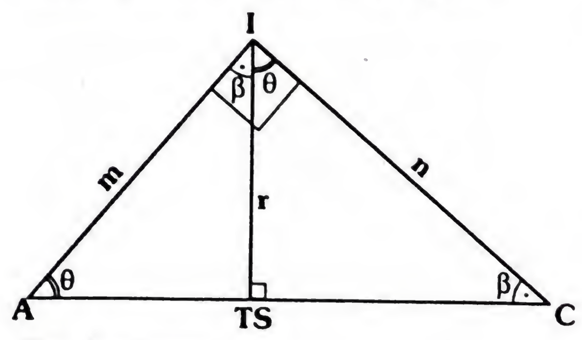
$$an=bm=R^2-d^2$$

$$a=\frac{R^2-d^2}{n} \wedge b=\frac{R^2-d^2}{m} \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$(R^2-d^2)^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)=2(d^2+R^2) \quad \ldots (III)$$

- Ahora con los triángulos ATI y CSI, formamos la siguiente figura:



- Por teorema:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \quad \ldots (IV)$$

- De (III) y (IV):

$$(R^2-d^2)^2\cdot\frac{1}{r^2}=2(d^2+R^2)$$

$$\Rightarrow (R+d)^2(R-d)^2\cdot\frac{1}{r^2}=(R+d)^2+(R-d)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}=\frac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R+d)^2(R-d)^2}$$

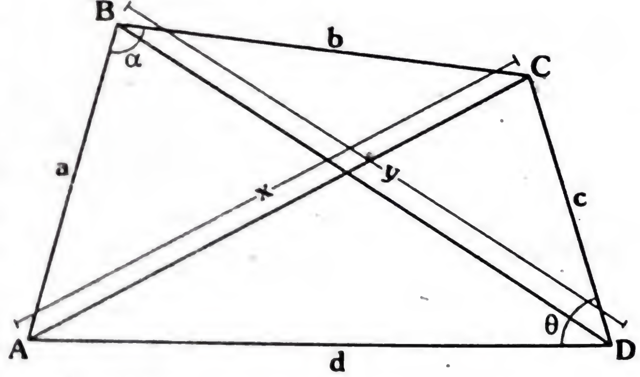
$$\therefore \frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}$$

Nota

La demostración aqui presentada fue desarrollada por el profesor Juan Carlos Salazar. (Revista Iberoamericana de Matemáticas - Nº 13)

TEOREMA DE COSENOS DEL CUADRILÁTERO

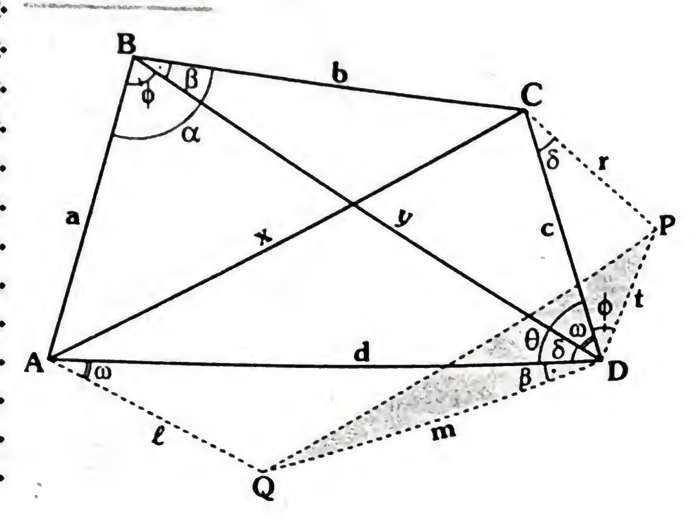
(Teorema de Bretschneider)



En el gráfico, se cumple:

$$(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(\alpha+\theta)=(xy)^2$$

Demostración:



- Se trazan exteriormente al cuadrilátero los triángulos AQD y CPD, tal que:

$m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle CDP$; $m\sphericalangle ADB=m\sphericalangle DCP$; $m\sphericalangle QAD=m\sphericalangle BDC$; $m\sphericalangle ADQ=m\sphericalangle DBC$

$\Rightarrow m\sphericalangle QDP=\alpha+\theta$ y $\overline{AQ}//\overline{CP}$

- Luego: $\Delta ADQ \sim \Delta DBC$ y $\Delta BDA \sim \Delta DCP$

$$\Rightarrow \frac{m}{b}=\frac{\ell}{c}=\frac{d}{y} \Rightarrow \ell=\frac{cd}{y} \wedge m=\frac{bd}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{d}=\frac{t}{a}=\frac{c}{y} \Rightarrow r=\frac{cd}{y} \wedge t=\frac{ac}{y}$$

- Como $\overline{AQ}//\overline{CP}$ y $AQ=CP \Rightarrow ACPQ$ es paralelogramo entonces $QP=x$.

- En ΔQDP, teorema de cosenos: $x^2=\left(\frac{ac}{y}\right)^2+\left(\frac{bd}{y}\right)^2-2\left(\frac{ac}{y}\right)\left(\frac{bd}{y}\right)\cos(\alpha+\theta)$

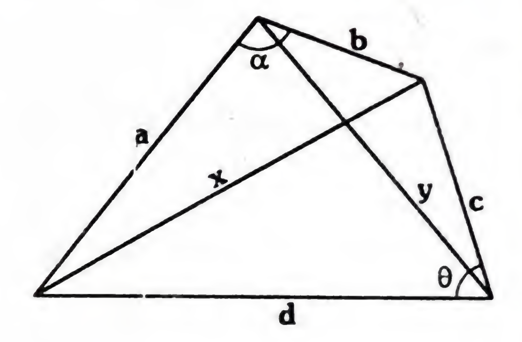
$$\therefore \ (xy)^2=(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(\alpha+\theta)$$

COROLARIO

- Como:

$(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(\alpha+\theta)=(xy)^2$ y

$-1\leq\cos(\alpha+\theta)\leq 1$



- Usando : $\cos(\alpha+\theta)\geq -1$

$$\Rightarrow (ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos(\alpha+\theta)\leq\underbrace{(ac)^2+(bd)^2+2abcd}$$

$$(xy)^2 \leq (ac+bd)^2$$

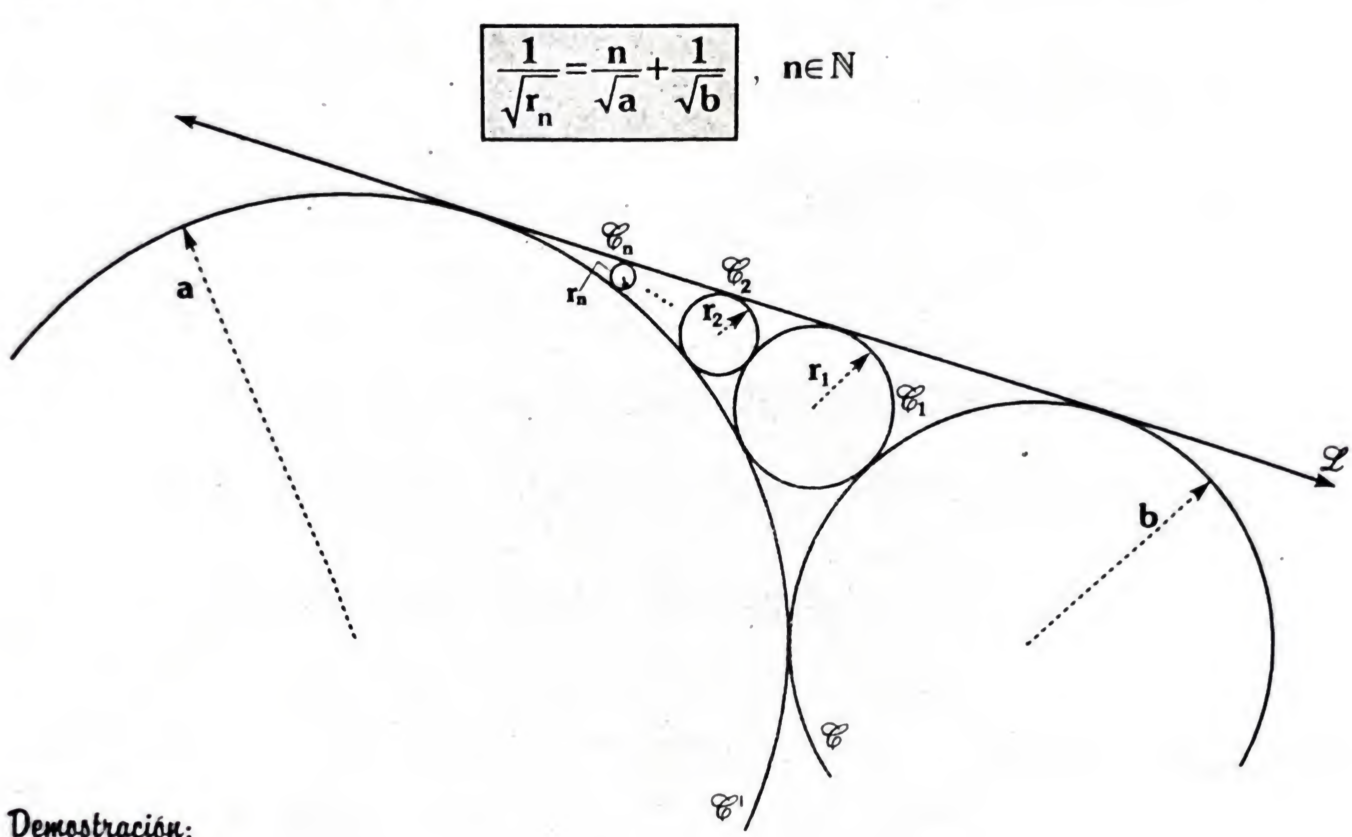
$$\therefore \ xy\leq ac+bd$$

En todo cuadrilátero convexo se cumple que el producto de las longitudes de diagonales es menor o igual que la suma de productos de longitudes de lados opuestos. La igualdad se cumple cuando $\alpha+\theta=180°$.

UNA GENERALIZACIÓN INTERESANTE

En el gráfico, $\mathscr{L}$ es tangente a todas las circunferencias, $\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$; $\mathscr{C}_2$ es tangente a $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}_1$ y así sucesivamente, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{n}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}\ ,\ n\in\mathbb{N}$$



Demostración:

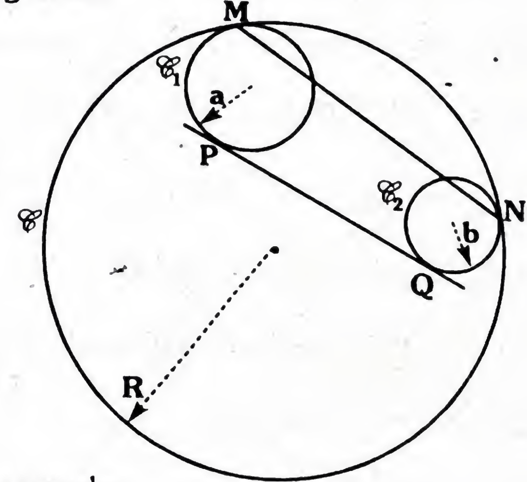
- Usemos el teorema para $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$: $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$
- Para $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}_1$: $\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_1}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$
- Para $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}_2$: $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{r_3}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$
- Y así sucesivamente (*inducimos*): $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=\dfrac{n}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ (*hipótesis inductiva*)
- Demostremos para "n+1".
- Para $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}_{n+1}$: $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ Por hipótesis inductiva $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\dfrac{n+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ con lo cual queda demostrado el teorema $\forall n\in\mathbb{N}$.

Nota

El siguiente grupo de teoremas son previos para realizar una demostración sintética del teorema de Casey y de Soddy.

TEOREMA

En el gráfico, P, Q, M y N son puntos de tangencia.

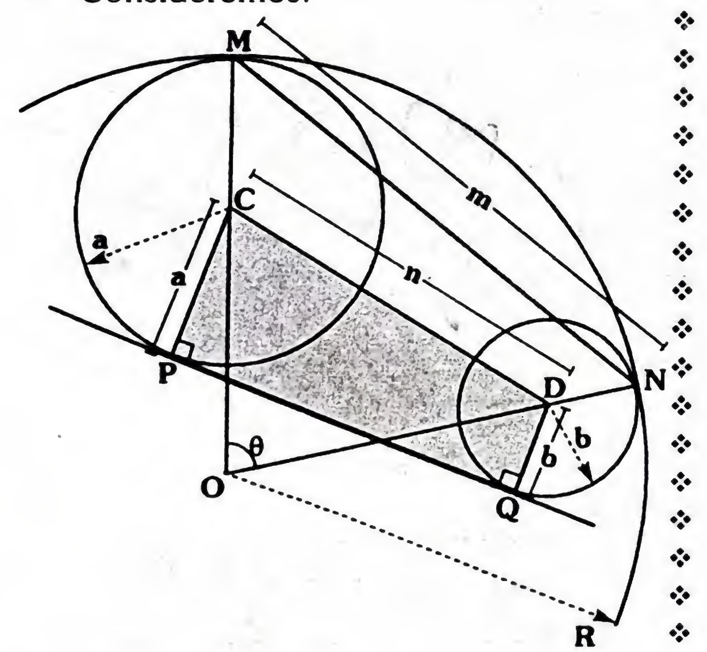


Se cumple:

$$PQ=(MN)\frac{\sqrt{(R-a)(R-b)}}{R}$$

Demostración:

- Notemos que $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias interiores respecto de $\mathscr{C}$ y $\overline{PQ}$ es tangente común exterior de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.
- Consideremos:



- Sea:

$$MN=m\ ,\quad CD=n\ ,\ y\quad PQ=x$$

- En el trapecio CPQD:

$$x^2+(a-b)^2=n^2 \qquad \text{... (I)}$$

- En ΔOCD: teorema de cosenos:

$$n^2=(R-a)^2+(R-b)^2-2(R-a)(R-b)\cos\theta \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$x^2+(a-b)^2=(R-a)^2+(R-b)^2-2(R-a)(R-b)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad x^2=2(R-a)(R-b)(1-\cos\theta) \qquad \text{... (III)}$$

- En ΔNMO por teorema de cosenos:

$$m^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad m^2=2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad 1-\cos\theta=\frac{m^2}{2R^2} \qquad \text{... (IV)}$$

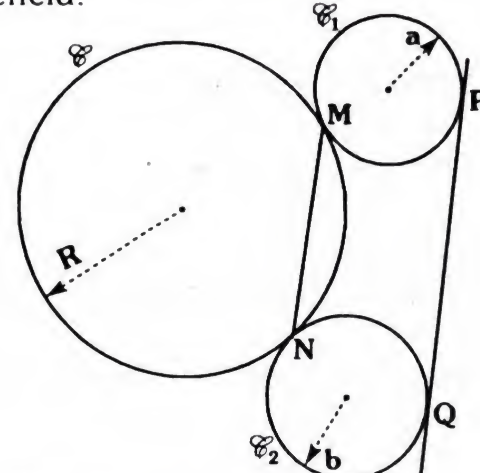
- De (III) y (IV):

$$x^2=2(R-a)(R-b)\frac{m^2}{2R^2}$$

$$\therefore \quad x=m\frac{\sqrt{(R-a)(R-b)}}{R}$$

TEOREMA

En el gráfico, P, Q, M y N son puntos de tangencia.

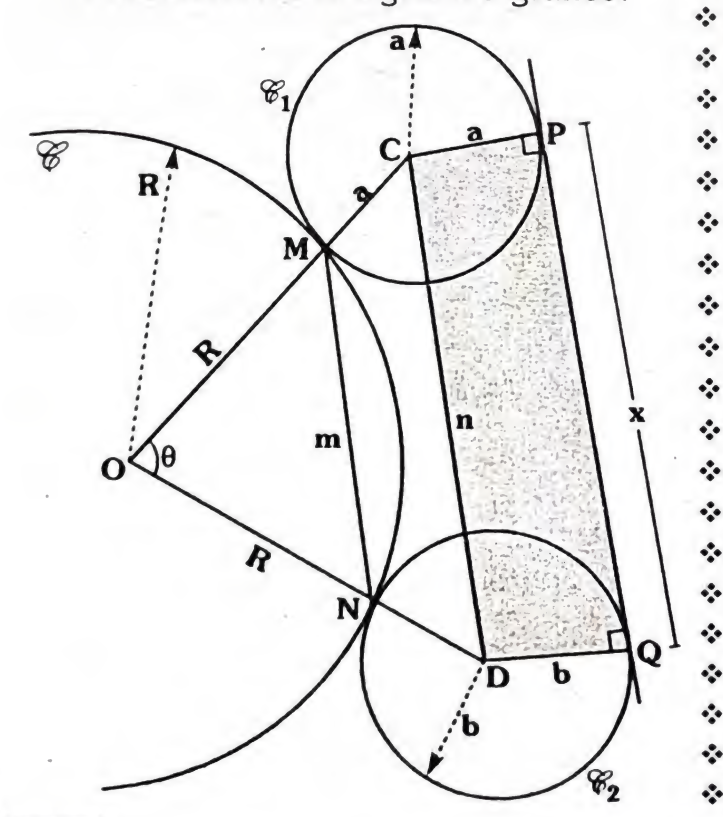


Se cumple:

$$PQ=(MN)\frac{\sqrt{(R+a)(R+b)}}{R}$$

Demostración:

- En este caso $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes exteriores respecto a $\mathscr{C}$ y $\overline{PQ}$ es **tangente común exterior** de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ consideremos el siguiente gráfico:



- Sea PQ=x, CD=n y MN=m
- En el trapecio CPQD:

$$n^2=x^2+(b-a)^2 \qquad \text{... (I)}$$

- En ΔOCD, por teorema de cosenos:

$$n^2=(R+a)^2+(R+b)^2-2(R+a)(R+b)\cos\theta \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$x^2=2(R+a)(R+b)(1-\cos\theta) \qquad \text{... (III)}$$

- En ΔOMN, por teorema de cosenos:

$$m^2=R^2+R^2-2RR\cos\theta$$

$$m^2=2R^2(1-\cos\theta) \Rightarrow 1-\cos\theta=\frac{m^2}{2R^2} \qquad \text{... (IV)}$$

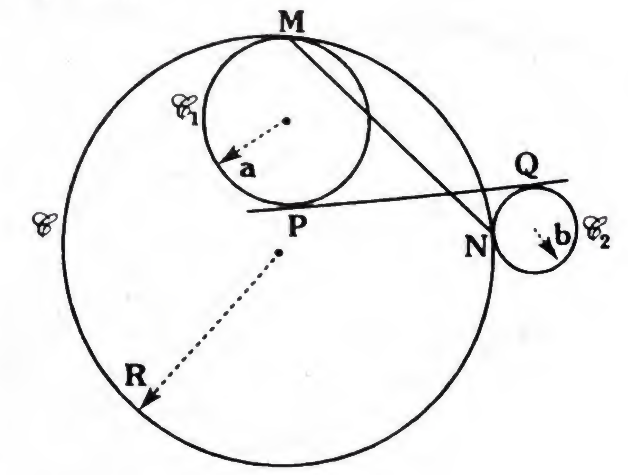
- De (III) y (IV):

$$x^2=2(R+a)(R+b)\frac{m^2}{2R^2}$$

$$\therefore\ x=\frac{m\sqrt{(R+a)(R+b)}}{R}$$

TEOREMA

En el gráfico, P, Q, M y N son puntos de tangencia.

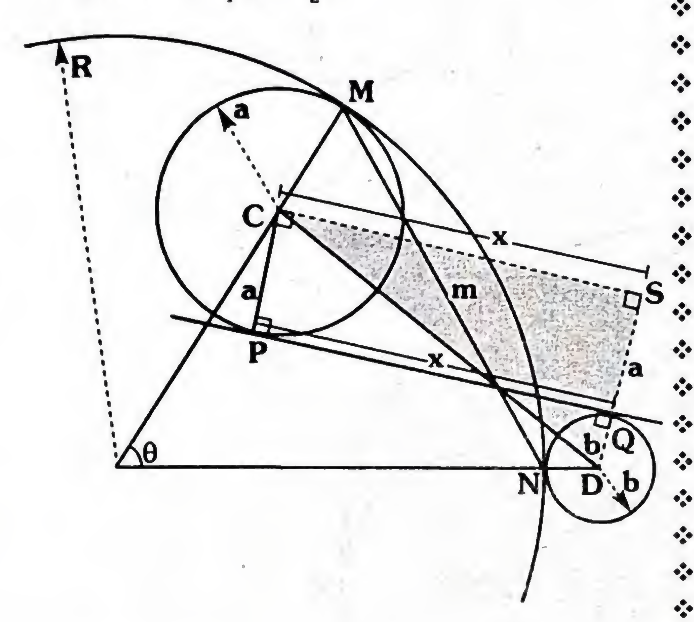


Se cumple:

$$PQ=(MN)\frac{\sqrt{(R-a)(R+b)}}{R}$$

Demostración:

- En este caso $\mathscr{C}_1$ es tangente interior a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_2$ es tangente exterior a $\mathscr{C}$, notar que $\overline{PQ}$ es tangente interior común a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.



- Sea:

$$MN=m, \quad PQ=x, \quad y \quad CD=n$$

- Prolongamos $\overline{DQ}$ y se traza $\overline{CS}\perp\overleftrightarrow{DQ}$.
- PCSQ: rectángulo $\Rightarrow$ CS=x
- En ⊿CSD: Teorema de Pitágoras:

$$n^2=x^2+(a+b)^2 \qquad \dots \text{(I)}$$

- En ΔOCD: Teorema de Cosenos:

$$n^2=(R-a)^2+(R+b^2)-2(R-a)(R+b)\cos\theta \qquad \dots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$x^2+(a+b)^2=(R-a)^2+(R+b)^2-2(R-a)(R+b)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ x^2=2(R-a)(R+b)(1-\cos\theta) \qquad \dots \text{(III)}$$

- En ΔOMN: Teorema de cosenos:

$$m^2=R^2+R^2-2RR\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ \frac{m^2}{2R^2}=1-\cos\theta \qquad \dots \text{(IV)}$$

- De (IV) y (III):

$$x^2=2(R-a)(R+b)\frac{m^2}{2R^2}$$

$$\therefore \ x=\frac{m\sqrt{(R-a)(R+b)}}{R}$$

Observación

- *Verificar que en este último caso, los segmentos $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PQ}$ son concurrentes, aunque para la prueba no es necesario.*
- *En general, dada una circunferencia de radio R, otras dos tangentes a la primera de radios "a" y "b" el segmento tangente exterior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ambas tangentes exteriores o interiores a $\mathscr{C}$ y el segmento tangente interior a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es una tangente interior y el otro tangente exterior, se calcula así:*

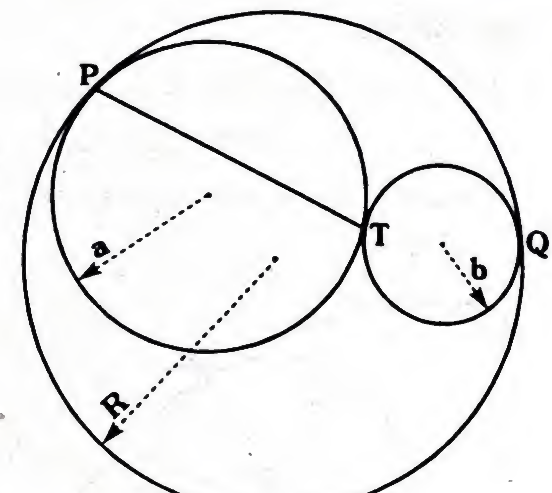
$$\frac{(MN)\sqrt{(R\pm a)(R\pm b)}}{R}$$

- *Donde MN es el segmento que une los puntos de tangencia de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ con $\mathscr{C}$, los signos "+" ó "−" se usan si son exteriores o interiores respectivamente.*

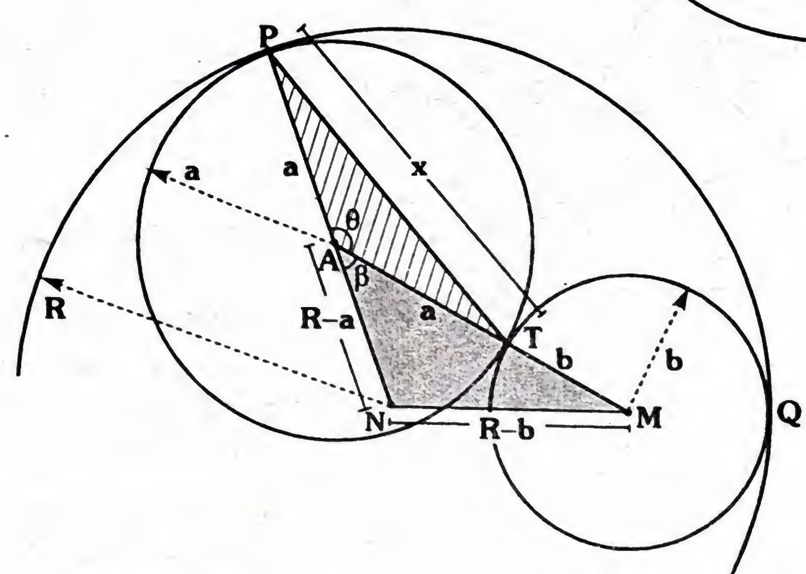
TEOREMA

En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia, se cumple:

$$PT=2a\sqrt{\frac{bR}{(R-a)(a+b)}}$$



Demostración:



- Notamos: $\theta+\beta=180° \Rightarrow \cos\theta=-\cos\beta$
- Apliquemos el teorema de cosenos en:

$$\Delta APT:\ x^2=a^2+a^2-2a^2\cos\theta \qquad \text{... (I)}$$

$$\Delta ANM:\ (R-b)^2=(R-a)^2+(a+b)^2-2(R-a)(a+b)\cos\beta \qquad \text{... (II)}$$

- De (I): $\cos\theta=\dfrac{(2a^2-x^2)}{2a^2}$
- De (II): $(R-b)^2=(R-a)^2+(a+b)^2+2(R-a)(a+b)\dfrac{(2a^2-x^2)}{2a^2}$
- Simplificando: $x^2=\dfrac{4a^2bR}{(R-a)(a+b)}$

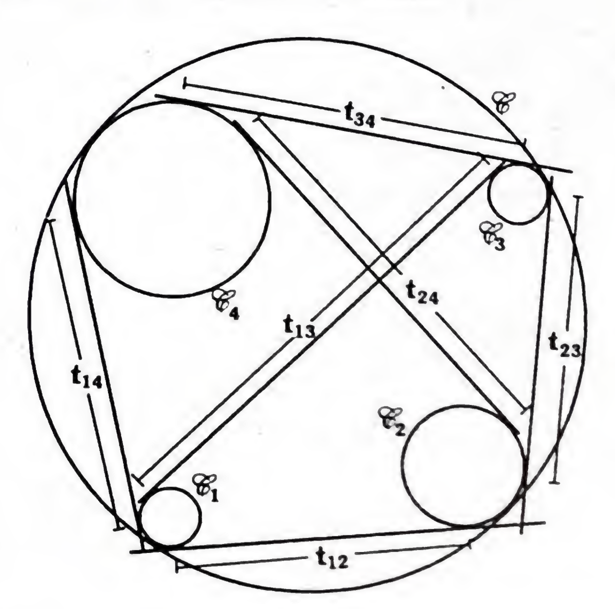
$$\therefore\ x=2a\sqrt{\frac{bR}{(R-a)(a+b)}}$$

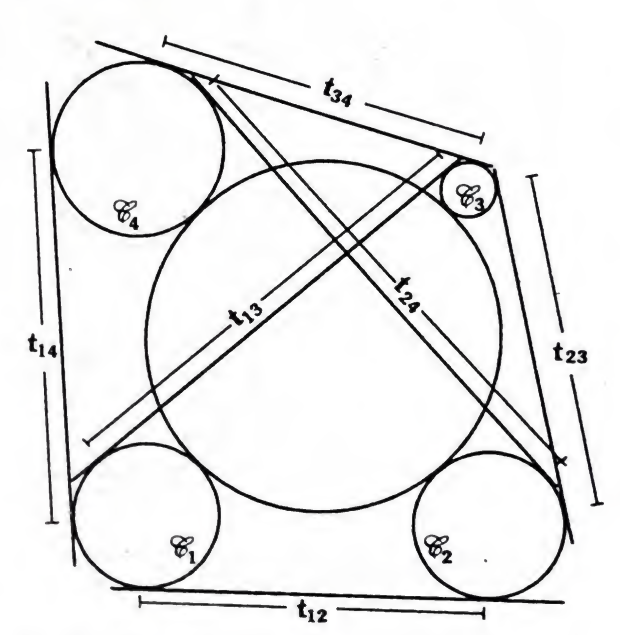
TEOREMA DE CASEY

Sean $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ tangentes a una misma circunferencia y t_{ij} son las longitudes de las tangentes comunes exteriores $\mathscr{C}_i$ y $\mathscr{C}_j$, entonces se cumple:

$$(t_{12})(t_{34})+(t_{23})(t_{14})=(t_{13})(t_{24})$$

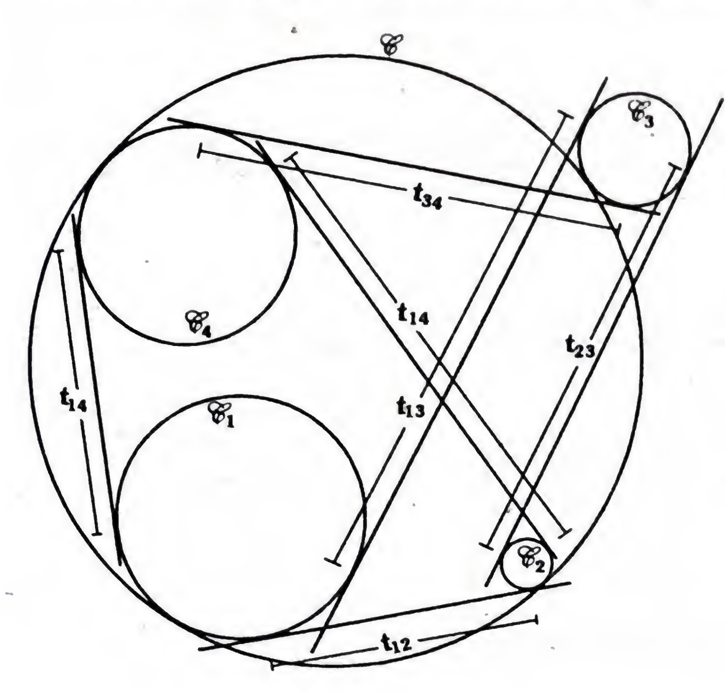
Veamos los siguientes casos:





El teorema se cumple aún asi si cualquiera de los $\mathscr{C}_i$ son puntuales (radio cero), en estos dos casos vemos que todos los $\mathscr{C}_i$ son interiores o en el segundo todas exteriores.

Veamos ahora que sucede cuando algunas son interiores y otras exteriores.



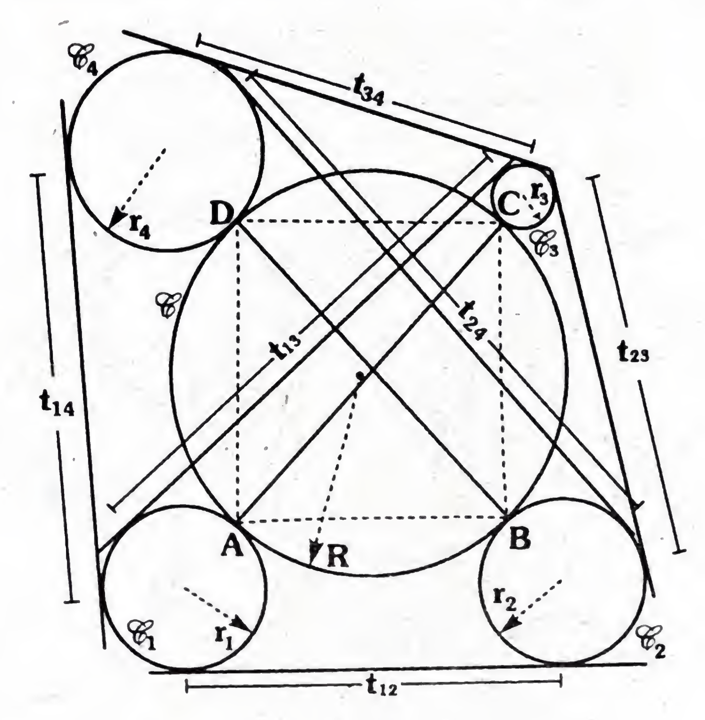
Se cumple:

$$(t_{12})(t_{34})+(t_{23})(t_{14})=(t_{13})(t_{24})$$

Notemos cuando una circunferencia $(\mathscr{C}_i)$ es tangente interior a $\mathscr{C}$ y otra $(\mathscr{C}_j)$ tangente exterior, se toma el tangente (t_{ij}) interior a $\mathscr{C}_i$ y $\mathscr{C}_j$.

Demostración:

- Cualquiera de los casos se demuestra en forma análoga con los teoremas previos, demostremos el caso (2).



- Usemos el teorema (Pág. 68):

$$t_{12}=\frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)} \qquad t_{34}=\frac{CD}{R}\sqrt{(R+r_3)(R+r_4)}$$

$$t_{14}=\frac{AD}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_4)} \qquad t_{23}=\frac{BC}{R}\sqrt{(R+r_2)(R+r_3)}$$

$$\Rightarrow(t_{12})(t_{34})+(t_{14})(t_{23})=\frac{(AB)(CD)}{R^2}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)(R+r_3)(R+r_4)}+\frac{(AD)(BC)}{R^2}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)(R+r_3)(R+r_4)}$$

$$=\frac{\overbrace{[(AB)(CD)+(AD)(BC)]}^{(AC)(BD)}}{R^2}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)(R+r_3)(R+r_4)}$$

$$=\underbrace{\frac{AC}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_3)}}_{t_{13}}\underbrace{\frac{BD}{R}\sqrt{(R+r_2)(R+r_4)}}_{t_{24}}$$

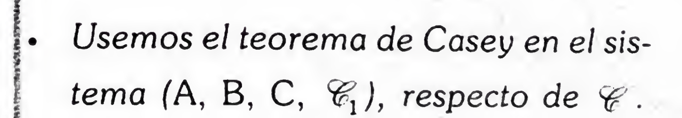
$$\therefore\ (t_{12})(t_{34})+(t_{14})(t_{23})=(t_{13})(t_{24})$$

Observación

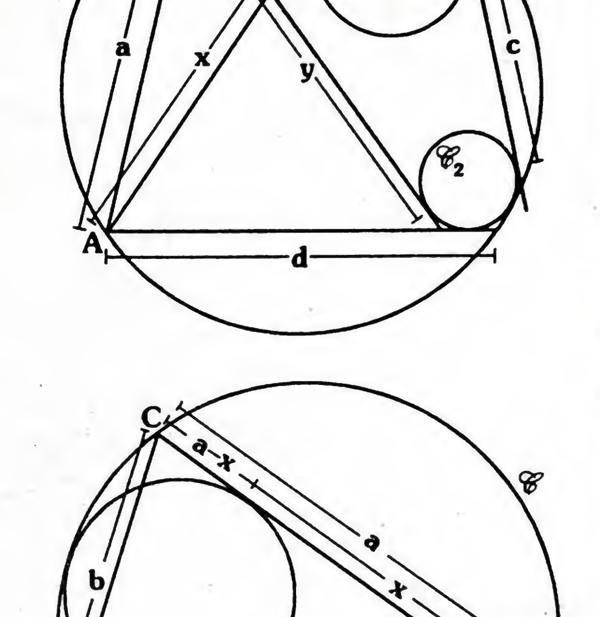
- *Ahora veamos algunos casos particulares del Teorema de Casey.*

  En el sistema (A, B, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$)

  $$xy=ac+bd$$

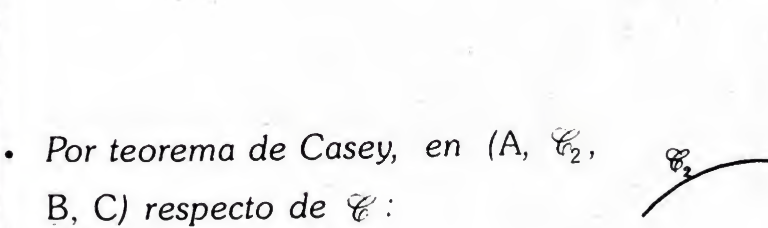


- *Usemos el teorema de Casey en el sistema* (A, B, C, $\mathscr{C}_1$), *respecto de* $\mathscr{C}$.



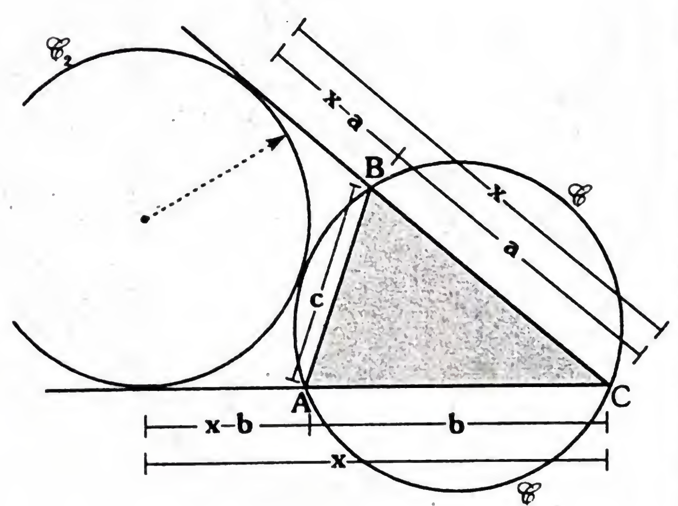
$$bx=a(c-x)+c(a-x) \Rightarrow x=\frac{2ac}{a+b+c}$$

Si : $p=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{ac}{p}}$



- *Por teorema de Casey, en* (A, $\mathscr{C}_2$, B, C) *respecto de* $\mathscr{C}$:

  $$cx=a(x-b)+b(x-a)$$



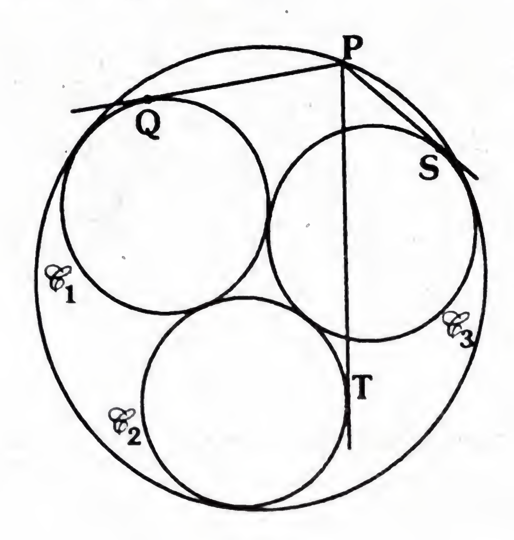
$$\Rightarrow x=\frac{2ab}{a+b-c}$$

Si: $p=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{ab}{p-c}}$

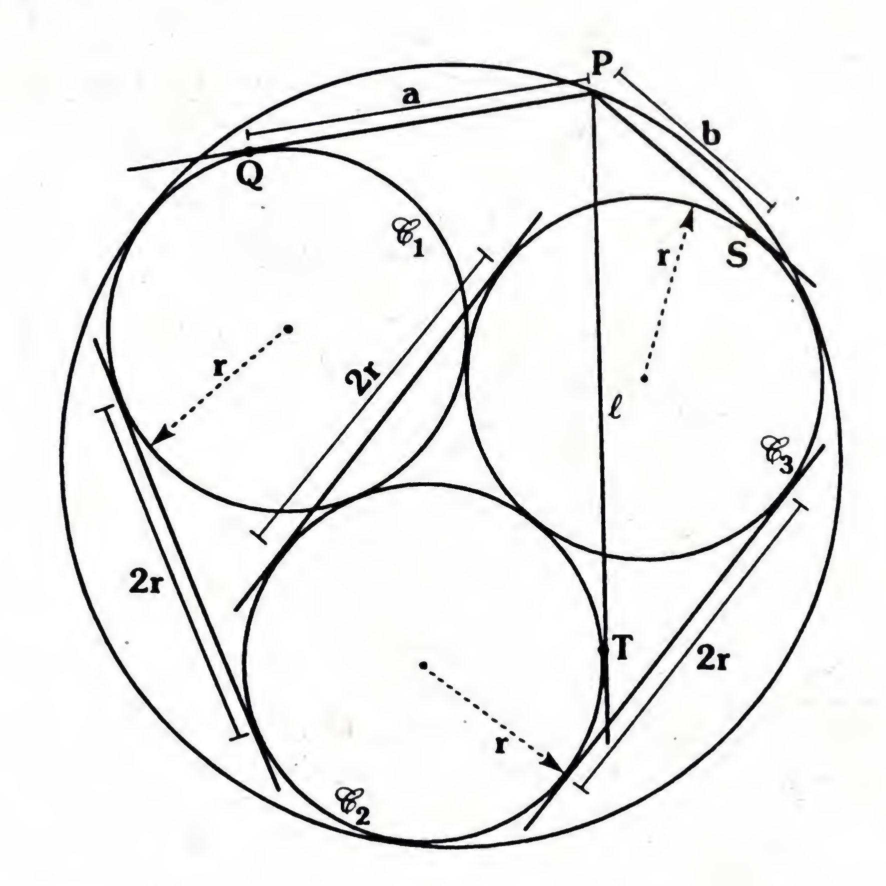
APLICACIÓN

Veamos un ejercicio relacionado con el teorema de Casey.

- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son circunferencias congruentes y tangentes dos a dos y tangentes a $\mathscr{C}$. Se cumple: PQ + PS = PT



Prueba:



Por teorema de Casey en (P, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$):

$$a2r + b2r = \ell 2r$$

$$\therefore\ a+b=\ell$$

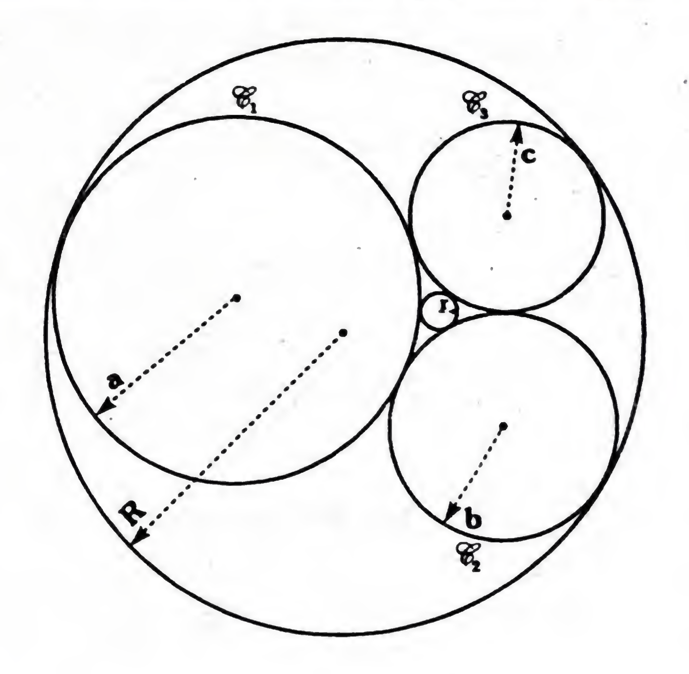
TEOREMA DE SODDY

Dadas $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ tangentes exteriores dos a dos, cuyos radios son a, b y c respectivamente.

Los radios de las circunferencias tangentes se calcula mediante:

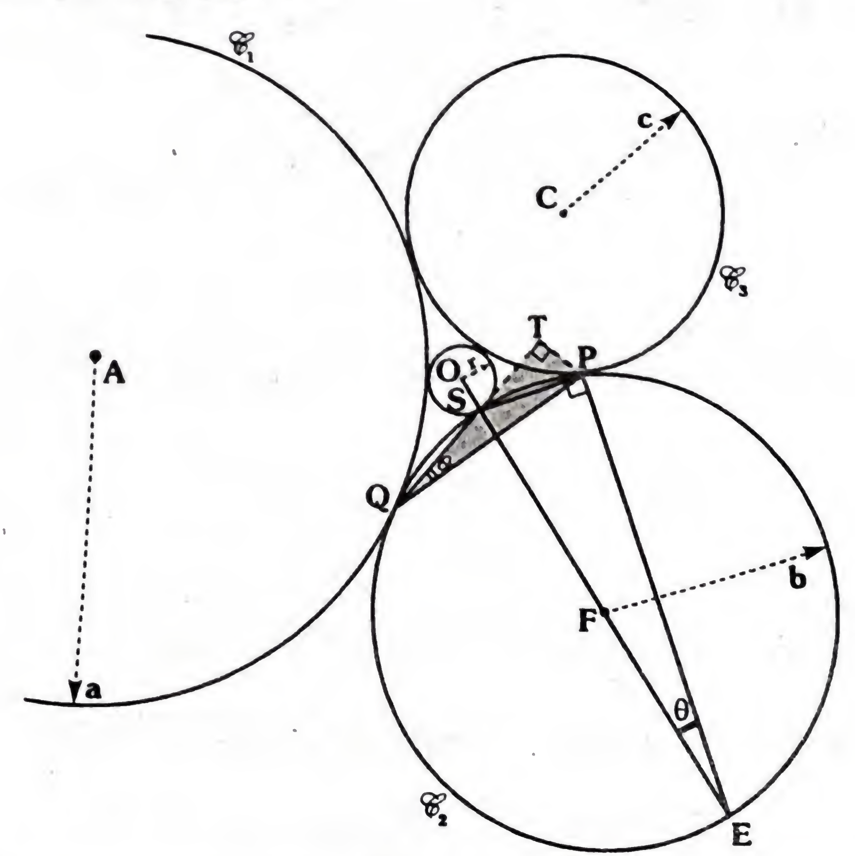
$$\frac{1}{r}=2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{R}=2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$



Demostración:

- Demostremos primero, para "r":



- Antes de la demostración, recordemos que dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios r_1 y r_2, el segmento tangente común exterior se halla así: $2\sqrt{r_1r_2}$ (Ver pag. 16)

- Por teorema (pág. 68)

$$\cdot\ 2\sqrt{rc}=(SP)\frac{\sqrt{(b+r)(b+c)}}{b} \Rightarrow SP=\frac{2b\sqrt{rc}}{\sqrt{(b+r)(b+c)}} \quad \ldots (1)$$

$$\cdot\ 2\sqrt{ra}=(SQ)\frac{\sqrt{(b+r)(b+a)}}{b} \Rightarrow SQ=\frac{2b\sqrt{ra}}{\sqrt{(b+r)(b+a)}} \quad \ldots (2)$$

$$\cdot\ 2\sqrt{ac}=(QP)\frac{\sqrt{(b+a)(b+c)}}{b} \Rightarrow QP=\frac{2b\sqrt{ac}}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \quad \ldots (3)$$

- En ΔQSP, por teorema de Euclides: $(PQ)^2=(SQ)^2+(SP)^2+2(SQ)(ST)$ ... (4)

- $\measuredangle QTP \sim \measuredangle EPS$: $\frac{TP}{PQ}=\frac{SP}{SE} \Rightarrow TP=\frac{(SP)(PQ)}{2b}$

- $\measuredangle STP$: $(ST)^2=(SP)^2-(TP)^2$

$$\Rightarrow (ST)^2=(SP)^2-\frac{(SP)^2(PQ)^2}{4b^2} \Rightarrow ST=\frac{(SP)}{2b}\sqrt{4b^2-(PQ)^2}$$

Reemplazando: $ST=\frac{2b\sqrt{rc}}{(b+c)}\sqrt{\frac{b(b+a+c)}{(b+r)(b+a)}}$ ... (5)

- En (4):

$$\frac{4b^2ac}{(b+a)(b+c)}=\frac{4b^2ar}{(b+r)(b+a)}+\frac{4b^2rc}{(b+r)(b+c)}+2\cdot\frac{2b\sqrt{ra}}{\sqrt{(b+r)(b+a)}}\cdot\frac{2b\sqrt{rc}}{(b+c)}\sqrt{\frac{b(b+a+c)}{(b+r)(b+a)}}$$

- Simplificando:

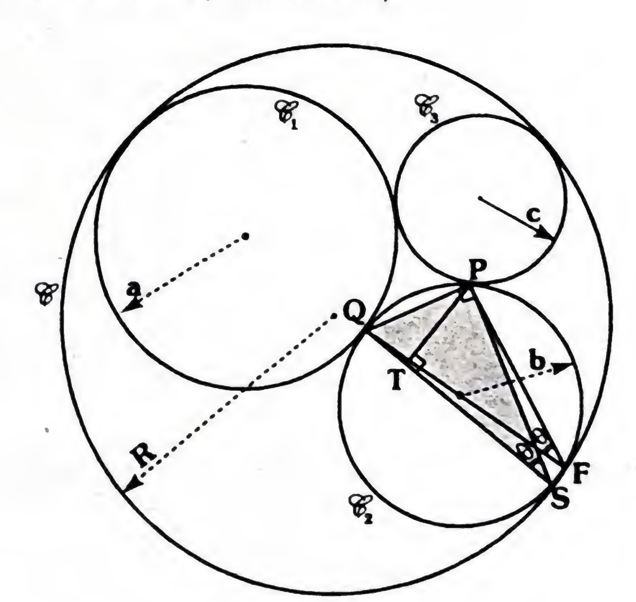
$$\frac{ac}{(b+a)(b+c)}=\frac{ar}{(b+r)(b+a)}+\frac{rc}{(b+r)(b+c)}+\frac{2r\sqrt{abc(a+b+c)}}{(b+r)(b+c)(b+a)}$$

$$\Rightarrow (b+r)ac=ar(b+c)+rc(a+b)+2r\sqrt{abc(a+b+c)}$$

$$r=\frac{abc}{ab+bc+ac+2\sqrt{abc(a+b+c)}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{r}=2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \quad \ldots (I)$$

- Demostremos ahora la segunda parte del teorema (hallemos R).
- Notar $\overline{PT} \perp \overline{QS}$ (T en $\overline{QS}$); F es punto de tangencia entre $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}$.



- Del teorema para $\overline{QS}$ y $\overline{SP}$

$$(QS)^2=\frac{4b^2\cdot aR}{(R-b)(a+b)}$$

$$\Rightarrow \quad (SP)^2=\frac{4b^2cR}{(R-b)(b+c)} \qquad \ldots (1)$$

- Por teorema (pág. ....) para $\overline{PQ}$ en $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$$2\sqrt{ac}=\frac{(PQ)}{b}\sqrt{(b+a)(b+c)}$$

$$\Rightarrow \quad (PQ)=\frac{2b\sqrt{ac}}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \qquad \ldots (2)$$

- En ΔQPS, por teorema de Euclides: $(PQ)^2=(QS)^2+(PS)^2-2(QS)(ST)$ ... (3)

- Hallemos (ST):

 – $\measuredangle STP \sim \measuredangle FPQ$: $\dfrac{ST}{SP}=\dfrac{FP}{2b} \Rightarrow ST=\dfrac{(SP)(FP)}{2b}$ ... (4)

 – En $\measuredangle QPF$: $(FP)=\sqrt{4b^2-(PQ)^2}$ ... (5)

 – (5) y (1) en (4):

$$ST=\frac{1}{2b}\cdot\frac{2b\sqrt{cR}}{\sqrt{(R-b)(b+c)}}\cdot\sqrt{4b^2-\frac{4b^2ac}{(b+a)(b+c)}}$$

$$\Rightarrow \quad ST=\frac{2b\sqrt{cR}}{(b+c)}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(R-b)(b+a)}} \qquad \ldots (6)$$

- Reemplazando en (3) las expresiones anteriores:

$$\frac{\cancel{4b^2}ac}{(b+a)(b+c)}=\frac{\cancel{4b^2}aR}{(R-b)(a+b)}+\frac{\cancel{4b^2}cR}{(R-b)(b+c)}-2\cdot\frac{\cancel{2b}\sqrt{aR}}{\sqrt{(R-b)(a+b)}}\cdot\frac{\cancel{2b}\sqrt{cR}}{(b+c)}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(R-b)(a+b)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ac}{(b+a)(b+c)}=\frac{aR}{(R-b)(a+b)}+\frac{cR}{(R-b)(b+c)}-\frac{2R\sqrt{abc(a+b+c)}}{(R-b)(a+b)(b+c)}$$

$$\Rightarrow ac(R-b)=(b+c)aR+(a+b)cR-2R\sqrt{abc(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow R=\frac{abc}{2\sqrt{abc(a+b+c)}-ab-bc-ac}$$

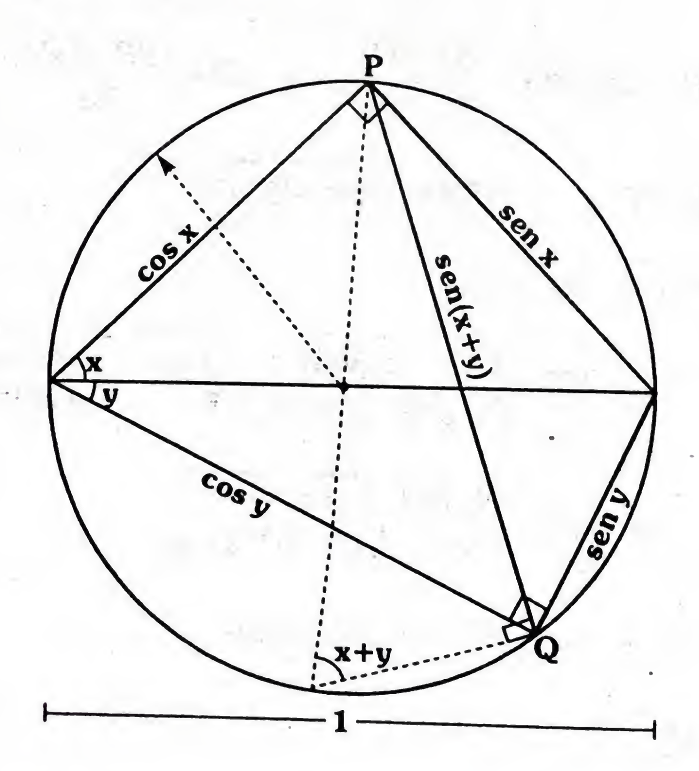
$$\therefore \boxed{\frac{1}{R}=2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} \quad \text{... (II)}$$

Resultado Visual

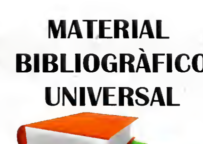
Una aplicación interesante del teorema de Ptolomeo la encontramos en la revista japonesa "Excalibur", donde aparece la siguiente demostración sin palabras de:

$$\mathbf{sen(x+y)=senxcosy+senycosx}$$

Se nos ofrece el siguiente gráfico:



$$\mathbf{sen(x+y)=PQ=senxcosy+senycosx}$$



Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS RESUELTOS

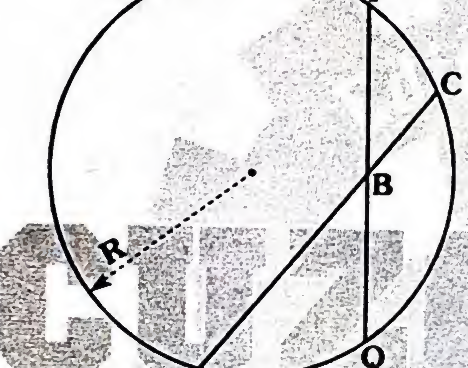
- *Anual*
- *Cepre Uni*
- *Semestral*
- *Semestral Intensivo*
- *Repaso*

RELACIONES MÉTRICAS

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 1

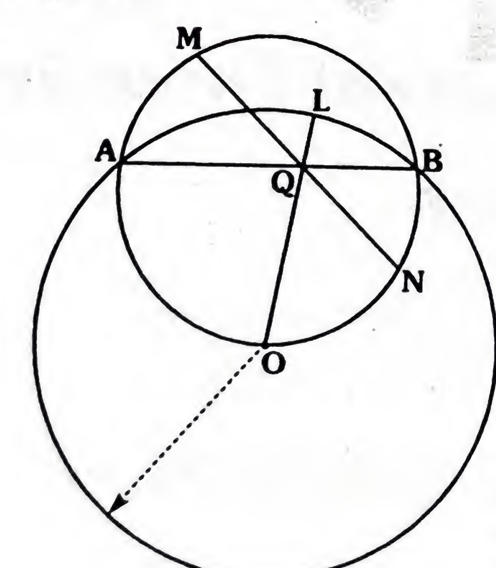
En el gráfico, $AB=3\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{3}$, $PB=BQ$ y $R=5$. Calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 37°
B) 53°
C) 74°
D) 106°
E) 60°

PROBLEMA Nº 2

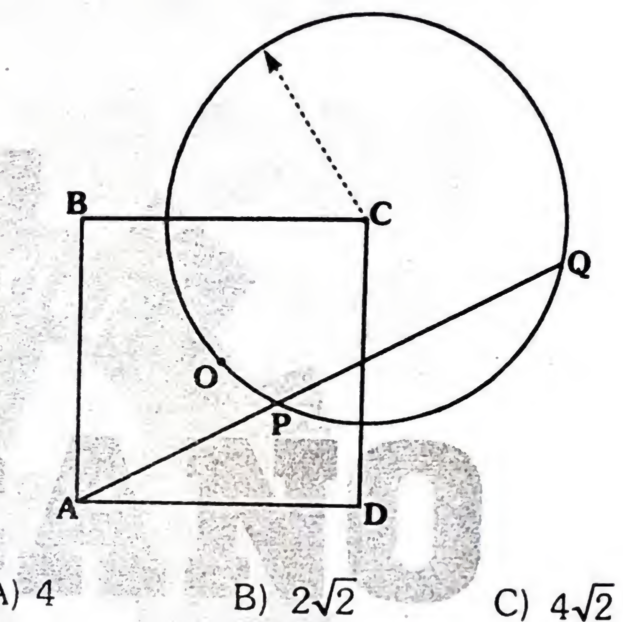
En el gráfico, $QO=4(QL)=4$.
Calcule (MQ)(QN).



A) 4
B) 9
C) 5
D) 8
E) 6

PROBLEMA Nº 3

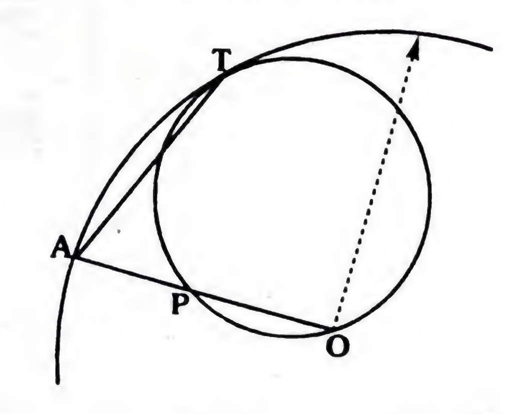
Según el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O y $AB=2$, calcule (AP)(AQ).



A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 8 E) 6

PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, T es punto de tangencia, si $AP=1$ y $OP=3$. Calcule AT.



A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 5

Según el gráfico, (GE)(EC)=24 y 3(AD)=2(BC)=EF=12.

Calcule AB.

A) 1,5

B) 2

C) 6

D) 3

E) 4

PROBLEMA Nº 6

Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en la circunferencia, se traza la cuerda CQ que corta a $\overline{AD}$ en P. Si $m\overset{\frown}{QD}=74°$ y BC=4. Calcule PQ.

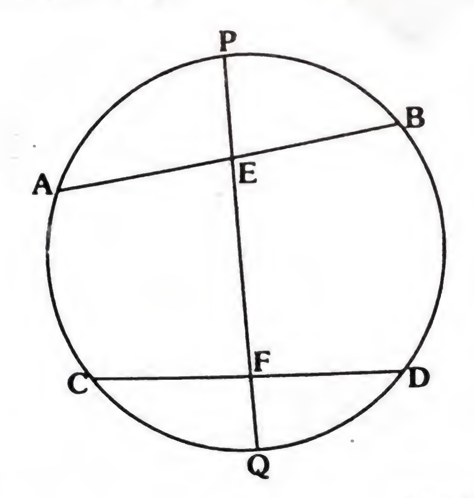
A) 5/3 B) 3/5 C) 1

D) 1/2 E) 2/3

PROBLEMA Nº 7

En el gráfico, 3(EB)=4(FD)=12. Si AE=EB, CF=FD y FE=7.

Calcule EP−FQ.

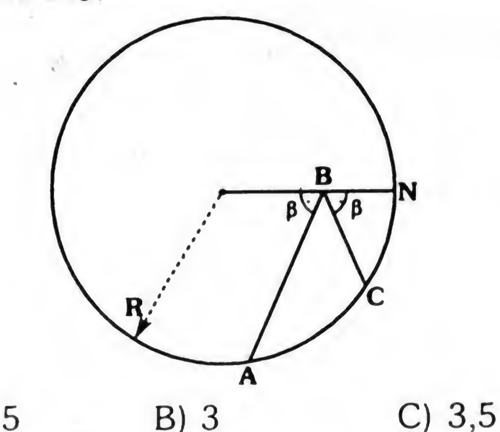


A) 1 B) 0,5 C) 1,5

D) 0,75 E) 1,75

PROBLEMA Nº 8

En el gráfico, AB=R=8 y BN=2. Calcule BC.

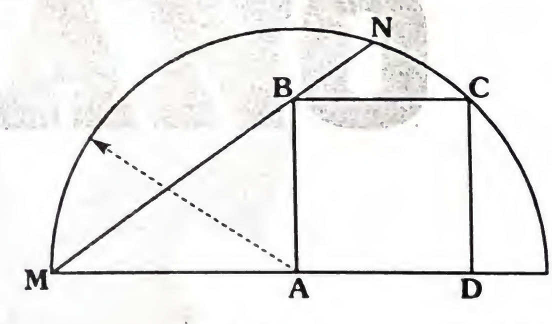


A) 8,5 B) 3 C) 3,5

D) 7,5 E) 2,8

PROBLEMA Nº 9

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y MB=36. Calcule BN.

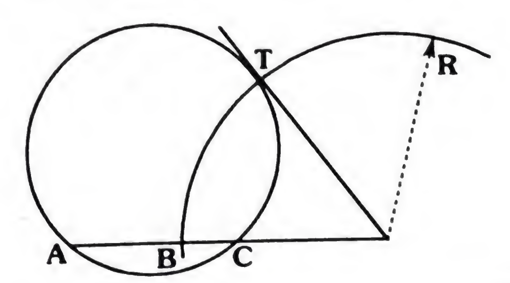


A) 6 B) 8 C) 10

D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 10

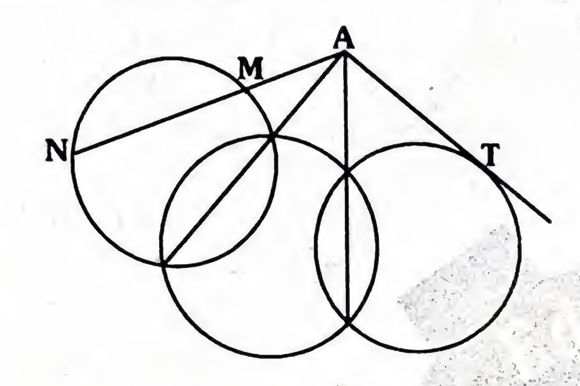
Según el gráfico, T es punto de tangencia. Si BC=2 y AB=3, calcule R.



A) 2,4 B) 6 C) 10/3
D) 1,8 E) 11/3

PROBLEMA Nº 11

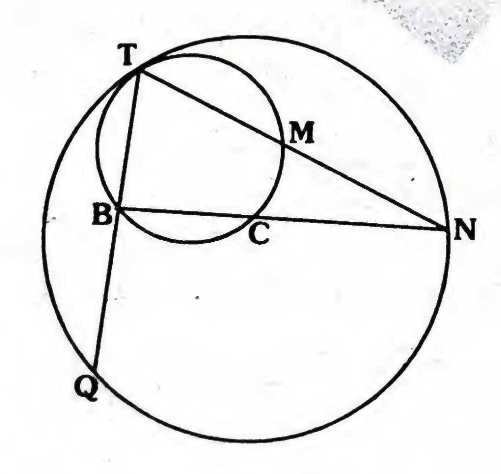
En el gráfico, T es punto de tangencia. Si AM=2 y MN=3.
Calcule AT.



A) $\sqrt{10}$ B) 6 C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

PROBLEMA Nº 12

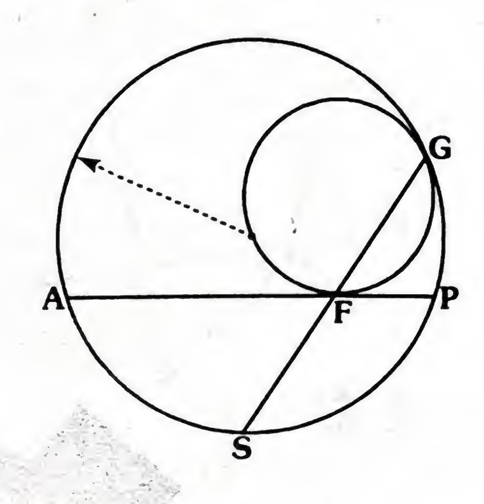
Según el gráfico, T es punto de tangencia, si BT=2(BQ), BC=2 y CN=3.
Calcule MN.



A) 3 B) 4
C) 5 D) $\sqrt{5}$
E) $\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 13

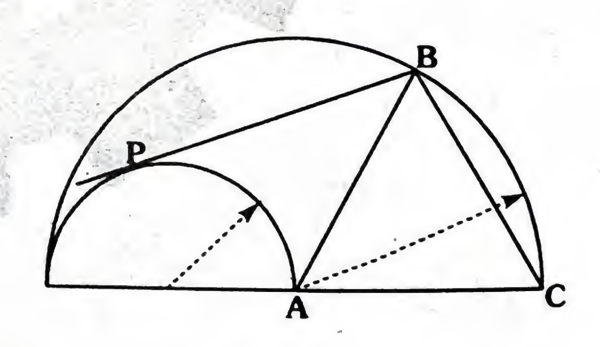
En el gráfico, F y G son puntos de tangencia. Si AF=9 y FP=4.
Calcule FS.



A) 3 B) 4 C) 6
D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, P es punto de tangencia y el triángulo ABC es equilátero. Si AB=2.
Calcule BP.



A) 2 B) 4 C) 3
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 15

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AC}=m\overset{\frown}{BD}$, QN=3(ND) y (AM)(MB)=12.
Calcular r.

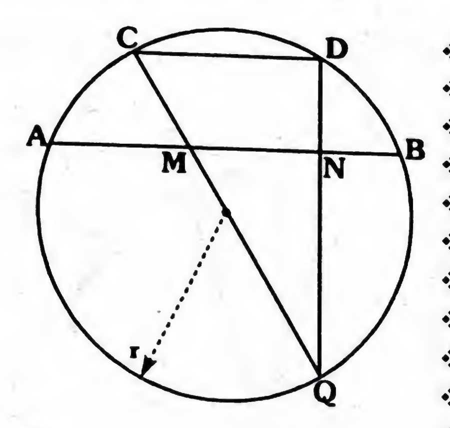
A) 2

B) 4

C) $2\sqrt{3}$

D) 3

E) 6

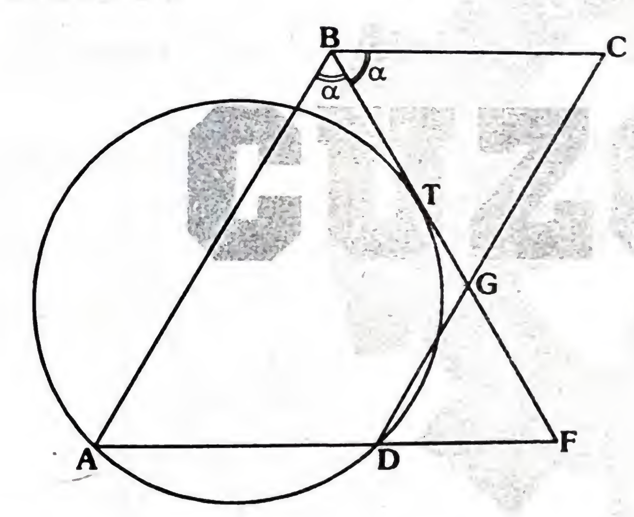


PROBLEMA Nº 16

Según el gráfico, ABCD es un paralelogramo y T es punto de tangencia.

Si: GC=6 y CD=10.

Calcule FT.



A) $2\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{5}$

D) $2\sqrt{5}$ E) 8

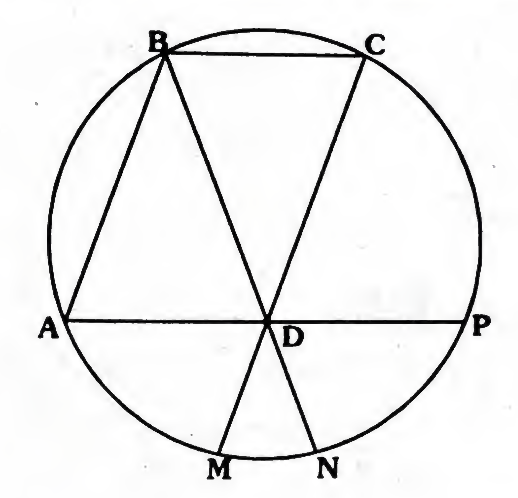
PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo.

Si: BD=4(DN), (AD)(DP)=8 y

$m\overset{\frown}{AM}=m\overset{\frown}{MNP}$.

Calcule MC.



A) $2\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROBLEMA Nº 18

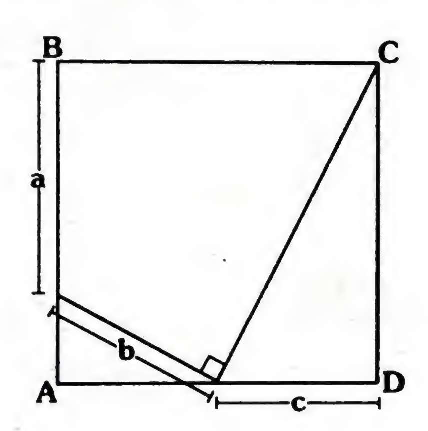
En el triángulo ABC se cumple que AB=BC=5 y AC=8. Calcule la distancia del baricentro al excentro relativo a $\overline{BC}$.

A) 6 B) $\sqrt{29}$ C) $\sqrt{26}$

D) 8 E) 5

PROBLEMA Nº 19

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Indique la relación entre a, b y c.



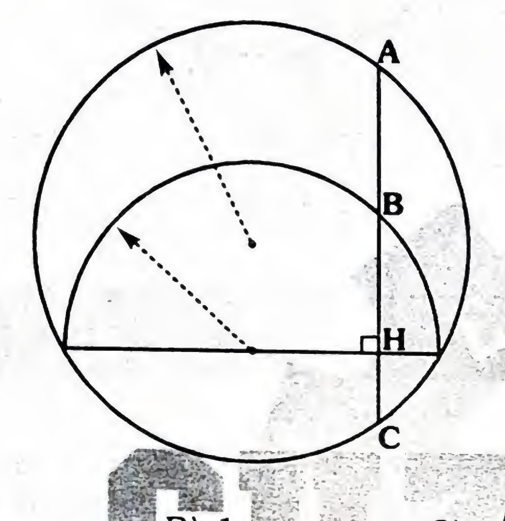
A) $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ B) $a=\sqrt{2bc}$

C) $a=b+c$ D) $a^2=b^2+c^2$

E) $a=\sqrt{bc}$

PROBLEMA Nº 20

En el gráfico, AB=BH=4. Calcule HC.

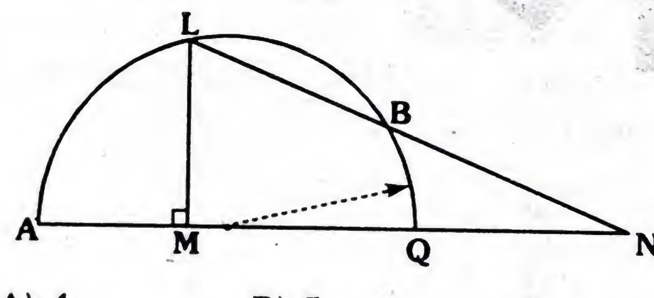


A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 21

En el gráfico, LB=BN, si MQ=9 y QN=7. Calcule AM.



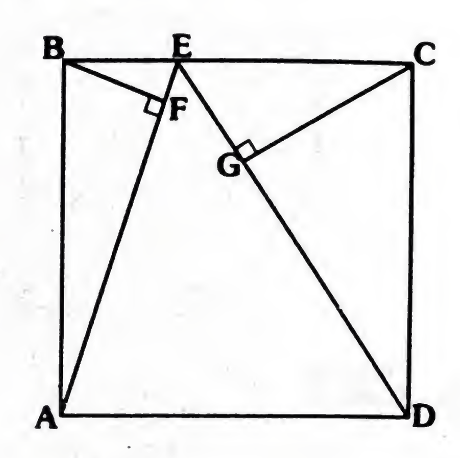
A) 4 B) 5 C) 6

D) 6,4 E) 5,4

PROBLEMA Nº 22

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y AD=5.

Calcule (BF)(AE)+(DE)(CG).



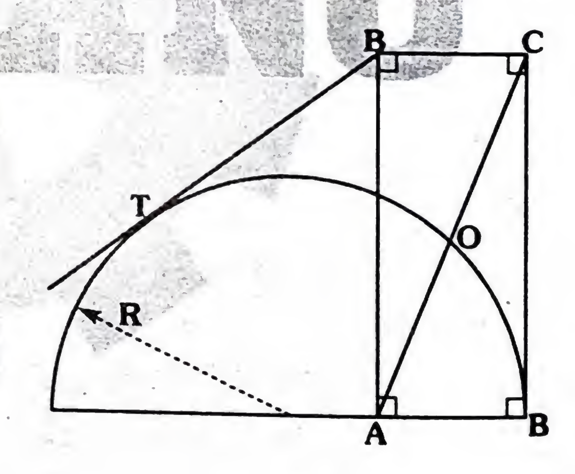
A) 25 B) 5 C) $5\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{5}$ E) 10

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, T es punto de tangencia, OC=OA y (BC)R=k.

Calcule BT.



A) $\sqrt{k}$ B) $\sqrt{2k}$ C) $2\sqrt{k}$

D) $3\sqrt{k}$ E) $\sqrt{3k}$

PROBLEMA Nº 24

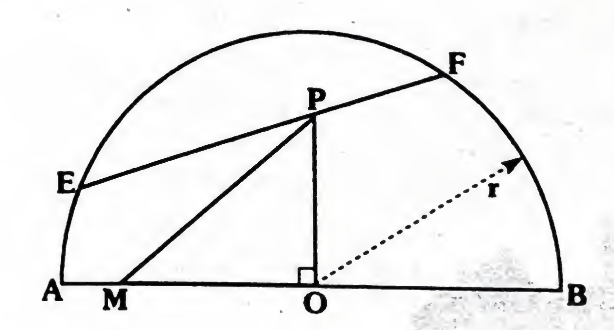
En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH. Si AB=3 y HC=8.

Calcule BC.

A) 2 B) 1 C) $2\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 25

En el gráfico, EP=8, PF=3 y MP=r. Calcule OM.

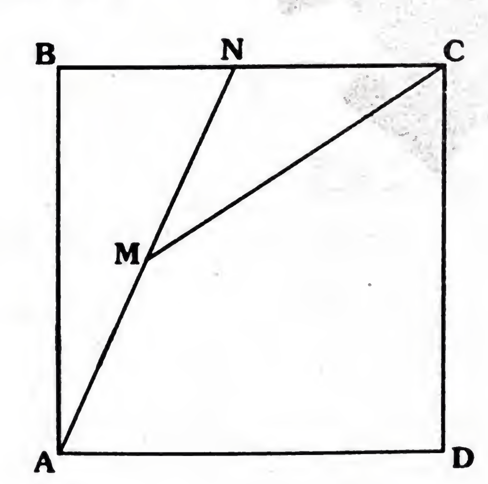


A) $\sqrt{7}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\sqrt{22}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, BN=NC y AM=MN. Si AB=4.

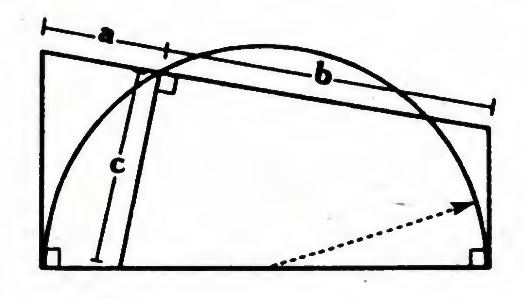
Calcule CM.



A) $\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{6}$
E) $4\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 27

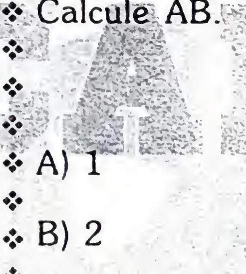
En el gráfico, indique la relación entre a, b y c.

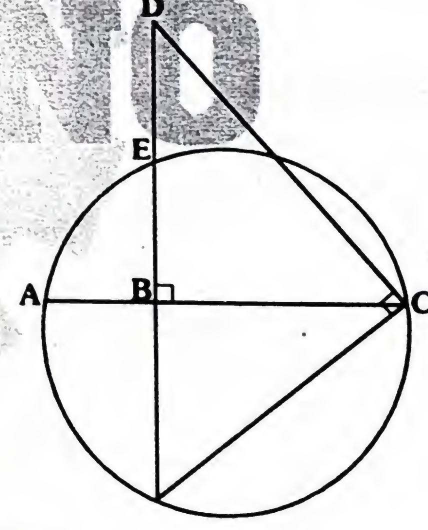


A) $ab=c^2$ B) $2ab=c^2$
C) $c^2=a^2+b^2$ D) $c=a+b$
E) $c=2(a+b)$

PROBLEMA Nº 28

En el gráfico, DE=EB, (AB)(BC)=8. Calcule AB.





A) 1
B) 2
C) 4
D) 5
E) 4,5

PROBLEMA Nº 29

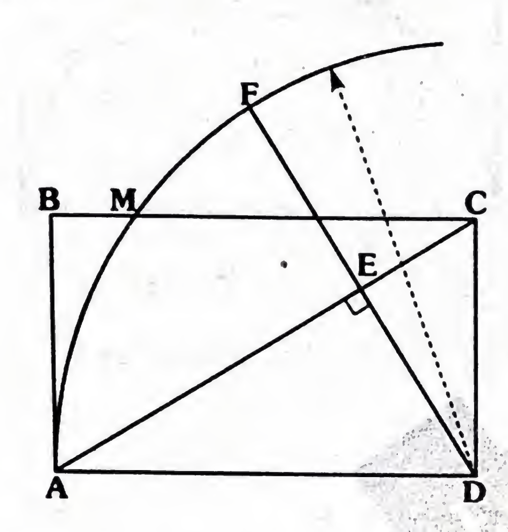
Se tiene el trapecio rectángulo AOQC (recto en O y Q), se trazan los cuadrantes AOB y CQB $(B \in \overline{OQ})$. Si AC=8 y (OB)(BQ)=12. Calcule la distancia de B hacia $\overline{AC}$.

A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 3,2

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, ABCD es un rectángulo. $MC=5\sqrt{7}$ y $AD=20$.

Calcule EF.

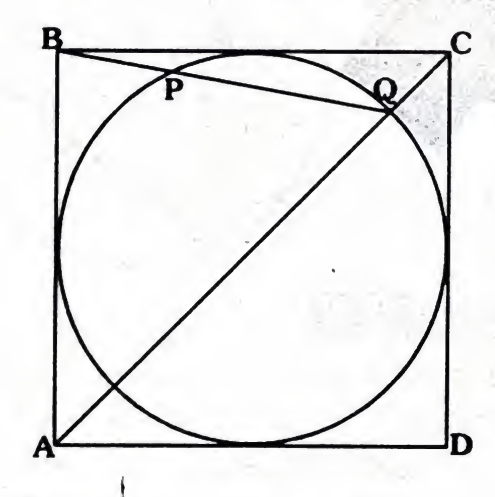


A) 15 B) 12 C) 8

D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 31

En el gráfico, la circunferencia, se encuentra inscrita en el cuadrado ABCD. Si $AB=6$. Calcule PQ.



A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$

C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$

E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 32

Se tiene el paralelogramo ABCD, P y Q están en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{DQ}\perp\overline{AC}$ y APQD es un trapecio isósceles. Si $AB=a$ y $AQ=b$.

Calcule PC.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $2\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\frac{a+b}{2}$

E) $a+b$

PROBLEMA Nº 33

En una semicircunferencia de diámetro AB y radio R se ubica P y se proyecta sobre $\overline{AB}$ (H es dicha proyección), se ubica Q en $\overset{\frown}{AP}$ y L en $\overset{\frown}{PB}$. Si $m\overset{\frown}{AQ}=m\overset{\frown}{PL}$ y $R(AH)=k$.

Calcule QL.

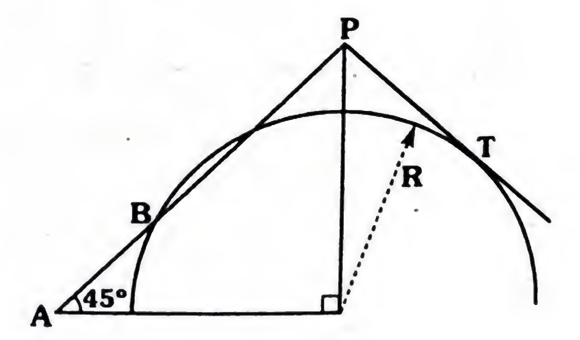
A) $\sqrt{k}$ B) $\sqrt{2k}$ C) $2\sqrt{k}$

D) $\frac{\sqrt{k}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{k}}{4}$

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $TP=a$ y $AB=b$.

Calcule R.



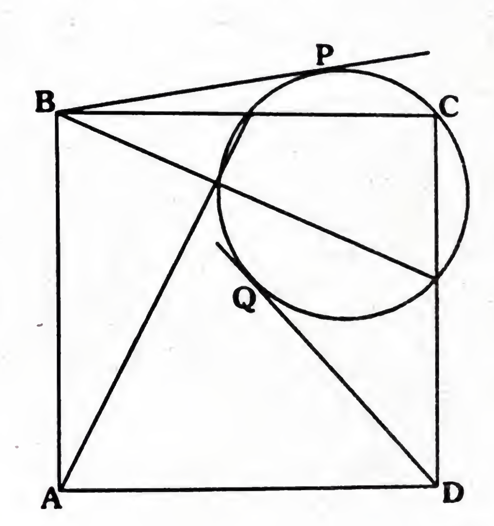
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$

C) $\frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$ D) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$

E) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, ABCD es un cuadrado.
¿Qué tipo de triángulo tiene por longitudes de sus lados a BP, DQ y AD?

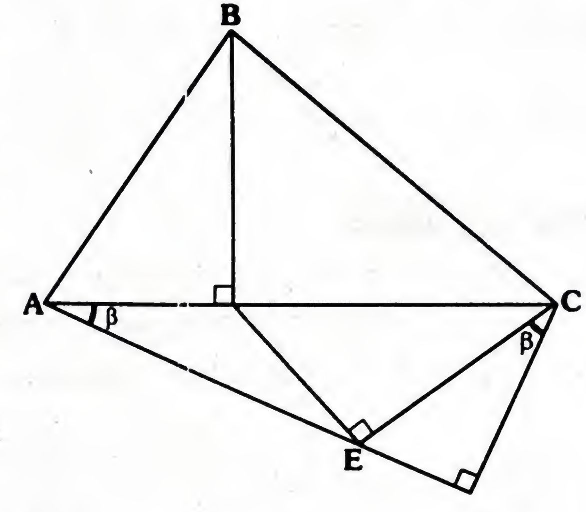


A) Acutángulo B) Isósceles
C) Rectángulo D) Obtusángulo
E) Escaleno

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 36

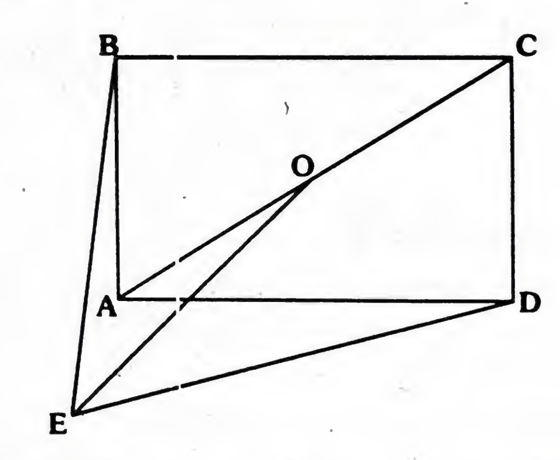
En el gráfico, AB=4 y BC=5.
Calcule EC.



A) 3,25 B) 3 C) 4
D) 3,75 E) 4,5

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, ABCD es rectángulo EB=10, ED=12 y AO=OC=4.
Calcule OE.



A) $\sqrt{106}$ B) $\sqrt{107}$ C) $\sqrt{108}$
D) $\sqrt{104}$ E) $\sqrt{105}$

PROBLEMA Nº 38

Se tiene el rectángulo ABCD, se ubica E y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si $(BQ)^2+(ED)^2=k$.
Calcule $(BD)^2+(EQ)^2$.

A) $\frac{k}{2}$ B) k C) 2k

D) 3k E) $\frac{k}{3}$

PROBLEMA Nº 39

Las longitudes de las bases de un trapecio son 4μ y 18μ; de los lados laterales 6μ y 12μ. ¿Cuántos distan las bases?

A) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ B) $\frac{2}{5}\sqrt{13}$ C) $\frac{3}{7}\sqrt{6}$

D) $\frac{11}{5}\sqrt{5}$ E) $\frac{16}{7}\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 40

Las medianas de un triángulo miden 9; 12 y 15μ. Halle la longitud del menor lado de dicho triángulo.

A) $8\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 10

D) 8 E) 12

PROBLEMA Nº 41

En el triángulo ABC, las medianas relativas a los lados AC y AB son perpendiculares.

Si: AB=c, AC=b y BC=a.

¿Cuál es la relación entre a, b y c?

A) $b^2+c^2=2a^2$ B) $b^2+c^2=4a^2$

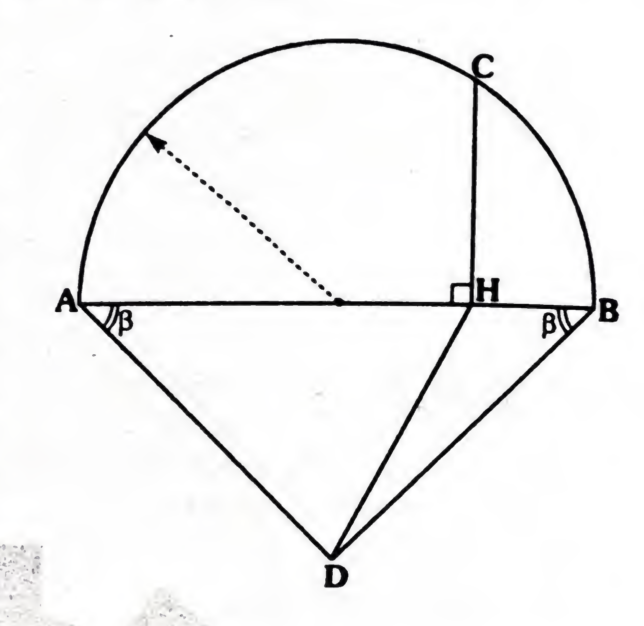
C) $b^2+c^2=5a^2$ D) $b^2+c^2=3a^2$

E) $b^2+c^2=6a^2$

PROBLEMA Nº 42

En el gráfico, AD=5 y CH=2.

Calcule DH.

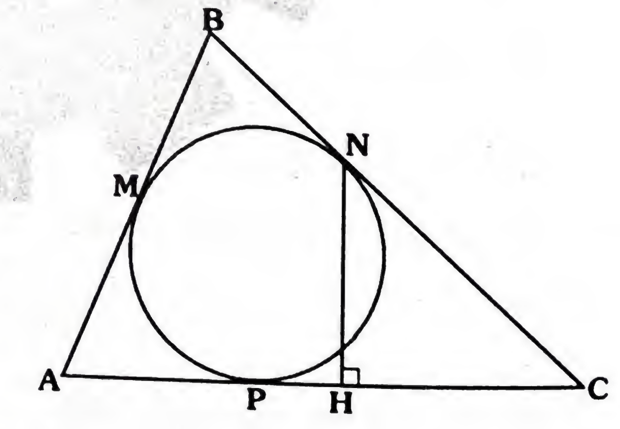


A) $\sqrt{19}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{21}$

D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{23}$

PROBLEMA Nº 43

En el gráfico, M, N y P son puntos tangencia, AB=13, BC=15 y AC=14. Calcule HN.



A) 3,4 B) 5,4 C) 6,4

D) 4,4 E) 7,4

PROBLEMA Nº 44

En el triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{BC}$

y $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Si AB=5 ; BC=6 y AC=7. Calcule MN.

A) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ B) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

D) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$ E) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

PROBLEMA Nº 45

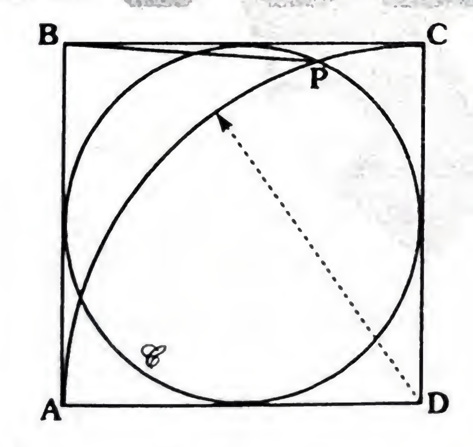
En el trapecio isósceles ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$), se traza la base media $\overline{MN}$ (M en $\overline{AB}$). Si CD=10, NB=8 y MD=12. Calcule MN.

A) $\sqrt{58}$ B) $\sqrt{54}$ C) $\sqrt{79}$

D) $\sqrt{77}$ E) $\sqrt{87}$

PROBLEMA Nº 46

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD. Si AB=4. Calcule BP.



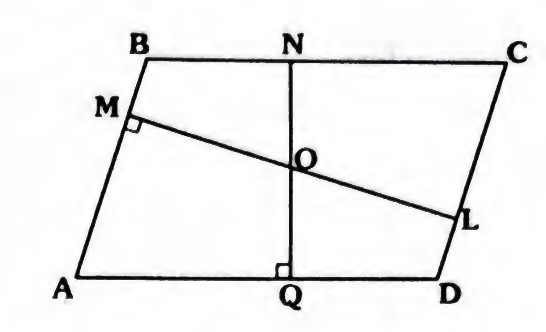
A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$

D) 3 E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, ABCD es un romboide de centro O; si $(AQ)^2+(MB)^2=k$.

Calcule $(CL)^2+(BN)^2$.



A) 2k B) k C) 3k

D) $\frac{k}{2}$ E) $\frac{4}{3}k$

PROBLEMA Nº 48

En un trapecio las longitudes de sus bases son 4 y 10; las longitudes de sus lados laterales son 5 y 7.

Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de las bases del trapecio.

A) $2\sqrt{7}$ B) $3\sqrt{7}$

C) $2\sqrt{11}$ D) $\sqrt{19}$

E) $3\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 49

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, B y C; las tangentes trazadas por A y B se intersectan en P; $\overline{AB}$ interseca a la tangente trazada por C en Q; AP=a, QC=b.

Calcule PQ.

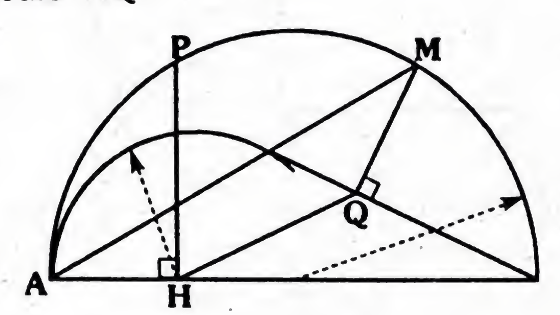
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{2a^2+b^2}$

C) $\sqrt{a^2+ab}$ D) $\sqrt{a^2+2b^2}$

E) $\sqrt{b^2+ab}$

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, PH=a; MQ=b; $\overline{AM}//\overline{HQ}$. Calcule HQ.



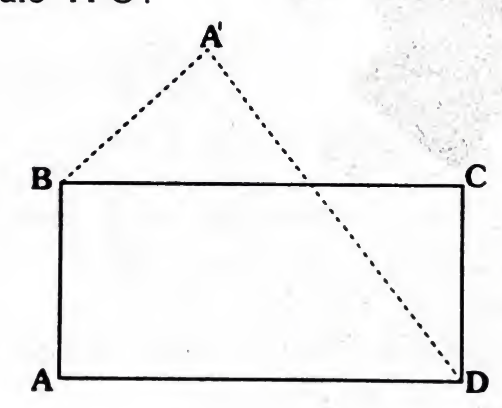
A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$ C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 51

Se tiene en el gráfico una hoja rectangular, se dobla (línea de doblez $\overline{BD}$), A' es la nueva posición de A, si AB=a y BC=b. Calcule A'C.



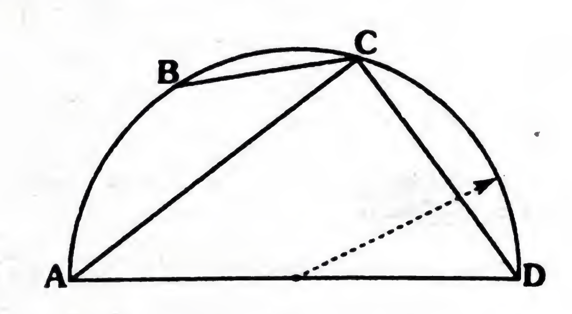
A) $\sqrt{b^2-a^2}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ D) $\dfrac{b^2+a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$

E) $\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{ab}}$

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, $m\widehat{AB}=74°$, Si BC=3 y CD=4. Calcule AC.



A) 10 B) 5 C) 7

D) 6,75 E) $\sqrt{37}$

PROBLEMA Nº 53

Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia. En el arco AB se ubica P. Calcule $\dfrac{PA+PB}{PD+PC}$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{2}-1$ E) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

PROBLEMA Nº 54

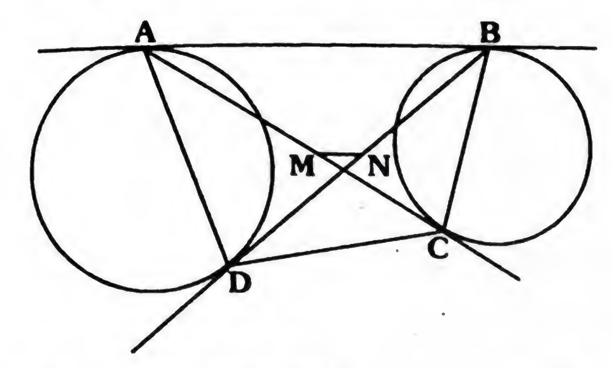
Se tiene el trapecio isósceles ABCD $(\overline{AD}//\overline{BC})$ circunscrito a una circunferencia, se cumple que BC=2 y AD=6. Calcule AC.

A) 3,5 B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 55

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si AB=10, AD=8 y BC=2(MN). Calcule CD.

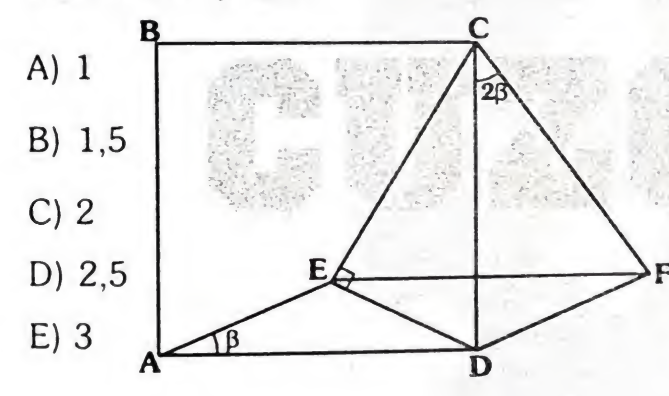


A) 3 B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{5}$
D) 6 E) $2\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, AEFD es un paralelogramo y DF=4. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{CD}$.

A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3



PROBLEMA Nº 57

En un trapezoide ABCD, las diagonales tienen igual longitud y m∢ADC=90°, en $\overline{BC}$ se ubica el punto P, tal que el cuadrilátero APCD es inscriptible y (BC)(BP)=8.

Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) 4
D) 8 E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 58

En un cuadrado ABCD cuyo lado mide $2\sqrt{\frac{5}{13}}$, M, N y Q son punto medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente; si P es la intersección de $\overline{AN}$ y $\overline{DM}$.

Calcule PQ.

A) 2 B) 1/2 C) 3
D) 1/4 E) 1

PROBLEMA Nº 59

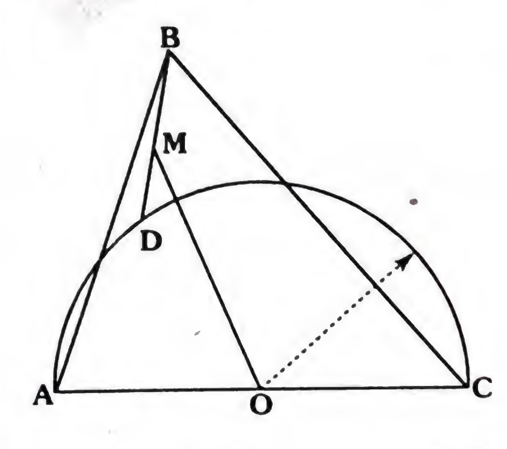
En la región interior de un rectángulo ABCD se ubica una circunferencia, luego se trazan los segmentos tangentes AN, BP, CQ y DH. Si: $(BP)^2+(HD)^2=100$

Calcule $(QC)^2+(AN)^2$.

A) 150 B) 120 C) 100
D) 200 E) 50

PROBLEMA Nº 60

En el gráfico, BM=MD=$\sqrt{3}$; AB=5 y BC=6. Calcule OM.



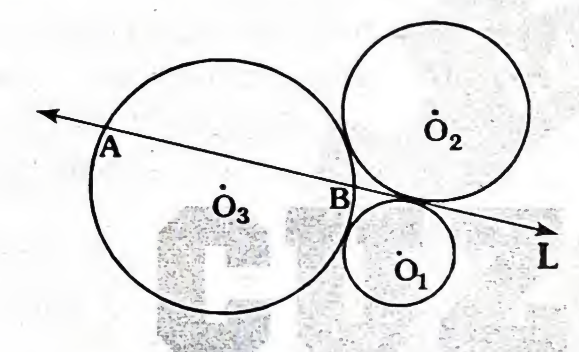
A) 3,5 B) 4,5 C) 4
D) 5 E) 3

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 61 2do SEMINARIO 2006-II

En la figura mostrada los radios de las circunferencias de centros O_1, O_2 y O_3 miden r_1, r_2 y r_3 respectivamente. La recta L es tangente interior común.

Halle la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.



A) $\dfrac{r_3\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$ B) $\dfrac{2r_3\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

C) $\dfrac{4r_1\sqrt{r_2r_3}}{r_2+r_3}$ D) $\dfrac{4r_2\sqrt{r_1r_3}}{r_1+r_3}$

E) $\dfrac{4r_3\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

PROBLEMA Nº 62 3er SEMINARIO 2008-I

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CT}$. Si $(AB)(AT)=k_1$ y $(CB)(CH)=k_2$. Calcule AC.

A) $\sqrt{k_1+2k_2}$ B) $\sqrt{k_1+k_2}$ C) $\sqrt{k_1-k_2}$

D) $\sqrt{2k_1+k_2}$ E) $\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{2}}$

PROBLEMA Nº 63 2do SEMINARIO 98-II

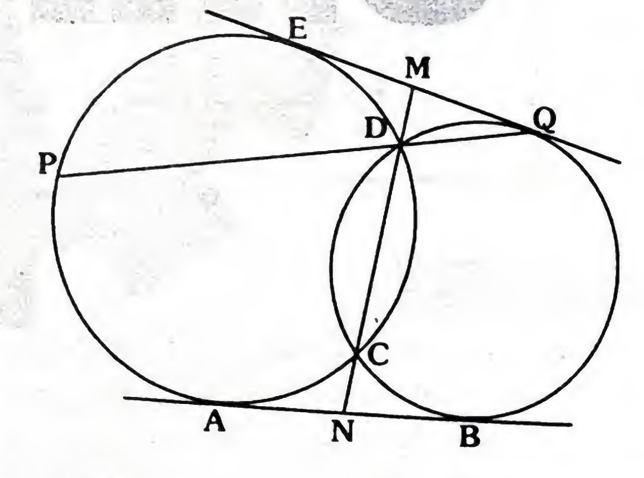
Sea el cuadrado ABCD, se traza una circunferencia tangente a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, determina en $\overline{BC}$ dos segmentos de longitudes 2μ y 23μ. Calcule el radio de dicha circunferencia.

A) 38μ B) 36μ C) 37μ

D) 35μ E) 39μ

PROBLEMA Nº 64 3er SEMINARIO 1997-I

En el gráfico, A, B, Q y E son puntos de tangencia y AB=CD. Si PD=5 y QD=4. Halle MN.



A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$

C) $6\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$

E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 65 3er SEMINARIO 1997-I

La cuerda AB y el diámetro CD de una misma circunferencia se intersectan en P.

Si PC=a, $m\widehat{BD}=3(m\widehat{AC})$ y el radio de la circunferencia es "r".
Calcule AB.

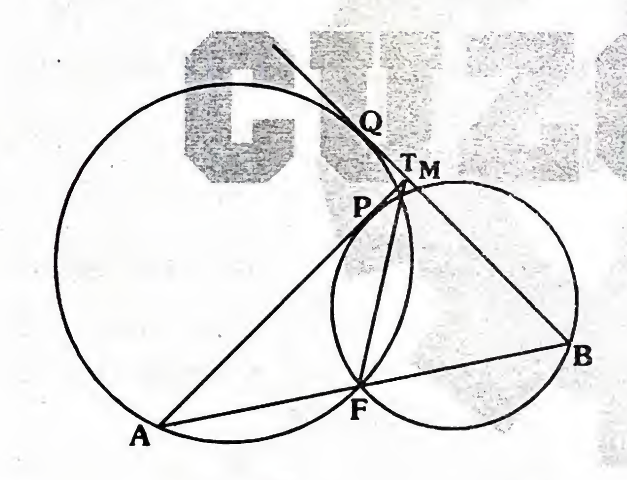
A) $2r-a$
B) $r-2a$
C) $\frac{r^2}{r+a}$
D) $\frac{r^2}{r-a}$
E) $\frac{2a^2}{r}$

PROBLEMA Nº 66 3er SEMINARIO 1997-I

En la figura mostrada, P y Q son puntos de tangencia.

Si $TM=4\mu$; $MB=5\mu$ y $AP=20\mu$.

Hallar AB.



A) 24μ
B) 28μ
C) 25μ
D) 30μ
E) 32μ

PROBLEMA Nº 67 3er SEMINARIO 1997-I

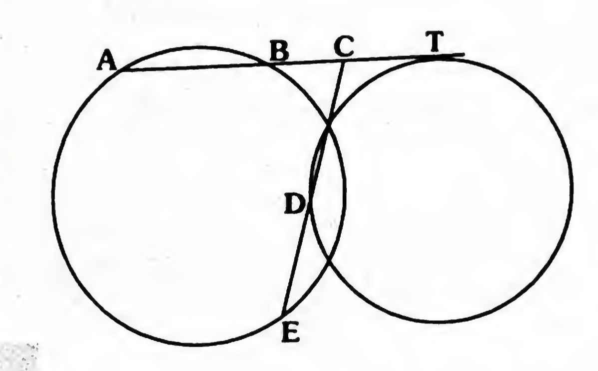
Dado un triángulo ABC, de circuncentro O, incentro I, excentros E_1, E_2 y E_3. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita. Demostrar que:

$$(IO)^2+(E_1O)^2+(E_2O)^2+(E_3O)^2=12R^2$$

PROBLEMA Nº 68 Texto Cepre-Uni 2004

En la figura, T es punto de tangencia, si AB=BC=CT y CD=8.

Calcule ED.



A) 4μ
B) $4\sqrt{2}\mu$
C) 2μ
D) 8μ
E) $8\sqrt{2}\mu$

PROBLEMA Nº 69 1er SEMINARIO 2001-II

Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O, y radio "r", se trazan las tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia), las distancias desde un punto S de $\overline{AB}$ a los rayos PA y PB miden a y b. Además OS=d.

Demostrar que: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2r}{r^2-d^2}$

PROBLEMA Nº 70 1er SEMINARIO 2001-I

Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O y radio 17μ; el producto de las longitudes de los segmentos determinados por el ortocentro sobre una altura es igual a $120\mu^2$. Calcule la longitud de la distancia del ortocentro al circuncentro.

A) 10μ
B) 7μ
C) 12μ
D) 13μ
E) 14μ

PROBLEMA Nº 71 4to SEMINARIO 2000-II

Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R, se traza la ceviana interior AN y la cuerda AM, tal que m∢BAN=m∢CAM. Si AN=n y AM=m.

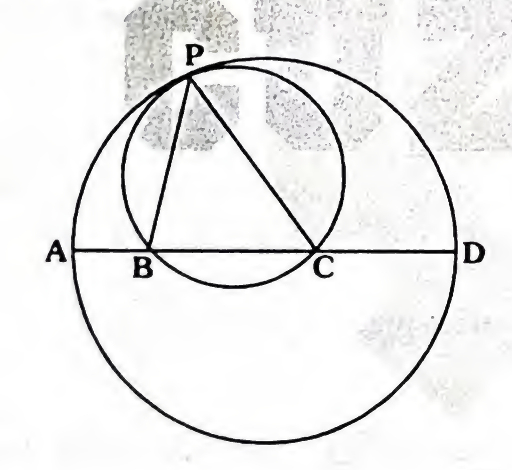
Halle la distancia entre A y $\overline{BC}$.

A) $\frac{mn}{R}$ B) $\frac{m^2-n^2}{R}$ C) $\frac{mR}{n}$

D) $\frac{nR}{m}$ E) $\frac{mn}{2R}$

PROBLEMA Nº 72 3er SEMINARIO 2008-I

En la figura, P es punto de tangencia, PB=4μ, PC=6μ, BC=5μ y CD=3μ. Halle AB (en μ)



A) 1/2 B) 3/4 C) 1

D) 3/2 E) 2

PROBLEMA Nº 73 3er SEMINARIO 1997-I

En un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de radio R en la cual se traza la cuerda PQ que biseca al lado AC en el punto T, siendo Q el punto medio del arco BC.

Calcule PT.

A) $\frac{3\sqrt{6}}{13}R$ B) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{14}R$

D) $\frac{4\sqrt{5}}{17}R$ E) $\frac{5\sqrt{5}}{14}R$

PROBLEMA Nº 74 2do SEMINARIO 2007-I

Un triángulo ABC obtuso en A está inscrito en una circunferencia BC=12μ, AC=5μ, la proyección de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$ mide 3μ. Halle la longitud del radio de la circunferencia.

A) 4,5 μ B) 5 μ C) 6 μ

D) 7,5 μ E) 8 μ

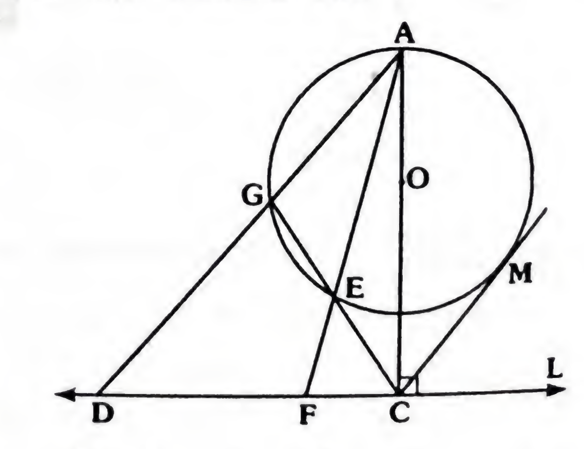
PROBLEMA Nº 75 2do SEMINARIO 2007-I

ABCD es un cuadrilátero inscrito, O es el punto de intersección de las diagonales. Demostrar que:

$$\frac{(AB)(BC)}{(AD)(CD)}=\frac{BO}{OD}$$

PROBLEMA Nº 76 3er SEMINARIO 2007-I

O es el centro de la circunferencia $\overline{AC}\perp\overleftrightarrow{L}$, M es punto de tangencia, DF=4a y FC=3a. Calcule CM.



A) $a\sqrt{7}$ B) $a\sqrt{3}$ C) 2a

D) $a\sqrt{14}$ E) $a\sqrt{21}$

PROBLEMA Nº 77 3er SEMINARIO 2007-I

Desde A un punto exterior a dos circunferencias tangentes exteriores en T de centro O_1 y O_2 se traza una tangente $\overline{AM}$ y la secante ABP respectivamente tal que $O_2 \in \overline{BP}$, $m\measuredangle PAM=90^o$. Si: BP=a, AB=b y $T \in \overline{MP}$. Halle la longitud de la tangente trazada desde P a la circunferencia de centro O_1.

A) $\sqrt{a(a-b)}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$

C) $\sqrt{a(2a+b)}$ D) $\sqrt{a(a+2b)}$

E) $\sqrt{a(a-2b)}$

PROBLEMA Nº 78 3er SEMINARIO 2007-I

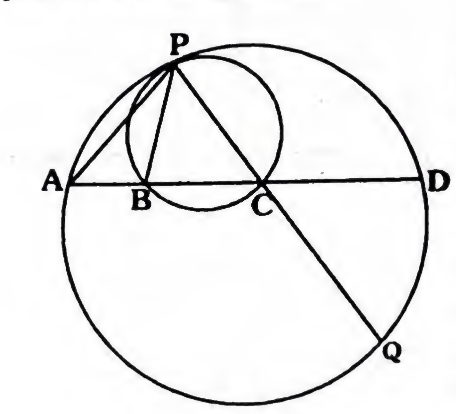
Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, luego se trazan la altura $\overline{BH}$, la cuerda $\overline{BD}$ que interseca a $\overline{AC}$ en E, $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{DE}$ (F en $\overline{DE}$), tal que 3(EF)=FD, AH=12μ, $m\widehat{AB}=m\widehat{AD}$, $(BC)(CD)=36\mu^2$, entonces EC (en μ) es:

A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 79 3er SEMINARIO 2007-II

En la figura, PA=7, PB=5, PC=6 y PD=8. P es punto de tangencia.
Halle CQ.



A) 5

B) 5,2

C) 5,5

D) 6

E) 6,5

PROBLEMA Nº 80 3er SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC de ortocentro H se trazan las alturas AA'; BB' y CC'.
Halle que es igual:

$$\frac{(AA')(HA)+(BB')(HB)+(CC')(HC)}{(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROBLEMA Nº 81 3er SEMINARIO 2007-I

En un cuadrilátero ABCD, se cumple:
$m\measuredangle ABC=m\measuredangle ACD=90^o$ si: AD=q y
(AB)(BC)+(AB)(CD)+(BC)(CD)=s

Hallar AB+BC+CD.

A) $\sqrt[3]{qs}$ B) $\sqrt{q^2+s}$ C) $\sqrt{q^2+2s}$

D) $\sqrt{q^2+4s}$ E) $\frac{s}{q}$

PROBLEMA Nº 82 3er SEMINARIO 2007-I

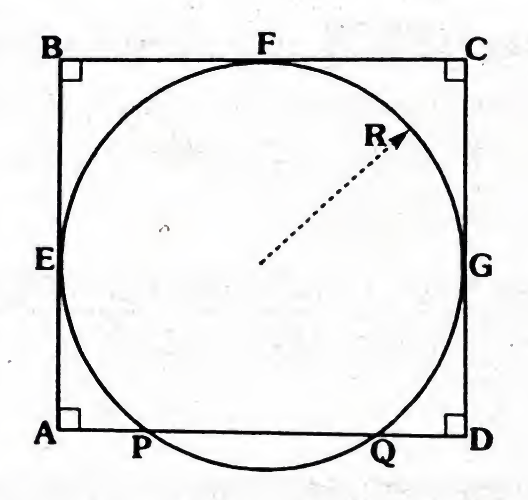
Dos cuerdas paralelas de una circunferencia miden 4 y 6; la distancia entre ellas es 2. Hallar el radio de la circunferencia.

A) $\frac{\sqrt{155}}{2}$ B) $\sqrt{155}$ C) $\sqrt{135}$

D) $\frac{\sqrt{135}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{145}}{4}$

PROBLEMA Nº 83 3er SEMINARIO 2007-I

En la figura mostrada, E, F y G son puntos de tangencia si AB=PQ=8μ, hallar R.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

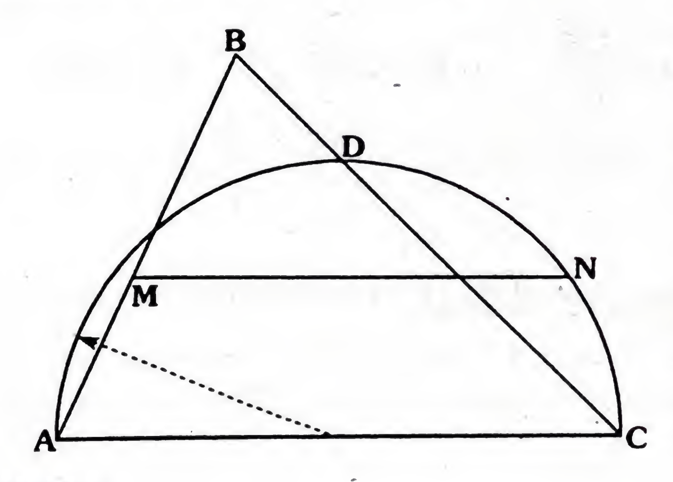
PROBLEMA Nº 84 1er SEMINARIO 2001-II

Una circunferencia de radio R pasa por dos vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia, trazada desde el tercer vértice del cuadrado es el doble del lado del cuadrado. Hallar el lado del cuadrado.

A) $R\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $R\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $R\sqrt{5}$
D) $R\frac{\sqrt{10}}{2}$ E) $R\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 85 1er SEMINARIO 2001-II

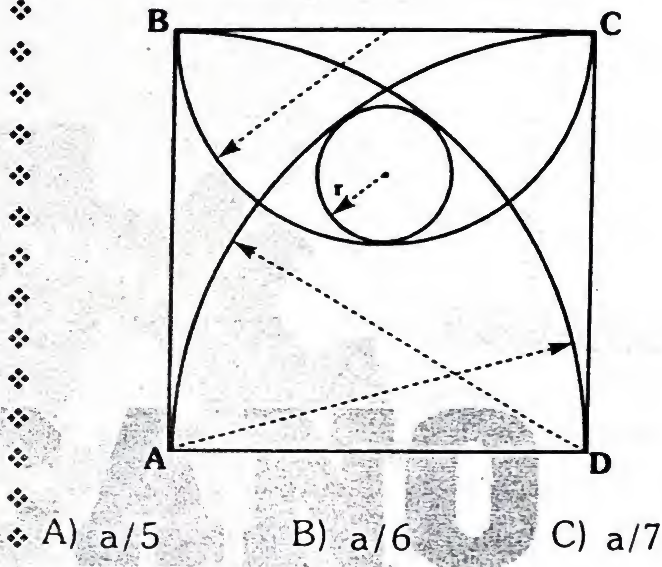
Hallar MN, si AM=MB, $m\widehat{DN}=m\widehat{NC}$, AC=a y BC=b.



A) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\sqrt{\frac{ab}{2}}$
D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 86 1er SEMINARIO 2001-II

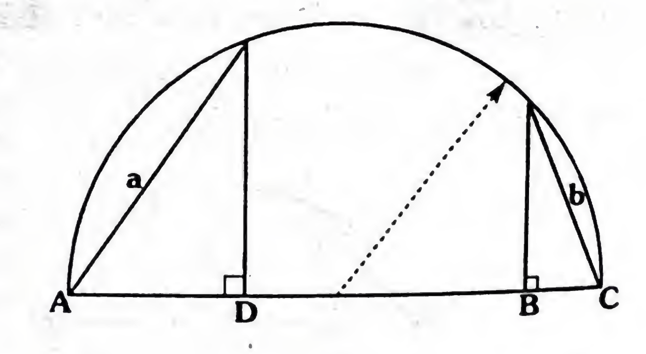
En la siguiente figura, calcular r, conociendo la longitud "a" del lado del cuadrado ABCD.



A) a/5 B) a/6 C) a/7
D) a/8 E) a/9

PROBLEMA Nº 87 2do SEMINARIO 1999-II

En la figura mostrada, si 3(AD)=2(BC). Halle a/b.

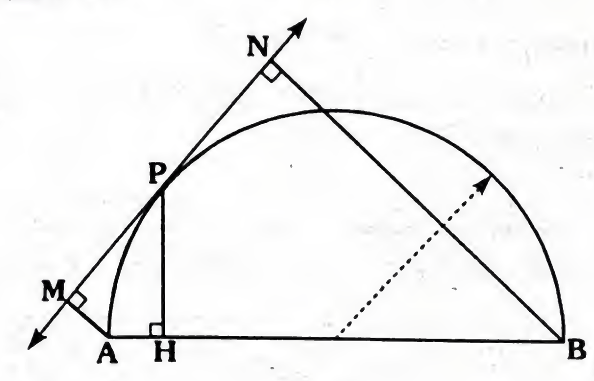


A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 88 2do SEMINARIO 1999-II

En la figura mostrada, P e punto de tangencia. Si AM=a y BN=b.

Halle PH.



A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{2ab}$

D) $\frac{a+b}{2}$ E) $3\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 89 2do SEMINARIO 2000-II

Un triángulo rectángulo de inradio R está inscrito en una circunferencia. Halle el radio de la circunferencia tangente interiormente a la circunferencia anterior y a los catetos.

A) $\frac{2}{3}R$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{5}R$ C) 2R

D) $\frac{R}{3}$ E) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 90 1er SEMINARIO 2000-I

En una circunferencia cuyo centro es O se trazan desde dos puntos exteriores A y B las tangentes AN y BP (N y P en la circunferencia) tal que $m\sphericalangle OBA=90^\circ$. Si AN=a y BP=b. Calcule AB.

A) $\sqrt{2a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a^2-2b^2}$

C) $\sqrt{2a^2-b^2}$ D) $\sqrt{a^2-b^2}$

E) $\sqrt{a^2+2b^2}$

PROBLEMA Nº 91 1er SEMINARIO 2000-II

La altura trazada a la hipotenusa de un triángulo rectángulo la divide en dos segmentos cuyas longitudes son a y b $(a<b)$. Del vértice del ángulo agudo mayor del triángulo se ha trazado un rayo que pasa por el punto medio de la altura.

Hallar la longitud del segmento de recta en el interior del triángulo rectángulo dado.

A) $\frac{(2a+b)\sqrt{4a^2+ab}}{a+b}$

B) $\frac{(a+2b)\sqrt{4a^2+ab}}{a+b}$

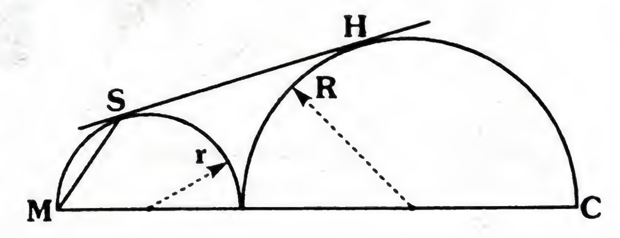
C) $\frac{(a+b)\sqrt{4a^2+ab}}{2a+b}$

D) $\frac{(a+b)\sqrt{4a^2+b^2}}{a+2b}$

E) $\frac{(a+b)^2\sqrt{4a^2+ab}}{a^2+2b^2}$

PROBLEMA Nº 92 2do SEMINARIO 98-I

En el gráfico adjunto, S y H son puntos de tangencia. Halle MS.



A) $\frac{R^2-r^2}{\sqrt{Rr}}$ B) $\frac{R^2+r^2}{\sqrt{Rr}}$

C) $\frac{2R^2}{\sqrt{r(R+r)}}$ D) $\frac{2r^2}{\sqrt{R(R+r)}}$

E) $\frac{2r^2}{\sqrt{r(r+R)}}$

PROBLEMA Nº 93 2do SEMINARIO 1998-II

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB(AB=2R) y centro O. Se toma un punto C de la circunferencia que dista "ℓ" de la tangente trazada por A, $\ell<R$.

Por O se levanta una perpendicular a $\overline{AB}$ que corta en E a $\overline{BC}$.

Calcular OE

A) $\dfrac{2R\sqrt{\ell(2R-\ell)}}{2R+\ell}$ B) $\dfrac{R\sqrt{\ell(2R+\ell)}}{2R+\ell}$

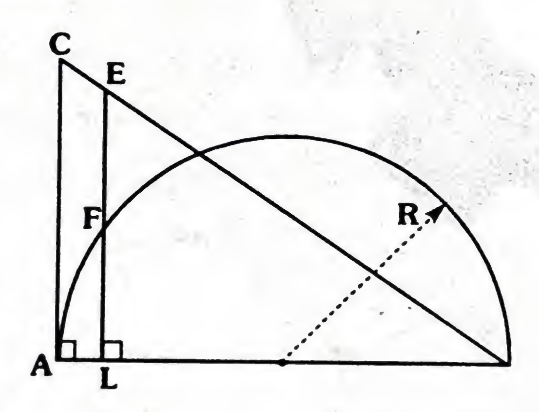
C) $\dfrac{R\sqrt{\ell(2R-\ell)}}{2R-\ell}$ D) $\dfrac{R\ell\sqrt{2R-\ell}}{2R-\ell}$

E) $\dfrac{(2R+\ell)\sqrt{\ell(2R-\ell)}}{2R-\ell}$

PROBLEMA Nº 94 2do SEMINARIO 1998-II

En la figura, AC=m; EF=FL=n,

Calcular R.



A) $\dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{n(m-2n)}{2}}$ B) $m\sqrt{n(m-2n)}$

C) $\dfrac{m}{4}\sqrt{2n(m-n)}$ D) $\dfrac{m}{4}\sqrt{\dfrac{2n}{m-2n}}$

E) $\dfrac{mn}{2\sqrt{2n(2n-m)}}$

PROBLEMA Nº 95 2do SEMINARIO 1998-II

Dado el rectángulo SAMY, de lados: SA=b y AM=a, (a>b), se traza $\overline{AN}$ perpendicular a $\overline{SM}$ de modo que prolongado corta a $\overline{SY}$ en P.

Calcular la distancia del vértice Y al segmento PM.

A) $\dfrac{b(a^2+b^2)}{\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}$ B) $\dfrac{b(a^2-b^2)}{\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}}$

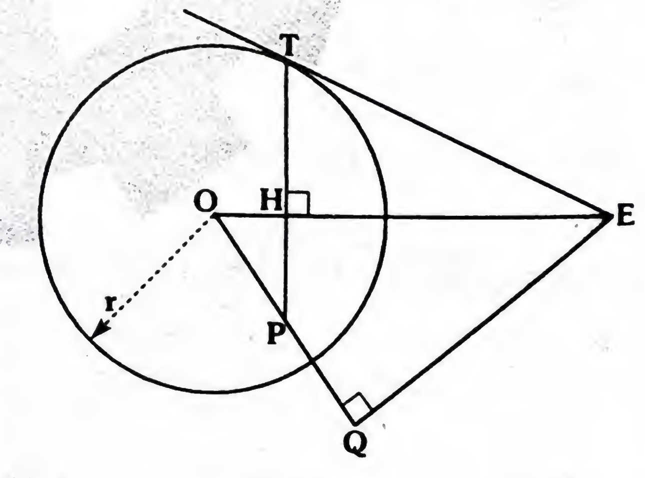
C) $\dfrac{ab(a^2+b^2)}{\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}}$ D) $\dfrac{\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}{ab(a^2-b^2)}$

E) $\dfrac{a(a^2-b^2)}{\sqrt{2a^4+b^4-2a^2b^2}}$

PROBLEMA Nº 96

1er EXAMEN PARCIAL 2004-II

En la figura mostrada, calcule r, si OP=4 y PQ=5. (T es punto de tangencia)



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 97 3er SEMINARIO 2000-II

Exteriormente a un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se construyen los

cuadrados ANMB y BEDC, tal que las distancias de N y D a la recta AC miden a y b.

Halle la distancia de B a la recta $\overleftrightarrow{MB}$.

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a+b}{3}$ C) $\frac{\sqrt{ab}}{3}$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

PROBLEMA Nº 98 2do SEMINARIO 1998-II

En el triángulo ABC, recto en A, se ubica D en $\overline{AC}$ y E en $\overline{BC}$ tal que:

m∢ABD=10° ; m∢BDE=20° y m∢DEC=30°

Si: BD=b y BE=q. Calcule AB+AD.

A) $\sqrt{\frac{b}{2}(2b-q)}$ B) $\sqrt{\frac{b}{2}(2q+b)}$

C) $\sqrt{\frac{b}{2}(2b+q)}$ D) $\sqrt{\frac{b}{2}(2b+q\sqrt{3})}$

E) $\sqrt{bq}$

PROBLEMA Nº 99 2do SEMINARIO 1998-II

En un triángulo ABC se trazan las alturas BM y AN que se intersecan en H. Si BH=6, HM=4 y $(AB)^2+(BC)^2=a^2+120$. Calcule AC.

A) $\frac{3}{2}a$ B) $\frac{2}{3}a$ C) a

D) 2a E) 3a

PROBLEMA Nº 100 2do SEMINARIO 1998-II

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), la circunferencia inscrita determina el punto de tangencia M en $\overline{BC}$. Si m∢ACB=2(m∢BAM) y el inradio mide "r". Halle la longitud del segmento que une el incentro con el circuncentro del triángulo ABC.

A) $r\sqrt{3}$ B) $\frac{r}{2}\sqrt{5}$ C) $\frac{r}{2}\sqrt{3}$

D) $2r\sqrt{2}$ E) $r\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 101 2do SEMINARIO 1998-II

Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra circunferencia de centro O y radio r.

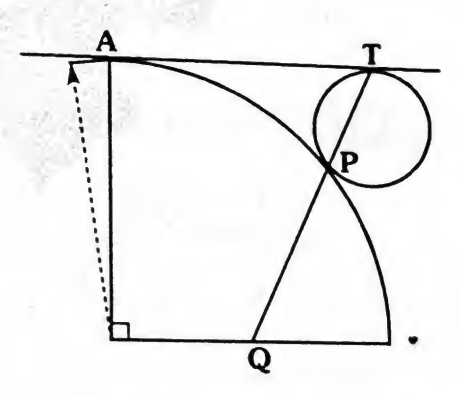
Si $\frac{1}{(AO)^2}+\frac{1}{(OC)^2}=\frac{1}{9}$, halle r

A) 9 B) 3 C) $3\sqrt{2}$

D) 12 E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 102 3er SEMINARIO 2000-II

En la figura mostrada, A, T y P son puntos de tangencia. Si PT=2μ y PQ=7μ. Halle AT



A) 6μ B) 3μ C) 4μ

D) 2μ E) 8μ

PROBLEMA Nº 103 3er SEMINARIO 1977-II

En el triángulo acutángulo ABC, se traza la altura BH, hallar las longitudes de $\overline{KH}$

y $\overline{DN}$ ($\overline{DN}$ → flecha o sagita de la cuerda AC). Si AH=15, HC=4, BH=12 y K es circuncentro del triángulo ABC.

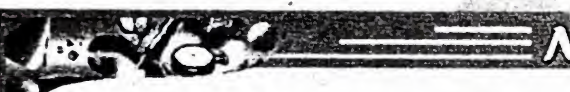
A) 6,51 y 6,62 B) $\sqrt{102,5}$ y 3,5

C) 5,16 y 6,82 D) 6,41 y 3,62

E) $\sqrt{102,5}$ y 3,82

PROBLEMA Nº 104 3er SEMINARIO 1977-II

Hallar la distancia del incentro I de un triángulo rectángulo ABC a la altura BH relativa a la hipotenusa, si sus lados miden 30μ, 40μ y 50μ.



Generalice usted para lados del triángulo rectángulo de lados a, b y c.

A) 2 B) 3 C) 1,5

D) 3,5 E) 2,5

PROBLEMA Nº 105 3er SEMINARIO 2008-I

Se tiene un triángulo rectángulo PQR, recto en Q y un cuadrado ABCD inscrito al triángulo ($B \in \overline{QR}$; A y $D \in \overline{PR}$).

Calcule la distancia de Q a $\overline{BC}$, si las distancias de A y D a $\overline{QR}$ y $\overline{PQ}$ son "a" y "b" respectivamente.

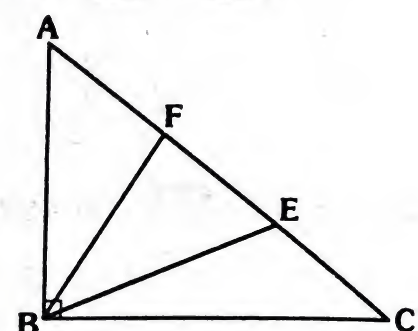
A) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 106 2do SEMINARIO 2005-II

En la figura mostrada, AB=3, BC=4 y FE=EC=2. Halle $(BE)^2-(BF)^2$.



A) 3/5
B) 4/5
C) 1
D) 1/2
E) 1/3

PROBLEMA Nº 107 3er SEMINARIO 2008-I

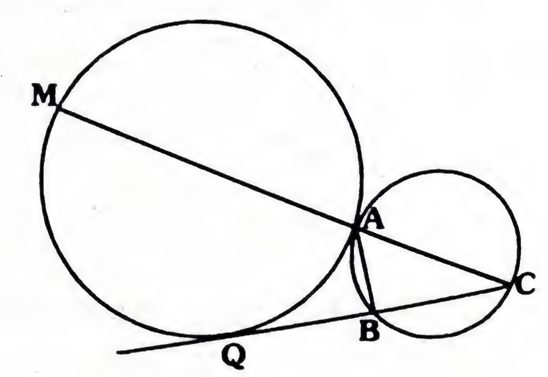
En una circunferencia se inscribe el triángulo ABC ($\overline{AC}$ es diámetro). D es un punto de $\overline{AC}$, se traza la cuerda $\overline{EC}$ paralela a $\overline{AB}$. Si AD=2, DC=8, entonces $(BD)^2+(DE)^2$ es:

A) 66 B) 64 C) 68

D) 72 E) 76

PROBLEMA Nº 108 3er SEMINARIO 2008-I

En la figura mostrada Q es punto de tangencia. Hallar AM, si AB=c, AC=b, BC=a, y $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.



A) $\dfrac{c(p-c)(p-b)}{(b-c)^2}$ B) $\dfrac{b(p-c)(p-b)}{(c-b)^2}$

C) $\dfrac{a(p-c)(p-b)}{(b-c)^2}$ D) $\dfrac{b[a^2-(b-c)^2]}{(b-c)^2}$

E) $\dfrac{b(p-c)(p-a)}{(b-c)^2}$

PROBLEMA Nº 109 3er SEMINARIO 1997-I

En el triángulo regular ABC, en el interior se ubica un punto cualquiera M, hallar la longitud de la mediana relativa a $\overline{BC}$ en el triángulo BMC, si AM=3, BM=5 y CM=4.

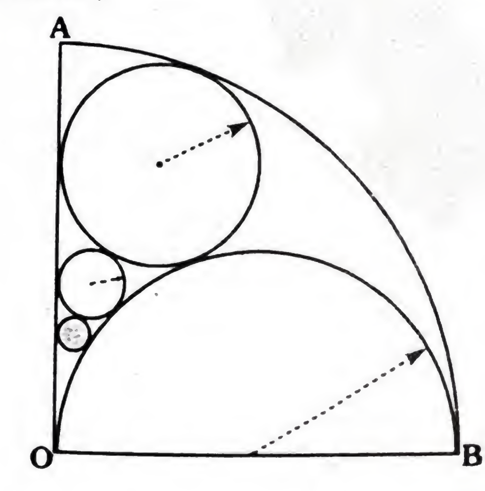
A) $\sqrt{14,25-3\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{14-3\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{10+3\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{14,25+3\sqrt{3}}$

E) $\sqrt{7+3\sqrt{3}}$

PROBLEMA Nº 110 3er SEMINARIO 1997-I

En la figura, hallar el radio del círculo sombreado. Si AO=OB=R (O es centro del cuadrante)



A) $\dfrac{R}{4}(3-2\sqrt{2})$ B) $\dfrac{R}{2}(3-2\sqrt{2})$

C) $\dfrac{R}{8}$ D) $\dfrac{R}{16}$

E) $\dfrac{R}{4}(3+2\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº 111

Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores en el punto C, en la circunferencia mayor se traza la cuerda AB cuya prolongación es tangente a la circunferencia menor en el punto D. Por el punto D se traza una cuerda en la circunferencia menor cuya prolongación es tangente a la mayor en el punto E. Si AC=7μ ; BC=4μ y DE=8μ . Hallar CD.

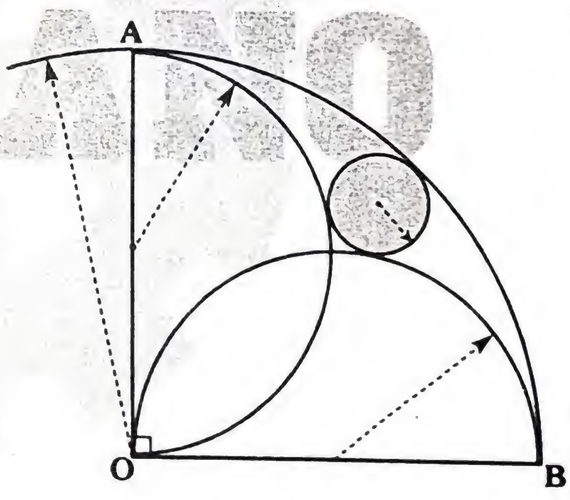
A) 5μ B) 6μ C) 7μ

D) 6,5μ E) 5,6μ

PROBLEMA Nº 112

Hallar el radio del círculo sombreado.

Si: $OA=OB=(5+2\sqrt{2})$m



A) 1m B) $\dfrac{1}{2}$m C) $\dfrac{1}{3}$m

D) $\dfrac{2}{3}$m E) $\dfrac{1}{4}$m

PROBLEMA Nº 113

Sea el cuadrado PQRT circunscrito a una circunferencia de radio 4m. Se traza con centro Q el cuadrante PQR que corta a la

circunferencia en M y N, hallar la distancia de M a $\overleftrightarrow{PR}$.

A) $2\sqrt{7}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{14}$

D) $\sqrt{14}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 114

Hallar el tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados (a y b) y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados son perpendiculares.

Para que condiciones existe el triángulo.

PROBLEMA Nº 115

Dado el triángulo ABC, se trazan las medianas AD, BE y CF que miden respectivamente x, y, z.

Hallar AB.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{2(x^2+y^2-z^2)}$

B) $\frac{2}{3}\sqrt{2(x^2+y^2)-z^2}$

C) $\frac{1}{3}\sqrt{2(x^2+y^2-2z^2)}$

D) $\frac{4}{3}\sqrt{2(x^2+y^2-z^2)}$

E) $\frac{2}{3}\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$

PROBLEMA Nº 116

Los lados del triángulo ABC miden AB=21μ ; AC=17μ y BC=26μ. Calcular la distancia del vértice B al punto medio de la mediana AM.

A) 16μ B) 14μ C) 15μ

D) 17μ E) 18μ

PROBLEMA Nº 117

Sea el triángulo ABC y $\overline{BM}$ su mediana, se traza $\overline{MN}\perp\overline{BM}$ ($N\in\overline{AB}$) tal que:

$$2(m\sphericalangle AMN)=m\sphericalangle BCA$$

Si se sabe además que $(AB)^2-(BC)^2=k^2$. Calcular BM

A) $k\sqrt{2}$ B) 2k C) k

D) $k\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{3}{2}k$

PROBLEMA Nº 118 3er SEMINARIO 2000-I

En un triángulo isósceles ABC, se cumple que $m\sphericalangle ABC=20°$, AB=BC=a y AC=b. Calcule a^3+b^3.

A) $2ab^2$ B) $\frac{12a^2b^2-a^4}{a}$

C) $3ab^2$ D) $3a^2b$

E) $6ab^2$

PROBLEMA Nº 119 3er SEMINARIO 2000-I

En un triángulo ABC, cuyos lados miden AB=13, BC=15 y AC=14, hallar la longitud del segmento mediatriz de $\overline{AC}$ limitado por los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

A) 24/5 B) 27/5 C) 28/3

D) 6 E) 5

PROBLEMA Nº 120 3er SEMINARIO 2000-I

Las bases de un trapecio ABCD miden BC=4 y AD=10 los lados no paralelos miden 5 y 7. Halle AC.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 7 E) 4

PROBLEMA Nº 121 3er SEMINARIO 2000-I

Se tiene dos circunferencias secantes cuyos radios miden 13 cm y 15 cm. Si la distancia entre los centros es 14 cm.

¿Cuánto mide la longitud de la cuerda común de las circunferencias?

A) 28 cm B) 26 cm C) 24 cm
D) 22 cm E) 20 cm

PROBLEMA Nº 122

Se tiene el hexágono regular ABCDEF de centro O y su lado mide $\sqrt{2}$, en su interior se ubica P. Si:

$$(PA)^2+(PB)^2+(PC)^2+(PD)^2+(PE)^2+(PF)^2=18$$

Halle OP.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\mu$ B) 1μ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\mu$
D) $\frac{\sqrt{5}}{3}\mu$ E) $\frac{3}{2}\mu$

PROBLEMA Nº 123

En un cuadrilátero convexo ABCD,

$\overline{AB}\cong\overline{CD}$; $m\sphericalangle BDC=m\sphericalangle BAD+m\sphericalangle BDA$;

$(BC)^2+(AD)^2-2(BD)^2=128u^2$

Halle la longitud de $\overline{CD}$.

A) 12 B) 10 C) 9
D) 8 E) 6

PROBLEMA Nº 124 2do SEMINARIO 1999-II

Se tiene el trapecio escaleno, sus diagonales miden 10μ y 17μ y su mediana mide $10{,}5\mu$. Calcular la longitud de la altura del trapecio.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 8 E) 14

PROBLEMA Nº 125 3er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC, AB=c; BC=a y AC=b, se traza la bisectriz CD del ángulo C. $D\in\overline{AB}$, si p es el semiperímetro del triángulo ABC, demostrar:

$$CD=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUÁDRILATERO

PROBLEMA Nº 126

Dado el pentágono regular ABCDE, $P\in\overset{\frown}{AE}$, EP=b y PA=a. Hallar PB.

A) $a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+b$ B) $a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-b$

C) $\sqrt{ab}$ D) $a\sqrt{5}+b$

E) $a(\sqrt{5}+1)+b$

PROBLEMA Nº 127 3er SEMINARIO 2000-II

En un cuadrilátero inscrito ABCD en una circunferencia, se cumple que $AB=6\mu$, $AD=10\mu$ y $\frac{CD}{20}+\frac{BC}{12}=\frac{AC}{15}$.

Calcule el radio de la circunferencia.

A) 5 μ   B) 6 μ   C) 7,5 μ
D) 8 μ   E) $3\sqrt{2}\mu$

PROBLEMA Nº 128 3er SEMINARIO 2000-II

En un romboide ABCD(AB>BC), se traza la circunferencia que pasa por A y por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Si el rayo AD interseca a la circunferencia en N. Si $(AB)^2+2(AD)(AN)=64\mu^2$.

Halle AC.

A) 5 μ   B) 6 μ   C) 7 μ
D) 8 μ   E) 4 μ

PROBLEMA Nº 129 3er SEMINARIO 2001-I

Las longitudes de los lados de un cuadrilátero inscrito son 14m; 30m; 40m y 48m (en ese orden).

Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 13m   B) 14m   C) 15m
D) 16m   E) 17m

PROBLEMA Nº 130 3er SEMINARIO 2001-I

ABCD es un trapecio isósceles $(\overline{BC}//\overline{AD})$, CD<BC<AD.

Si AC=9μ y (BC)(AD)=72. Calcule AB.

A) 7 μ   B) 6 μ   C) 5 μ
D) 4 μ   E) 3 μ

PROBLEMA Nº 131 3er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC, m∢ABC=60°, I es incentro del triángulo ABC y O es circuncentro del triángulo AIC.

Si AB+BC=18. Calcule OB.

A) $6\sqrt{2}\mu$ B) $4\sqrt{3}\mu$ C) $5\sqrt{3}\mu$
D) $6\sqrt{3}\mu$ E) 8μ

PROBLEMA Nº 132 3er SEMINARIO 2001-I

En una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y D en ese orden, tal que AD=DC, $\frac{AD}{AC}=\frac{25}{48}$ y AB+BC=64μ.

Calcule BD.

A) 28 μ   B) 30 μ   C) $\frac{100}{3}\mu$
D) 33μ   E) 35μ

PROBLEMA Nº 133 2do SEMINARIO 2007-I

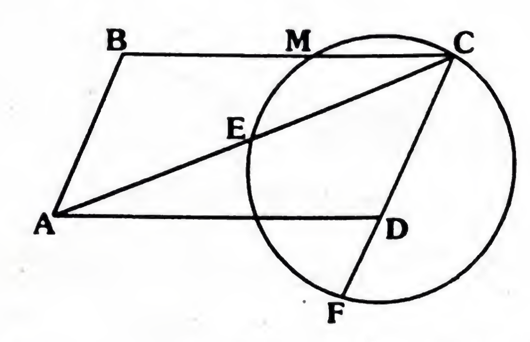
En un trapezoide ABCD la m∢B=m∢D=90°, AC=17 y BD=15.

Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Calcule MF.

A) 3   B) 2   C) 5
D) 1   E) 4

PROBLEMA Nº 134

En la figura, ABCD es un paralelogramo, si (BC)(MC)+(CD)(FC)=36μ² y AC=9μ. Calcular AE.



A) 4 μ   B) 5 μ   C) 6 μ
D) 8 μ   E) 4,5 μ

PROBLEMA Nº 135 3er SEMINARIO 2007-I

Sea el trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia de centro O, las longitudes de las bases son: base mayor B; base menor b y la longitud de una diagonal d. Demostrar que:

$$B^2+b^2+6Bd=4d^2$$

PROBLEMA Nº 136 3er SEMINARIO 2007-I

En un cuadrilátero ABCD; las diagonales son perpendiculares, la $m\sphericalangle ABC=90^\circ$, $m\sphericalangle ABD+m\sphericalangle DCB=90^\circ$. Si AD=26dm y la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{BD}$ mide 12dm; entonces la distancia del punto medio de $\overline{BD}$ a $\overline{AC}$ (en dm) es:

A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

PROBLEMA Nº 137 3er SEMINARIO 2007-I

ABCDEFG es un heptágono regular, demostrar que:

$$\frac{1}{AE}+\frac{1}{DF}=\frac{1}{AB}$$

PROBLEMA Nº 138 3er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$; $E\in\overline{BC}$ tal que $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BDE$; $F\in\overline{AB}$ tal que $\overline{EF}//\overline{AC}$. Si $(BE)(BF)=16\mu^2$ y $DE=3\mu$. Calcule BD (en μ).

A) 3 B) 1 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 139 9no SEMINARIO 1999-II

En un endecágono regular ABCD... K, si $(AG)(AI)-(AC)(AE)=36$. ¿Cuánto es $(AE)^2-(AI)^2$?

A) 18 B) $18\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$
D) 36 E) $36\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 140

ABCD es un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 cm y 50 cm y los lados no paralelos 30 cm.
Halle la longitud de la diagonal.

A) 32 cm B) 40 cm C) 44 cm
D) 50 cm E) 30 cm

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 141

Las longitudes de los lados de un triángulo miden a, b y c, las alturas relativas a dichos lados miden h_a, h_b y h_c respectivamente, el circunradio es 2 y abc=4, calcule $h_ah_bh_c$.

A) 1/4 B) 1/2
C) 1/6 D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{2}/2$

PROBLEMA Nº 142

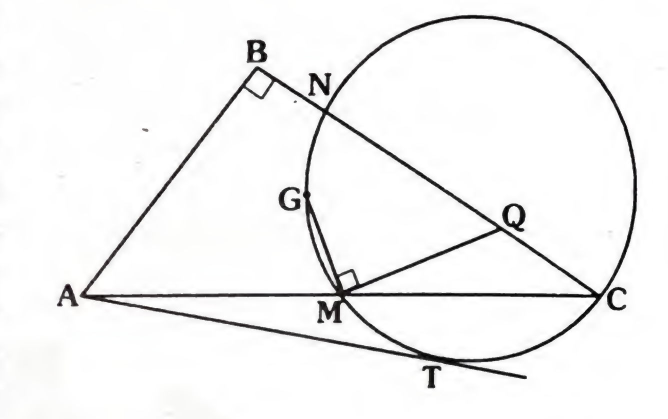
Se tiene una circunferencia de diámetro CD y centro O, se traza una cuerda AB perpendicular al diámetro y sobre su prolongación se ubica P, desde el cual se traza el segmento tangente que mide "a". Si AC=b. Calcule PC.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$
C) a+b D) $\sqrt{2ab}$
E) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

PROBLEMA Nº 143

En el gráfico, T es punto de tangencia, G es baricentro del triángulo ABC, si AM=MC y (NQ)(BC)=24.

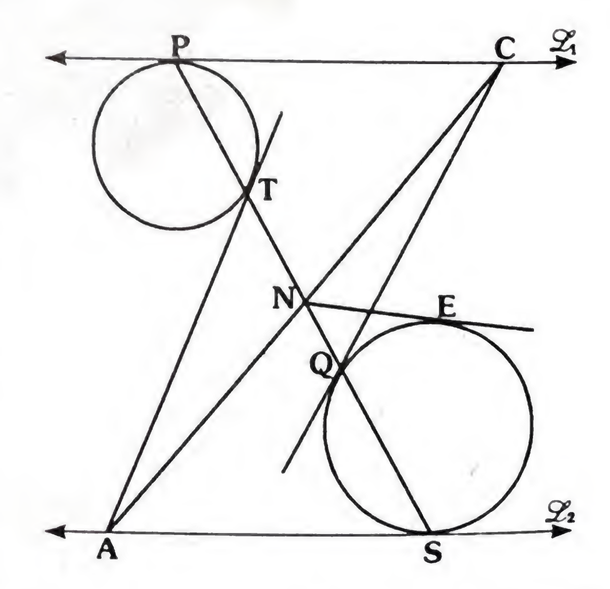
Calcule AT.



A) 4 B) 6 C) $8\sqrt{2}$
D) $9\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 144

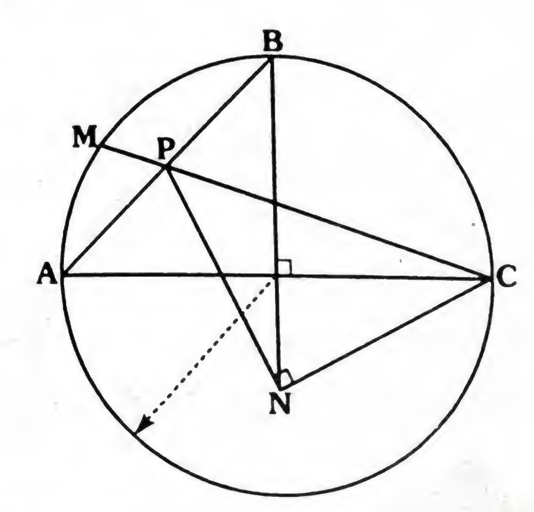
En el gráfico, E, P, T, Q y S son puntos de tangencia y $\vec{\mathscr{L}}_1 // \vec{\mathscr{L}}_2$. Si PT=5, TN=4 y NQ=3. Calcule NE.



A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, PM=a y NC=b. Calcule (AP)(PB).



A) 2ab B) $ab\sqrt{2}$ C) ab

D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 146

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se ubican B y F (B en $\overset{\frown}{AF}$), se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AD}$ (H en $\overline{AD}$) y se ubica E en $\overline{AF}$ tal que:

$$m\measuredangle BHE + m\measuredangle DEF = 90° \quad y \quad m\overset{\frown}{BF} = 2\theta$$

Calcule $m\measuredangle AEB$.

A) 2θ B) θ

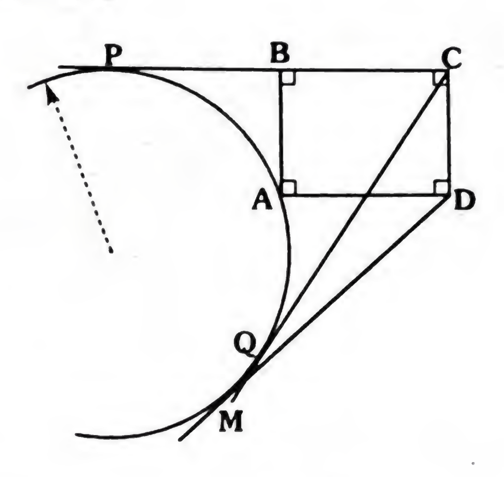
C) $90° - \theta$ D) $90° - \frac{\theta}{2}$

E) $90° - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 147

En el gráfico P, Q y M son puntos de tangencia. Si $(BP)^2 + (DM)^2 = 18$.

Calcule CQ.



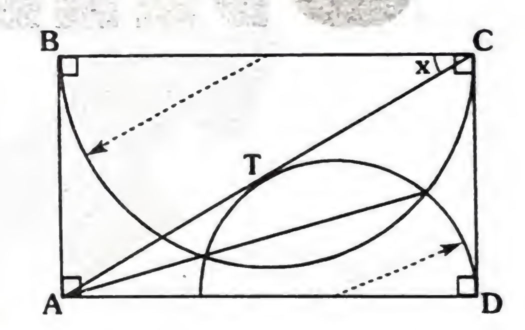
A) 3 B) 6

C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, T es punto de tangencia, calcule x.



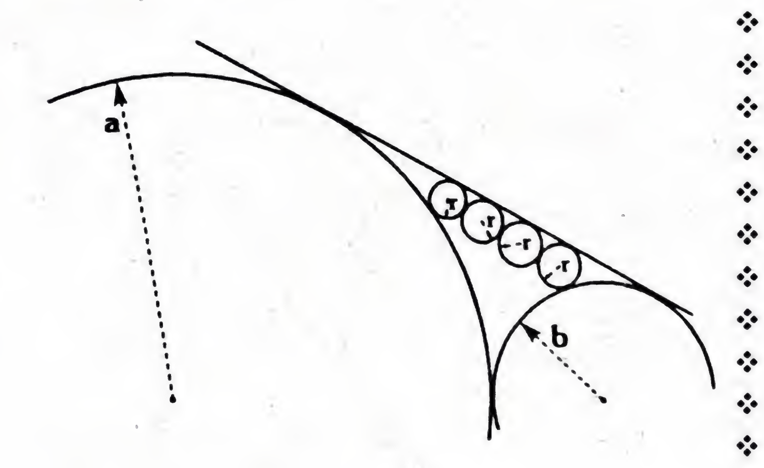
A) 30° B) 45°

C) 37° D) $\frac{53°}{2}$

E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 149

En el gráfico, indique la relación entre a, b y r.



A) $2r+\sqrt{r}(\sqrt{a+b})=\sqrt{ab}$

B) $r=\sqrt[3]{a(a^2+b^2)}$

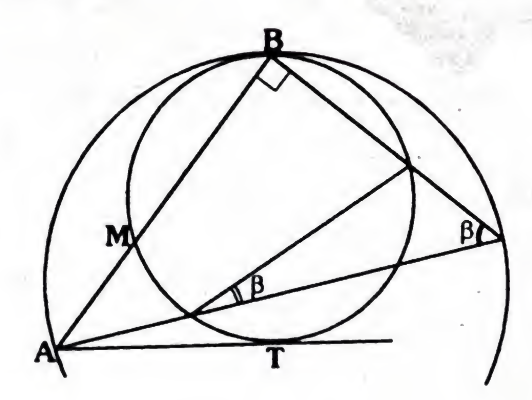
C) $3r+\sqrt{ab}=a+b$

D) $3r+\sqrt{r}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt{ab}$

E) $3r+2\sqrt{r}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

PROBLEMA Nº 150

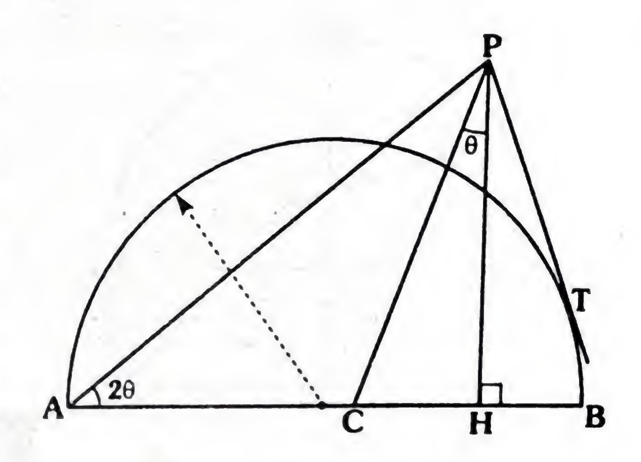
En el gráfico, B y T son puntos de tangencias. Si AM=a,
Calcule AT.



A) $a\sqrt{2}$
B) $a\sqrt{13}$
C) $a\sqrt{3}$
D) $2a\sqrt{2}$
E) a

PROBLEMA Nº 151

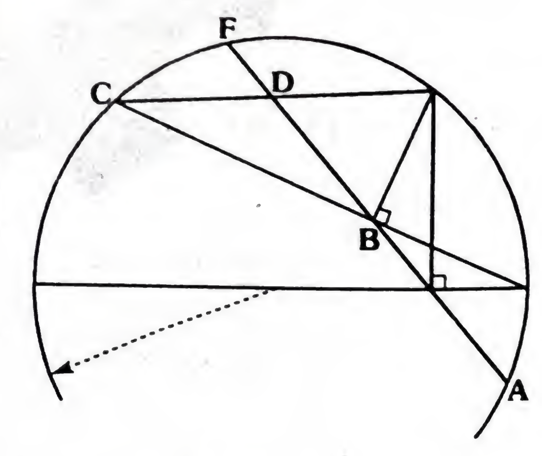
En el gráfico, T es punto de tangencia. Si AC=11 y HC=HB=1, calcule TP.



A) $\sqrt{13}$
B) $2\sqrt{13}$
C) $3\sqrt{13}$
D) $3\sqrt{2}$
E) 5

PROBLEMA Nº 152

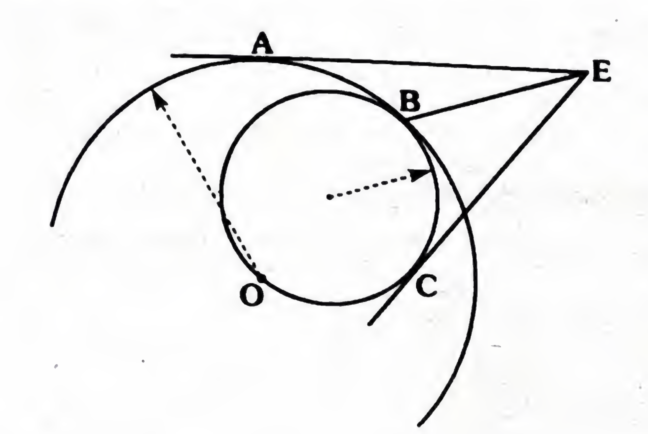
En el gráfico, CD=8 y AB=32.
Calcule FD.



A) 1
B) 2
C) 8/5
D) 16/5
E) 3

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Si EA=a y EC=b, calcule EB.



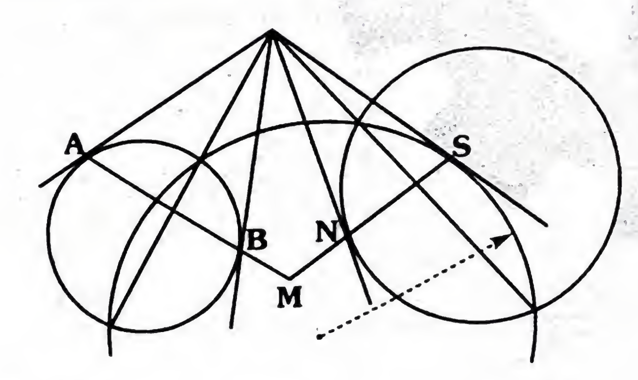
A) $\sqrt{a^2-b^2}$ B) $\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\sqrt{2b^2-a^2}$

E) $\sqrt{2a^2-b^2}$

PROBLEMA Nº 154

En el gráfico A, B, C y D son puntos de tangencia. Si AB=7; BM=1 y MN=2. Calcule NS.

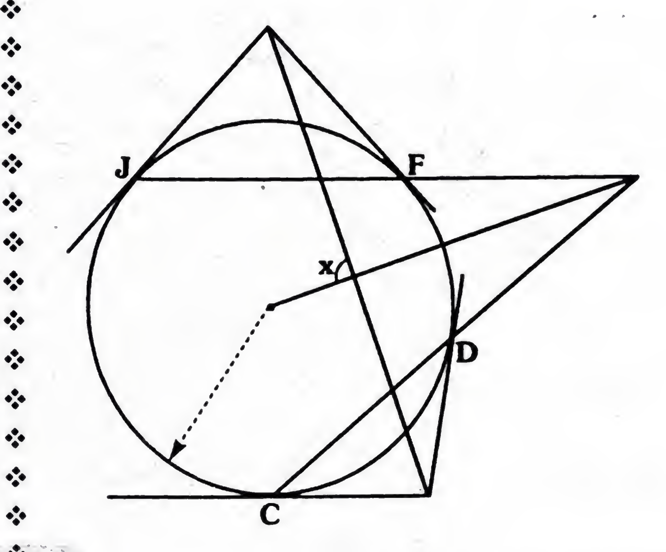


A) 2 B) 5 C) 4
D) 4,5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 155

En el gráfico, J, F, D y C son puntos de tangencia.

Calcule x.

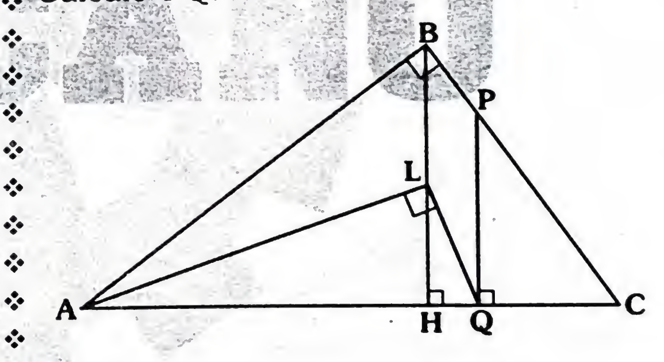


A) 90° B) 120° C) 105°
D) 106° E) 135°

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, BL=a y LH=b.

Calcule PQ.



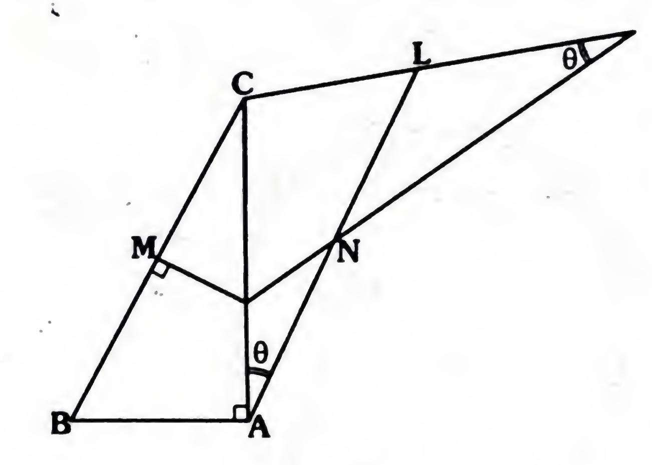
A) $\dfrac{a^2(a+b)}{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{b^2(a+b)}{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{a(a+2b)}{a+b}$ D) $\dfrac{b(a+2b)}{a+b}$

E) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

PROBLEMA Nº 157

En el gráfico, BM=MC y AN=NL. Si LC=a, calcule AB.

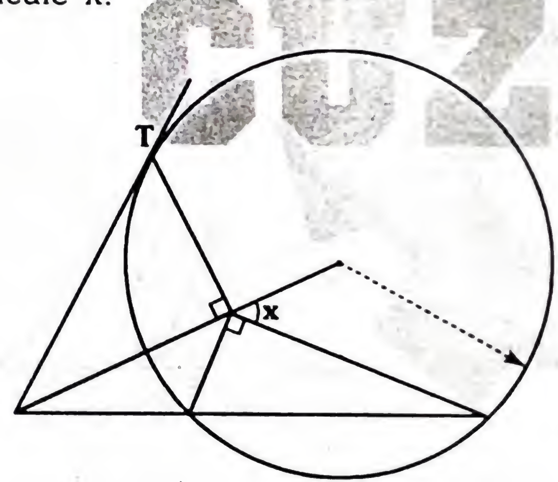


A) $a\sqrt{2}$ B) a C) 2a

D) $\frac{a}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 158

En el gráfico T es punto de tangencia. Calcule x.



A) 45° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 26,5°

PROBLEMA Nº 159

Se tiene el paralelogramo ABCD, H es ortocentro del triángulo BCD y Q es la proyección ortogonal de B sobre $\overline{AH}$. Si CD=6 y AQ=4.

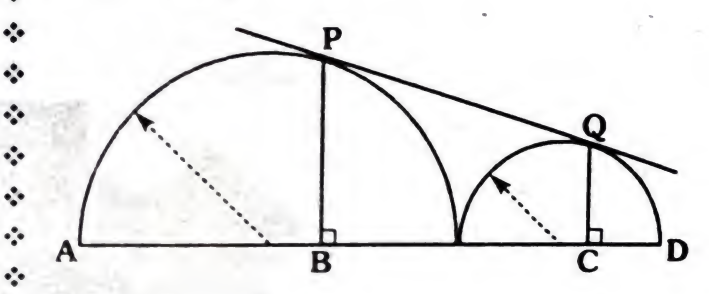
Calcule QH.

A) 6 B) $3\sqrt{2}$ C) 4
D) 5 E) 3

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $\frac{AB}{CD}=k$.

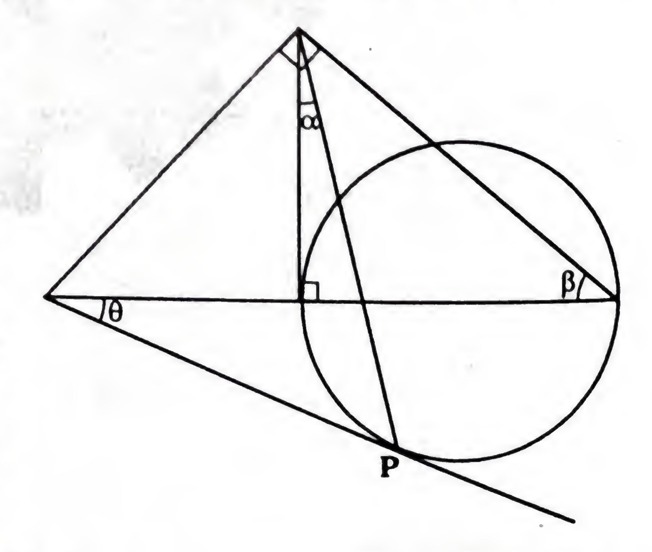
Calcule $\frac{PB}{QC}$.



A) k B) k^2 C) $\sqrt{k}$
D) $k\sqrt{2}$ E) $k\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 161

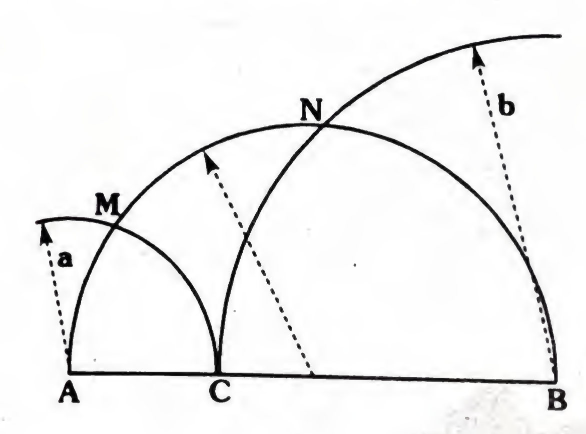
En el gráfico, P es punto de tangencia. Indique la relación entre α, β y θ.



A) β=θ+α B) α+β+θ=90°
C) θ+β+2α=90° D) θ+45°=α+β
E) 2θ+α+β=90°

PROBLEMA Nº 162

En el gráfico, calcule la razón entre las longitudes de las proyecciones ortogonales de los arcos MC y CN sobre $\overleftrightarrow{AB}$.

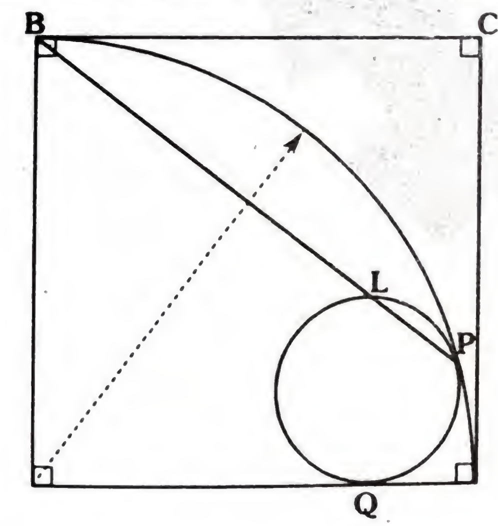


A) a/b B) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ C) $\dfrac{a^2}{b^2}$

D) $\dfrac{a^3}{b^3}$ E) 1

PROBLEMA Nº 163

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AQ=a y BL=b. Calcule BC.



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$

C) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ D) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

E) $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$

PROBLEMA Nº 164

En el triángulo ABC, se traza la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{AC}$, la cual es tangente a $\overline{AC}$ en Q, a $\overrightarrow{BA}$ en P y $\overrightarrow{BC}$ en S.

Si: $\dfrac{1}{(AQ)^2}-\dfrac{1}{(CS)^2}=k\left[\dfrac{1}{(PQ)^2}-\dfrac{1}{(QS)^2}\right]$

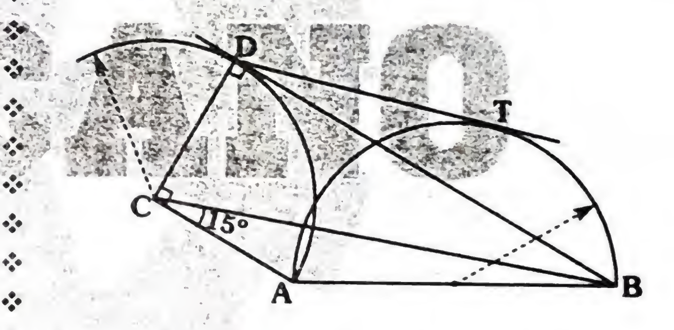
Calcule k.

A) 2 B) 1 C) 4

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 165

En el gráfico BC=8. T es punto de tangencia. Calcule DT.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3

D) $\sqrt{6}$ E) 4

PROBLEMA Nº 166

Calcule la longitud de la bisectriz interior trazada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, sabiendo que dicha bisectriz determina en la hipotenusa segmentos que miden m y n, tal que $m^2n^2=2(m^2+n^2)$.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1

D) 4 E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA N° 167

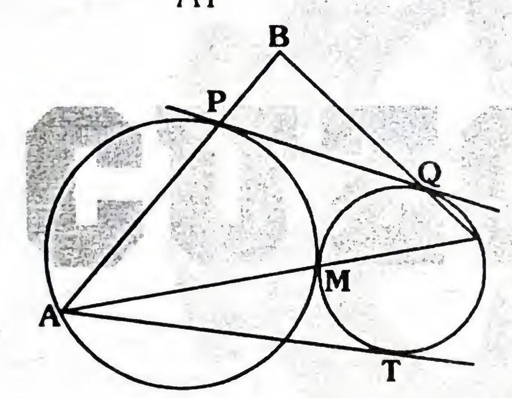
En el triángulo rectángulo ABC(AB=BC), en $\overline{AC}$ se ubican M y N tal que m∢MBN=45° y la circunferencia circunscrita al triángulo MBN intersecta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Si AP=2 y QC=3, calcule AC.

A) $4\sqrt{2}$ B) 6 C) 5
D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

PROBLEMA N° 168

En el gráfico, M, P, T y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{AB}{AT}$.

A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$
E) 2



PROBLEMA N° 169

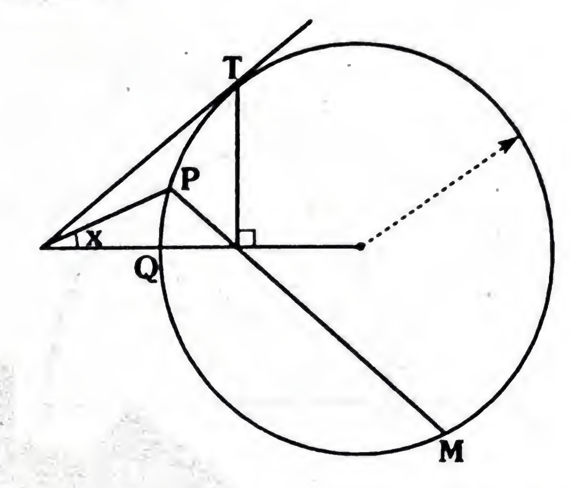
En la prolongación del diámetro $\overline{AB}$ de una semicircunferencia se ubica P y se traza $\overline{PT}$ tangente a la semicircunferencia (T es punto de tangencia) y se prolonga $\overline{TB}$ hasta L, luego se traza $\overline{TH}$ perpendicular a (H en $\overline{AB}$), las prolongaciones de $\overline{PL}$ y $\overline{TH}$ se cortan en M. Si m∢AMP=90°, AH=3 y BP=10. Calcule LM.

A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{26}$ C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{30}$ E) $\sqrt{23}$

PROBLEMA N° 170

En el gráfico, T es punto de tangencia y m$\overset{\frown}{PQM}$=140°.

Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 40°
D) 35° E) 25°

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA N° 171

En el triángulo ABC, se cumple que la altura $\overline{BH}$, la mediana $\overline{AM}$ y la bisectriz interior $\overline{CN}$ son concurrentes. Si AH=1 y HC=2. Calcule AB.

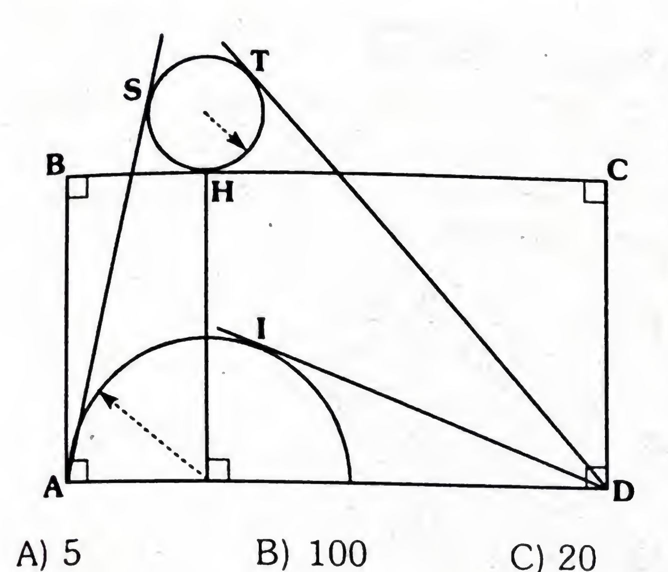
A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{14}$
C) $\sqrt{21}$ D) $\sqrt{33}$
E) $\sqrt{39}$

PROBLEMA N° 172

En el gráfico, ABCD es un rectángulo. Si ID=5.

Calcule $(DT)^2-(AS)^2$

(S, T, H e I son puntos de tangencia)



A) 5 B) 100 C) 20
D) 50 E) 25

PROBLEMA Nº 173

En el paralelogramo ABCD, se cumple que AB=a y BC=b, las bisectrices exteriores desde B y C se cortan en P.

Si: $2a^2+b^2=10$ y $ab=3$.

Calcule $(PA)^2+(PD)^2$

A) 6 B) 10 C) 12
D) 13 E) 16

PROBLEMA Nº 174

En el triángulo ABC, $m\measuredangle BCA=\beta$ y $(BC)^2-(AB)^2=(AB)(AC)$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) β B) $90°-\beta$ C) 2β
D) $45°-\beta$ E) $30°+\beta$

PROBLEMA Nº 175

Desde el punto P exterior a una semicircunferencia de diámetro AB, se traza la tangente PT (T punto de tangencia).

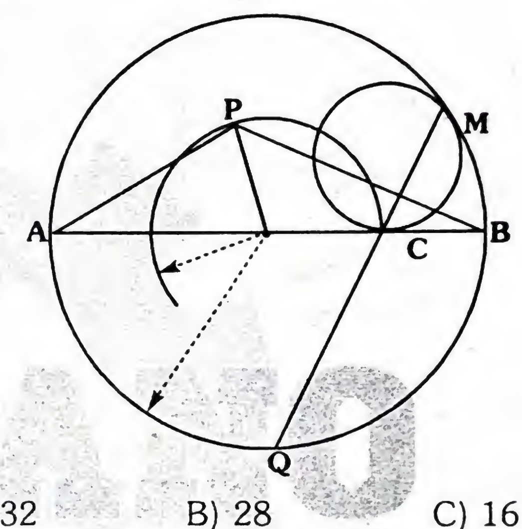
Si $(PA)^2+(PB)^2-(AB)^2=8$. Calcule PT.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 176

En el gráfico, M y C son puntos de tangencia.

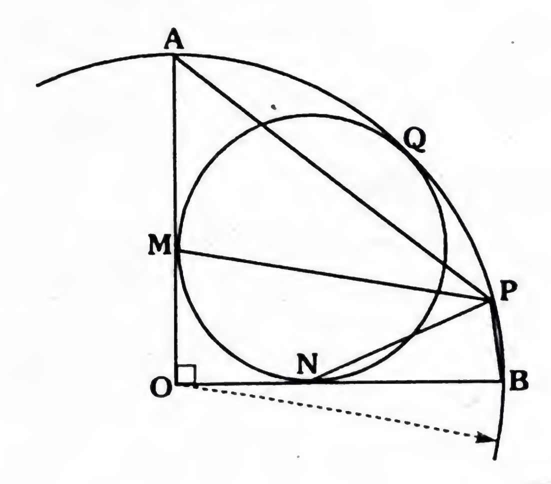
Si QC=4, calcule $(PA)^2+(PB)^2$.



A) 32 B) 28 C) 16
D) 36 E) 64

PROBLEMA Nº 177

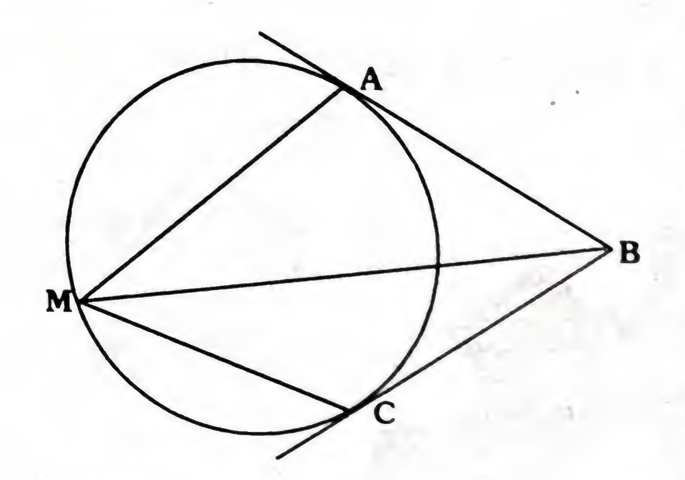
En el gráfico, M, N y Q son puntos de tangencia. Si $(PM)^2-(NP)^2=2(\sqrt{2}-1)$, calcule $(PA)^2-(PB)^2$.



A) $\sqrt{2}+1$ B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 178

En el gráfico, A y C son puntos de tangencia y $m\measuredangle ABC=60°$. Si AM=a y MC=b. Calcule BM.



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$
C) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ D) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$
E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 179

En el triángulo ABC obtuso en C, se cumple: $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$

Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 120° B) 135° C) 150°
D) 127° E) 143°

PROBLEMA Nº 180

En el cuadrado ABCD, se ubica P en la región interior, tal que AP=2; PD=1 y PB=3. Calcule BC.

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

PROBLEMA Nº 181

En el triángulo ABC se cumple que AB=c, BC=a y AC=b y las medianas relativas a dichos lados mide m_c, m_a, m_b respectivamente.

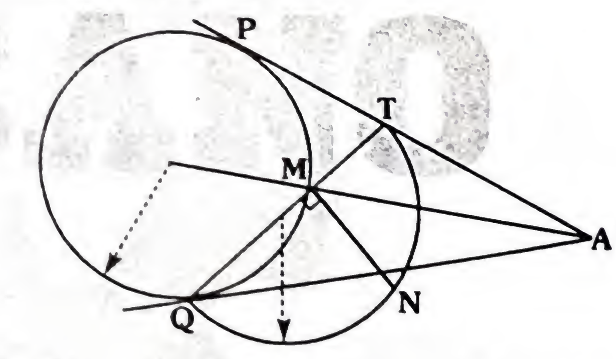
Calcule $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{m_a^4+m_b^4+m_c^4}$

A) 1 B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 182

Según el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AT=6 y TP=5.

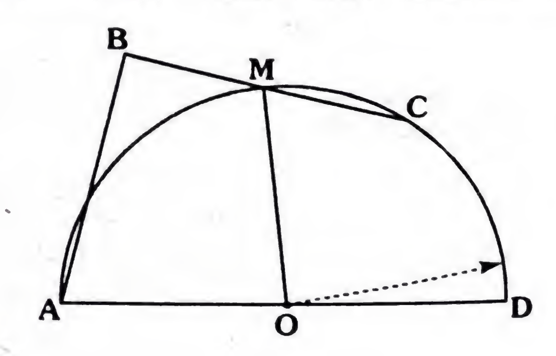
Calcule $(AM)^2+(MN)^2$.



A) 66 B) 64 C) 44
D) 55 E) 40

PROBLEMA Nº 183

En el siguiente gráfico, BM=MC y $(AB)^2+(BD)^2-(BC)^2=36$. Calcule OM.

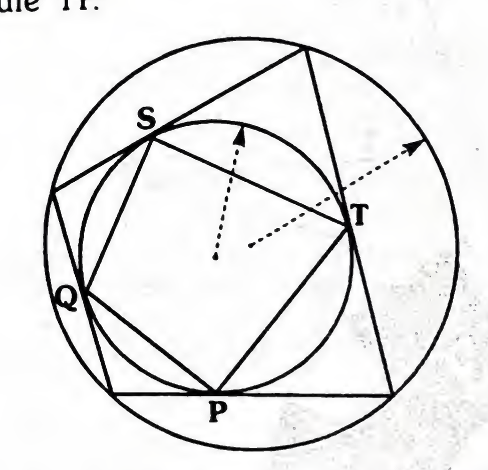


A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) 3

PROBLEMA Nº 184

En el gráfico, P, Q, S y T son puntos de tangencia. Si PQ=a, QS=b y ST=c. Calcule TP.



A) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ B) $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$

C) ab/c D) ac/b

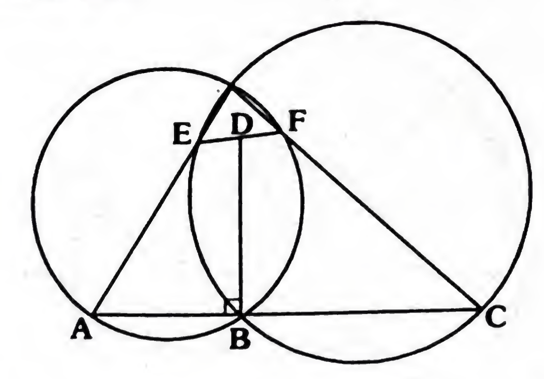
E) $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$

PROBLEMA Nº 185

En el gráfico, se cumple:

(AB)(BC)−(ED)(DF)=k

Calcule BD.



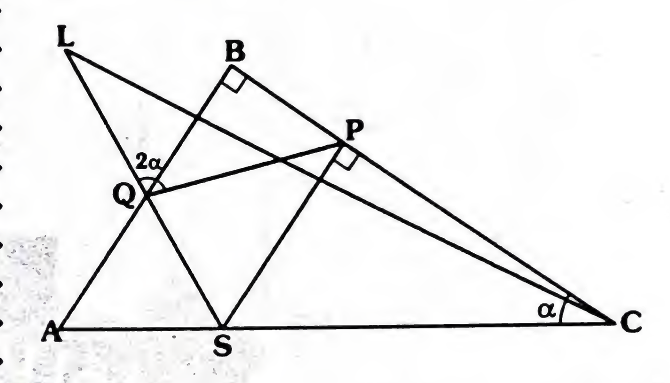
A) $\sqrt{k}$ B) $2\sqrt{k}$ C) $\sqrt{k}/2$

D) $4\sqrt{k}$ E) $3\sqrt{k}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 186

En el gráfico, LQ=QS y PQ+QS=ℓ, calcule LC.



A) $\ell\cos\alpha$ B) $\ell\csc\alpha$

C) $\ell\sec\alpha$ D) $\ell\operatorname{sen}\alpha$

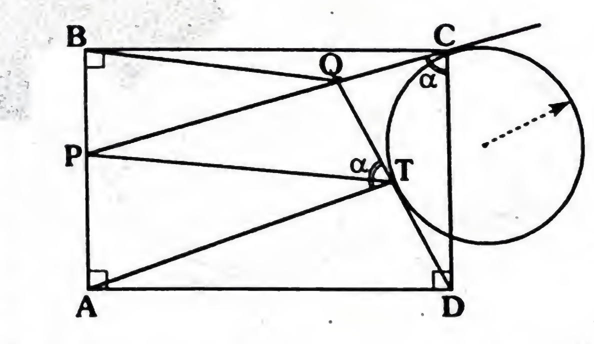
E) $\ell\operatorname{sen}2\alpha$

PROBLEMA Nº 187

En el gráfico, C y T son puntos de tangencia.

Si $\overline{PC}//\overline{AT}$, CD=4 y $(PA)^2+(PT)^2=41$.

Calcule BQ



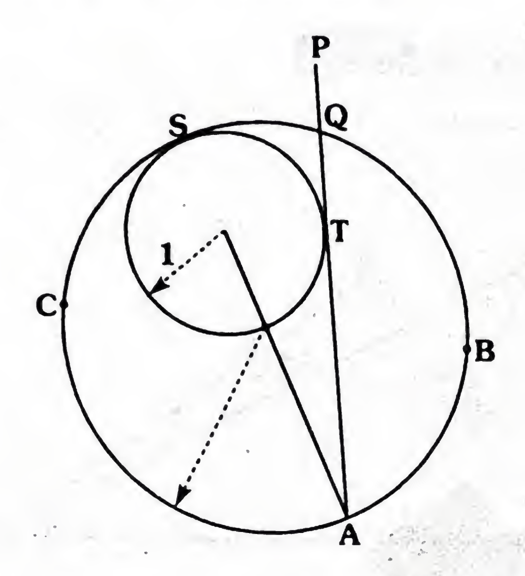
A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 188

En el gráfico, $\overline{BC}$ es diámetro y 2(AT)=3(PQ).

Calcule: $(AC)^2+(AB)^2+(PC)^2+(PB)^2$, siendo T y S puntos de tangencia.

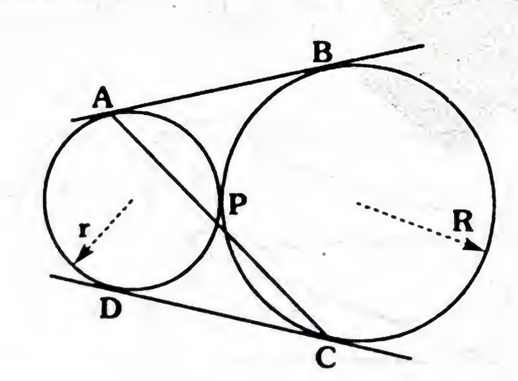


A) 40 B) $4\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{6}$

D) $\frac{80}{3}$ E) $\frac{160}{3}$

PROBLEMA Nº 189

Según el gráfico, A, B, C, D y P son puntos de tangencia. Si R=3 y r=2. Calcule AC.



A) $\frac{14}{5}\sqrt{6}$ B) $\frac{13}{5}\sqrt{6}$

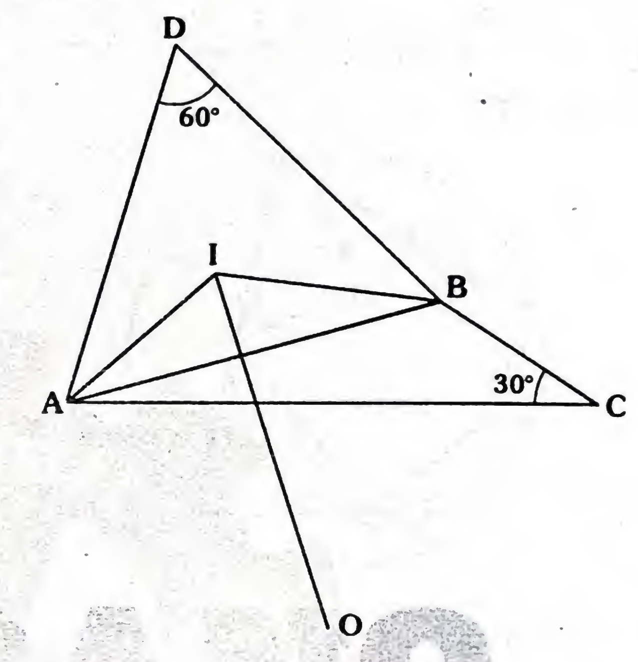
C) $\frac{28}{5}\sqrt{6}$ D) $\frac{16}{3}\sqrt{6}$

E) $\frac{16}{5}\sqrt{21}$

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, O es circuncentro del triángulo ABC e I es incentro del triángulo ADB. Si AI=m y BI=n.

Calcule OI.



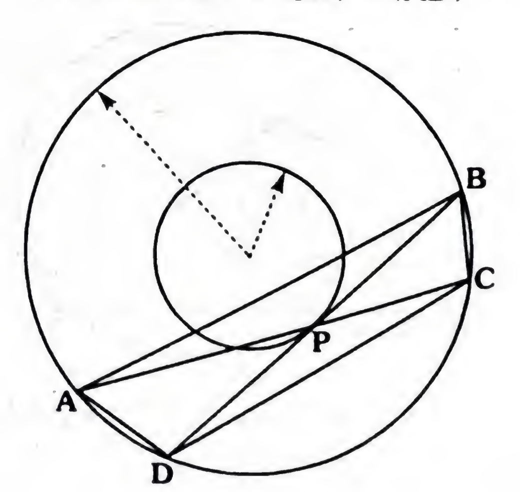
A) $\sqrt{mn}$ B) $\frac{m+n}{2}$ C) m+n

D) $\sqrt{m^2+n^2}$ E) $\sqrt{m^2-n^2}$

PROBLEMA Nº 191

En el gráfico P es punto de tangencia. Si PC=3 y AP=5. Calcule:

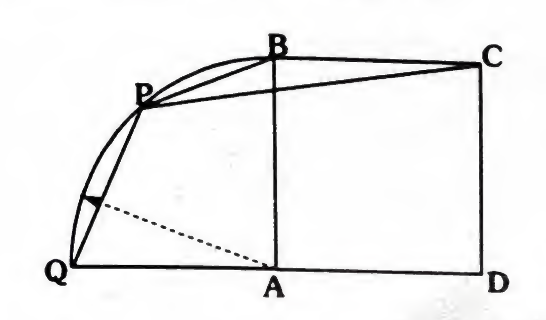
$$(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(AD)^2$$



A) 130 B) 128 C) 100
D) 144 E) 90

PROBLEMA Nº 192

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Si PQ=6 y PB=$\sqrt{2}$. Calcule PC.

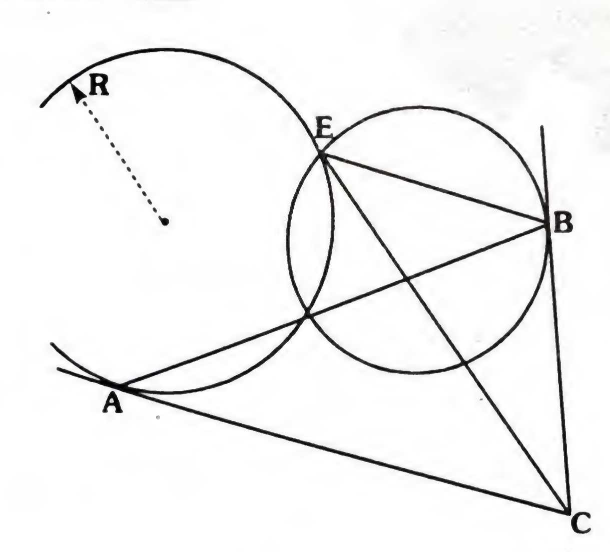


A) $\sqrt{51}$ B) $\sqrt{41}$ C) $\sqrt{57}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 193

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si BC=$4R\sqrt{2}$, AC=2(EB) y 3(AB)=2(EC).

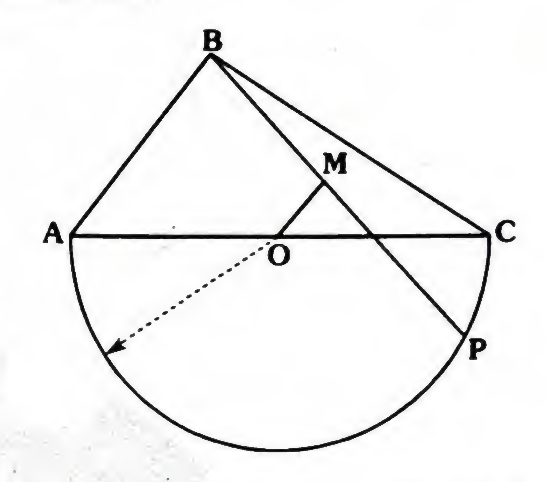
Calcule $m\overset{\frown}{EB}$.



A) 120° B) 60° C) 90°
D) 106° E) 74°

PROBLEMA Nº 194

En el gráfico, BM=MP, AB=c, BC=a y BP=ℓ.
Calcule OM.



A) $\dfrac{\sqrt{c^2+a^2-\ell^2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{c^2+a^2-\ell^2}}{4}$

C) $\dfrac{\sqrt{c^2+a^2+\ell^2}}{2}$ D) $\dfrac{ac}{\ell}$

E) $\dfrac{ac}{2\ell}$

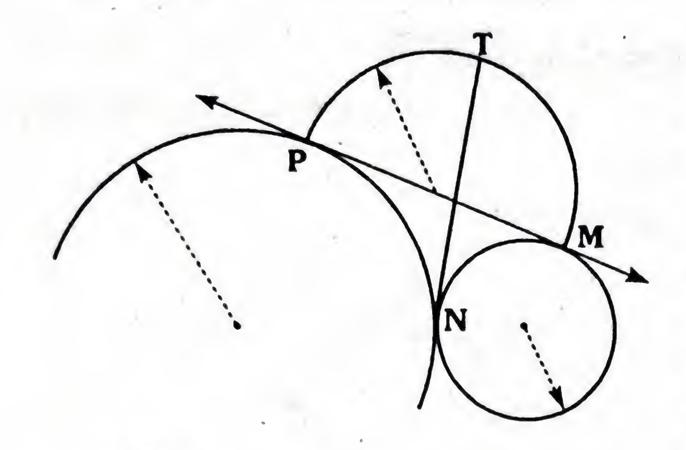
PROBLEMA Nº 195

Dado el cuadrado ABCD, en $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ se ubican los puntos N y M respectivamente tal que m∢MCN=45°. Si AN=6 y ND=2. Calcule MD.

A) $2\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{2}$
C) $7\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 196

En el gráfico, N, P y M son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{NM}=60°$, MN=a y $m\overset{\frown}{TP}=m\overset{\frown}{TM}$. Calcule TN.



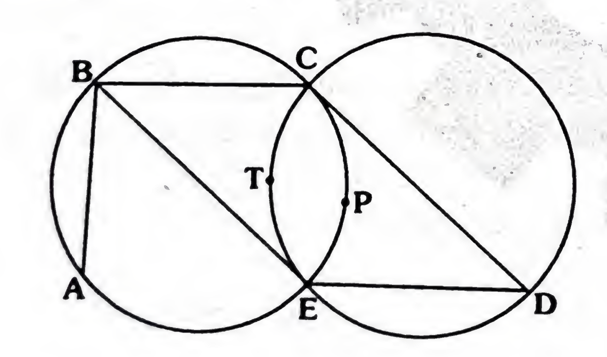
A) $a\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$ B) $a\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$

C) $a\dfrac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ D) $a\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$

E) $a\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}}$

PROBLEMA Nº 197

En el siguiente gráfico, $m\widehat{AE}=m\widehat{ED}$, $m\widehat{CTE}=m\widehat{CPE}$, AB=a, BC=b, EC=c y ED=d. Calcule $\dfrac{CD}{BE}$



A) $\dfrac{a+b}{c+d}$ B) $\dfrac{a+c}{b+d}$ C) $\dfrac{ac}{bd}$

D) $\dfrac{ab+cd}{bc+ad}$ E) $\dfrac{bc+ad}{ab+cd}$

PROBLEMA Nº 198

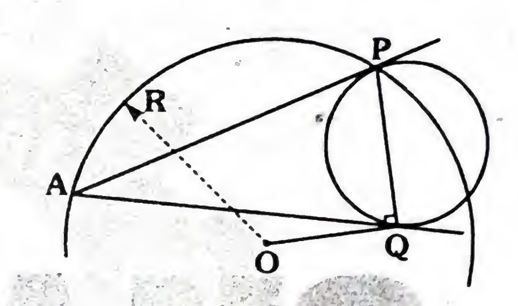
Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia, $P\in\widehat{CD}$, calcule $\dfrac{PC+2(PE)}{PB+PD}$.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) 3

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{OP}$ y $\overline{QA}$.



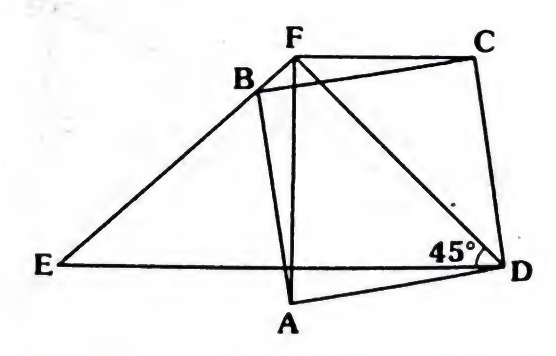
A) R B) $\dfrac{R}{2}$ C) $\dfrac{R}{3}$

D) $\dfrac{2}{3}R$ E) $\dfrac{3}{2}R$

PROBLEMA Nº 200

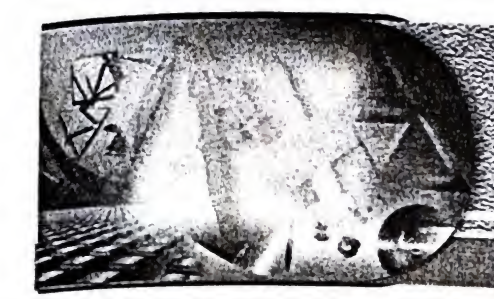
En el gráfico ABCD es un cuadrado, $\overline{FC}//\overline{ED}$ y $FC+\sqrt{2}(BF)=8$.

Calcule AF.



A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10



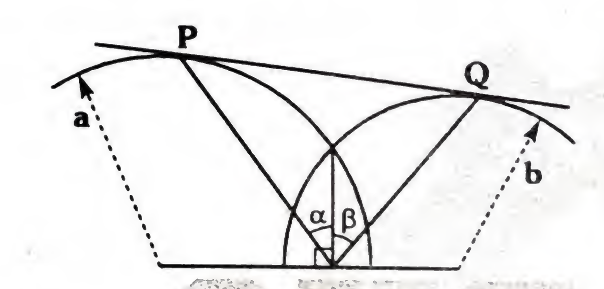
Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{tg\alpha}{tg\beta}$.



A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a+b}{a}$

D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a^2+b2}{ab}$

PROBLEMA Nº 202

En una semicircunferencia de diámetro MN y centro O, se traza la cuerda $\overline{MP}$. En $\overline{NO}$, $\overset{\frown}{NP}$ y $\overline{PM}$ se ubican los puntos A, B y C respectivamente, talque ABCO es un cuadrado y la semicircunferencia de diámetro $\overline{OM}$ interseca a $\overline{CM}$ en Q, tal que QC=2.

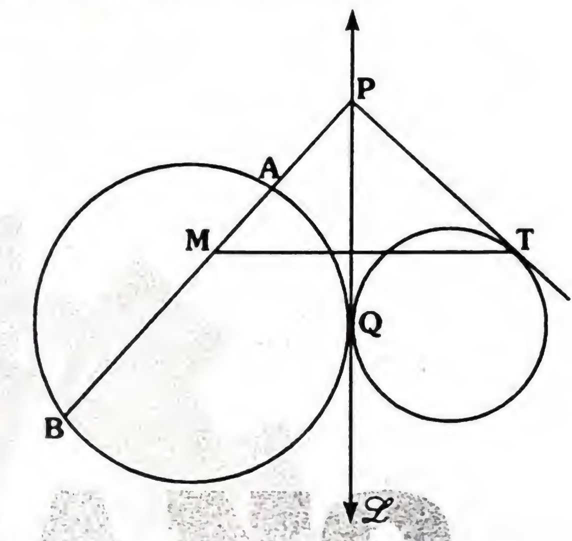
Calcule PC.

A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 0,75 E) 4

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, T y Q son puntos de tangencia $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{MT}$ y $\frac{1}{AM}-\frac{1}{BM}=\frac{1}{8}$. Calcule TP.

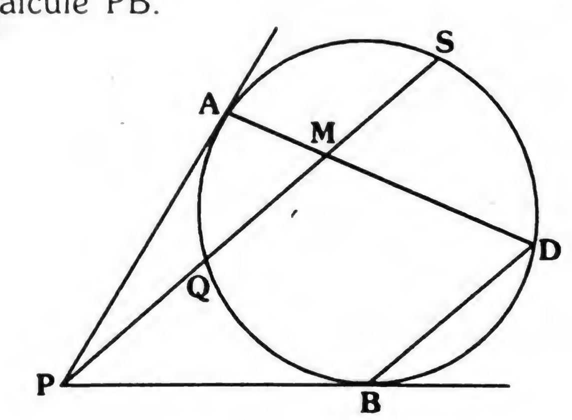


A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) 8

D) 9 E) 12

PROBLEMA Nº 204

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si $\overline{SP}//\overline{DB}$, QM=2 y PQ=3. Calcule PB.



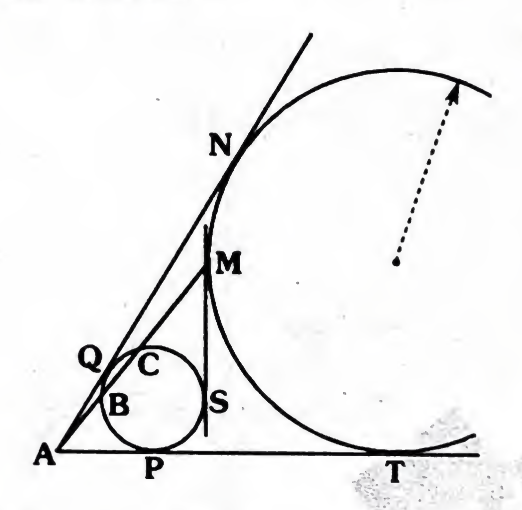
A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{21}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $3\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 205

En la figura P, Q, S, N, M y T son puntos de tangencia. Si AB=BC=CM.

Calcule m∢NAP.



A) 45° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 206

Se tiene el cuadrado ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, con diámetro $\overline{DE}$ se traza una semicircunferencia en el mismo semiplano del cuadrado respecto de $\overleftrightarrow{AD}$, luego se traza la tangente $\overline{CM}$ (M es punto de tangencia) y $\overline{BM} \cap \overline{CD} = \{L\}$.

Si $2(AD)(DL)-(DL)^2=k$.

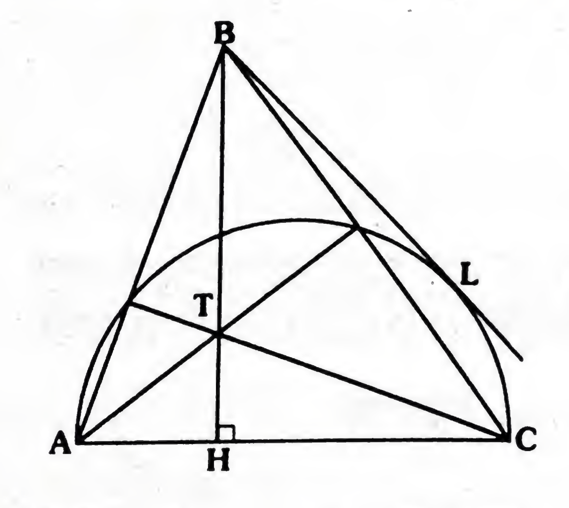
Calcule (BL)(LM).

A) k B) 2k C) 4k
D) $k\sqrt{2}$ E) $k\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 207

En el gráfico, L es punto de tangencia y la distancia del circuncentro del triángulo ABC al lado AC es "a". Si TH=b.

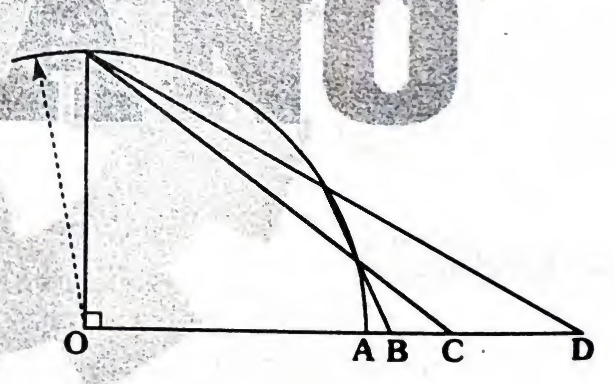
Calcule LB.



A) $\sqrt{2a(a+2b)}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$
C) $\sqrt{2a(2a+b)}$ D) $\sqrt{a(a+2b)}$
E) $\sqrt{2a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 208

En el gráfico, OA=a; AB=b y BC=c, calcule CD.



A) $\dfrac{2ab+b^2+c^2}{c}$ B) $\dfrac{2ab+b^2+c^2}{a}$
C) $\dfrac{2ab+b^2+c^2}{c}$ D) $\dfrac{2ab+b^2-c^2}{c}$
E) $\dfrac{2ab+b^2-c^2}{a}$

PROBLEMA Nº 209

En el triángulo ABC de circuncentro O, circunradio R y ortocentro H, se traza la altura BT. Si (BT)(TH)=k, calcule OT.

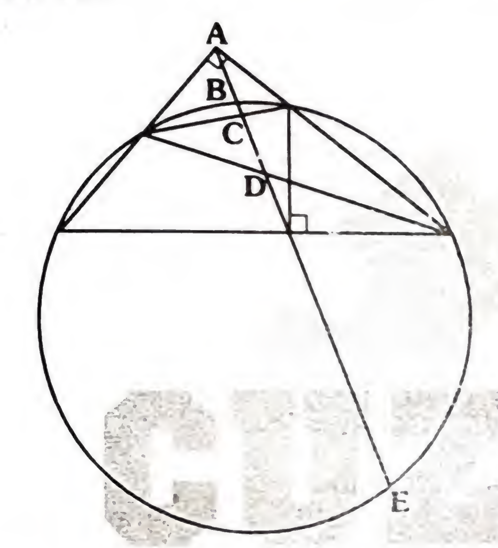
A) $R-\sqrt{k}$ B) $\sqrt{R^2-k}$

C) $\sqrt{R^2+k}$ D) $\dfrac{R\sqrt{k}}{R+\sqrt{x}}$

E) $\dfrac{R\sqrt{k}}{R-\sqrt{x}}$

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico, AB=a, BC=b y CD=c. Calcule ED.



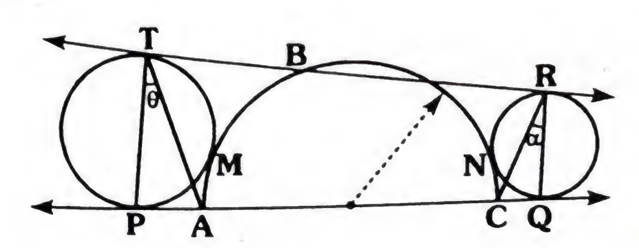
A) $\dfrac{ac}{b}$ B) $\dfrac{ab}{c}$

C) $\dfrac{bc}{a}$ D) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

E) $\dfrac{(a+b)^2}{c}$

PROBLEMA Nº 211

En el gráfico, T, P, R, Q, M y N son punto de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}$, calcule θ/α.

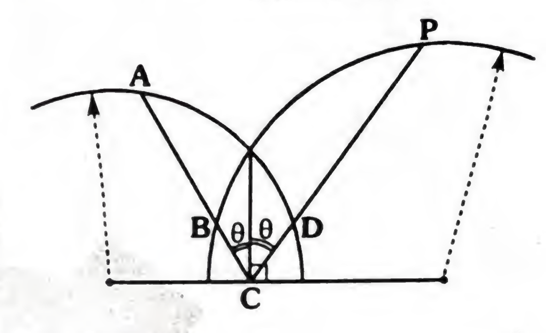


A) 2 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1

D) 3 E) $\dfrac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 212

Del gráfico, halle $\dfrac{(AC)(CD)}{(CP)(BC)}$

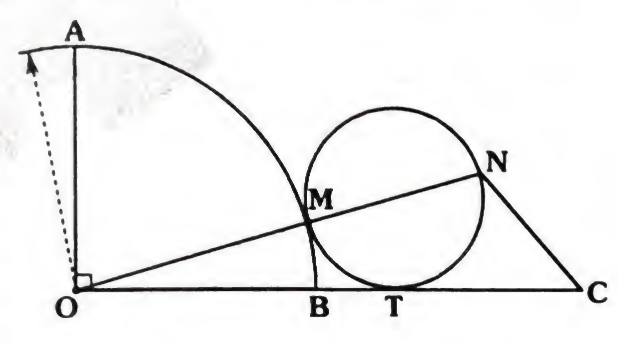


A) 1 B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{2}{3}$

D) $\dfrac{2}{5}$ E) $\dfrac{5}{2}$

PROBLEMA Nº 213

En el gráfico, M y T son puntos de tangencia, AO=a, MN=b y $m\measuredangle AOM=2(m\measuredangle NCT)$. Calcule TC.



A) $b\sqrt{\dfrac{a+b}{b}}$ B) $a\sqrt{\dfrac{a+b}{b}}$

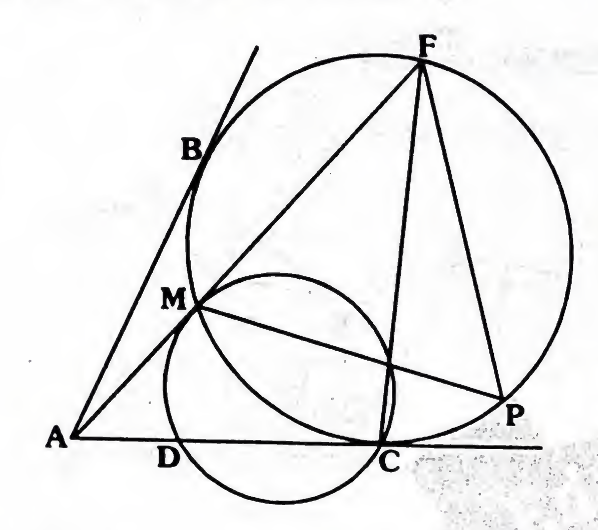
C) $2a\sqrt{\dfrac{a+b}{b}}$ D) $b\sqrt{\dfrac{a+b}{a}}$

E) $3b\sqrt{\dfrac{a+b}{a}}$

PROBLEMA Nº 214

En el gráfico, B, M y C son puntos de tangencia.

Si AB=8 y DC=6, calcule PF.

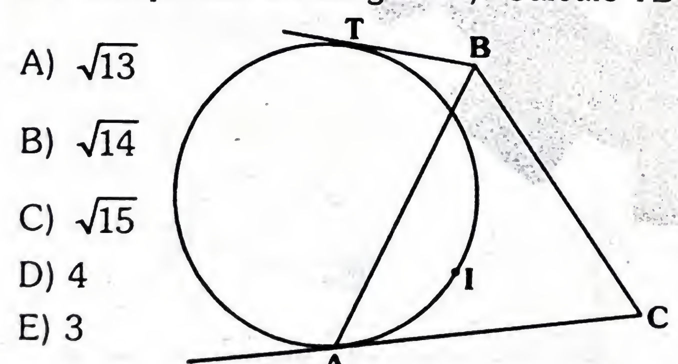


A) 8 B) 6 C) 10

D) 12 E) 16

PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, I es incentro del triángulo ABC. Si AB=13, BC=15 y AC=14. (A y T son puntos de tangencia). Calcule TB



A) $\sqrt{13}$

B) $\sqrt{14}$

C) $\sqrt{15}$

D) 4

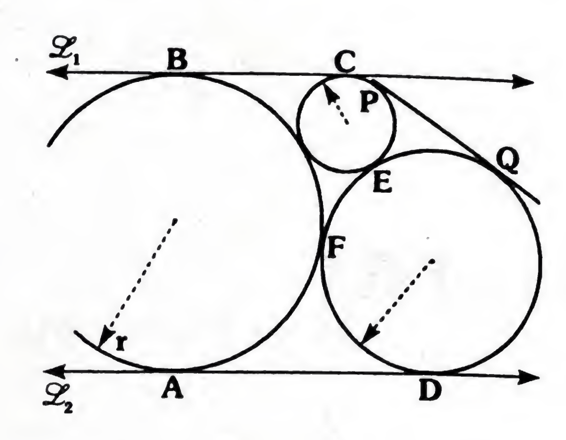
E) 3

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROBLEMA Nº 216

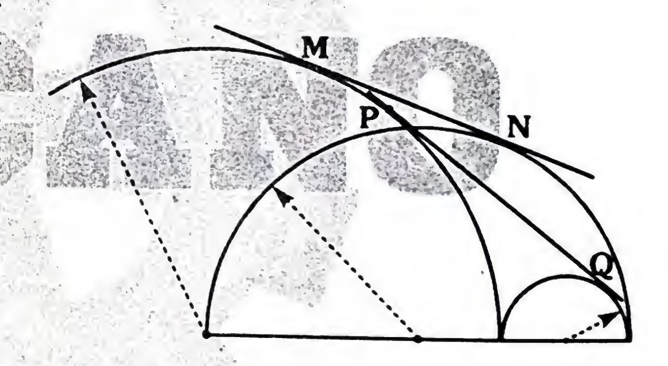
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, A, B, C, D, E, F, G, P y Q son puntos de tangencia.

Demostrar que PQ=r.



PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Si MN=a, calcule PQ.



A) a B) $a\sqrt{3}$

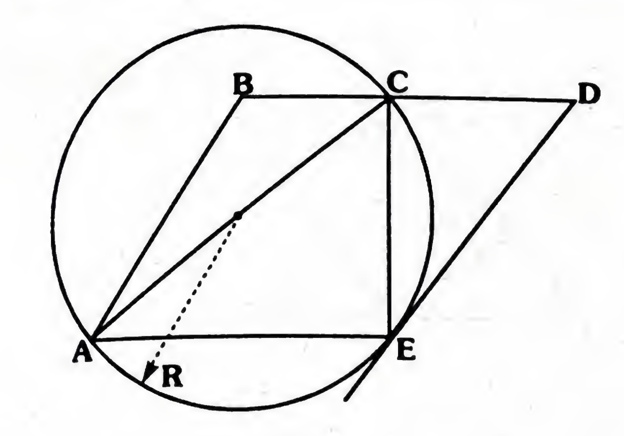
C) $a\sqrt{2}$ D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

E) $a\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 218

En el gráfico, E es punto de tangencia y ABCD es un paralelogramo.

Si BC=a y CD=b. Calcule R.



A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{b(a+b)}$

C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $\sqrt{b(2b+a)}$

E) $\frac{1}{2}\sqrt{(2b+a)(a+b)}$

PROBLEMA Nº 219

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica M en $\overline{CD}$, la circunferencia tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AM}$ tiene radio "a" y la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{MD}$ del triángulo AMD tiene radio b. Halle AD.

A) $a+\sqrt{a(a+2b)}$

B) $a+\sqrt{ab}$

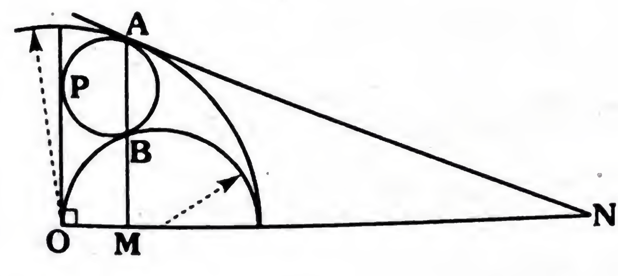
C) $a+\sqrt{a^2+b^2}$

D) $b+\sqrt{a(a+2b)}$

E) $b+\sqrt{a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 220

En el gráfico A, B y P son puntos de tangencia. Si AB=2, calcule (OM)(MN).



A) 4

B) 8

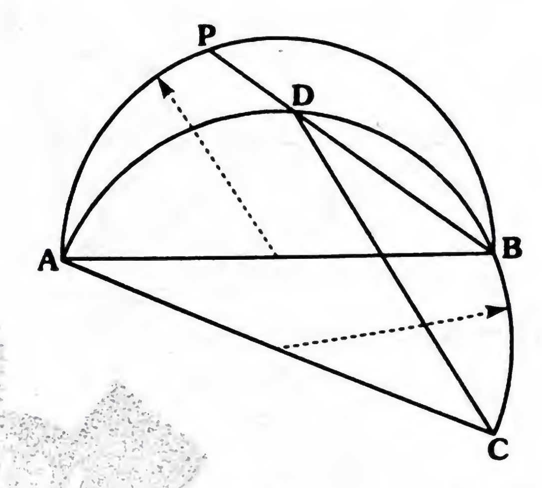
C) 12

D) 16

E) 32

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, si BP=8. Calcule el producto de las longitudes de las proyecciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre $\overline{AC}$.



A) 16

B) 64

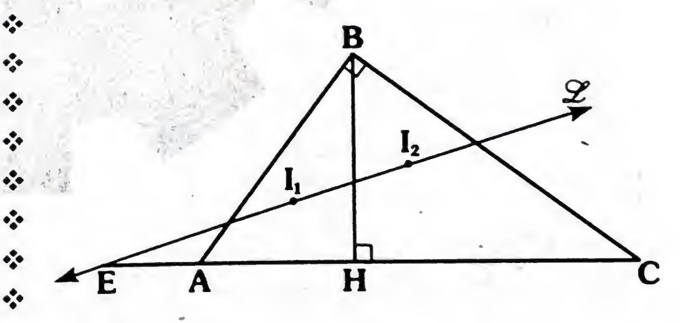
C) 72

D) 36

E) 24

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos AHB y BHC respectivamente. Si AB=c, BC=a y AC=b. Calcule AE.



A) $\frac{c(b-c)}{a-b}$

B) $\frac{a(b+b)}{a-c}$

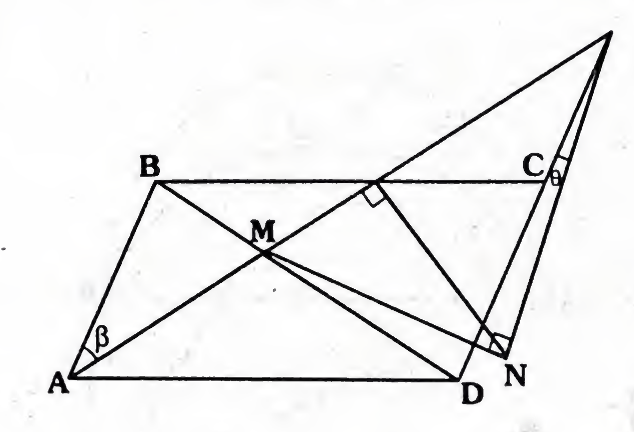
C) $\frac{b(b-c)}{a+b}$

D) $\frac{c(b-a)}{a-c}$

E) $\frac{c(b+c)}{a+b}$

PROBLEMA Nº 223

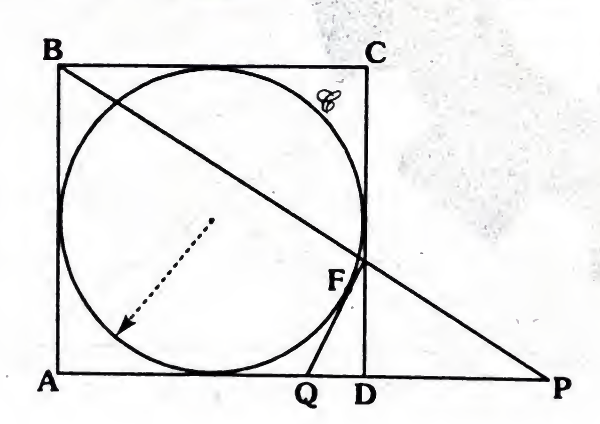
En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, además $\beta+\theta=50^\circ$. Calcule $m\sphericalangle MNA$.



A) 25° B) 15° C) 20°
D) 40° E) 35°

PROBLEMA Nº 224

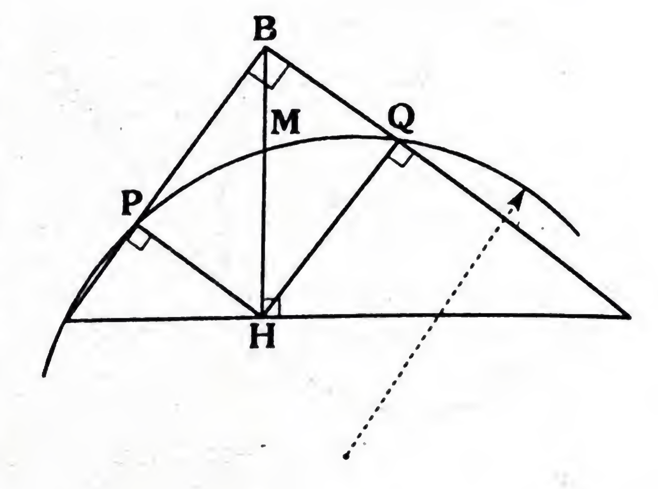
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD, F es punto de tangencia. Calcule $\frac{AQ}{QP}$.



A) 1 B) 2 C) 0,5
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 225

Del gráfico, calcule $\frac{BM}{MH}$.



A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C) 2
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 226

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH y la ceviana interior CM. Si AM=MC=AH=2. Calcule AC.

A) $\sqrt[3]{4}$ B) $2\sqrt[3]{4}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt[3]{4}+1$

PROBLEMA Nº 227

En el triángulo equilátero ABC, se traza la ceviana interior BP, en los triángulos ABP y PBC se trazan las circunferencias inscritas de radios a y b respectivamente. Calcule AC.

A) $2\sqrt{a^2+b^2}$

B) $\sqrt{3}(a+b)+\sqrt{3(a^2+b^2)-2ab}$

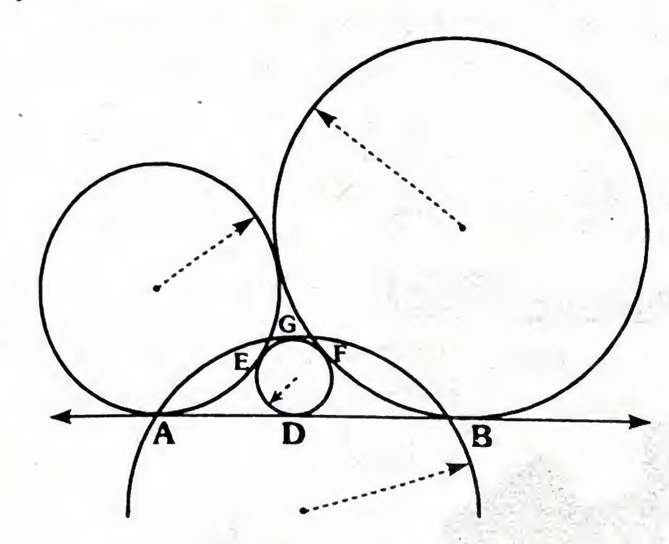
C) $\sqrt{3}(a+b)+\sqrt{3(a^2+b^2)+2ab}$

D) $\sqrt{3ab}+\sqrt{a^2+b^2+ab}$

E) $\sqrt{3ab}+\sqrt{a^2+b^2-ab}$

PROBLEMA Nº 228

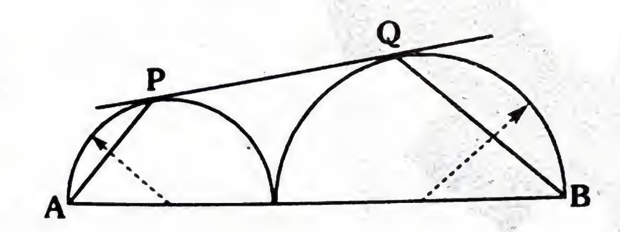
En el gráfico, A, B, C, D, E, F y G son puntos de tangencia. Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



A) 120° B) 106° C) 135°
D) 90° E) 108°

PROBLEMA Nº 229

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AP=a y QB=b, calcule PQ.



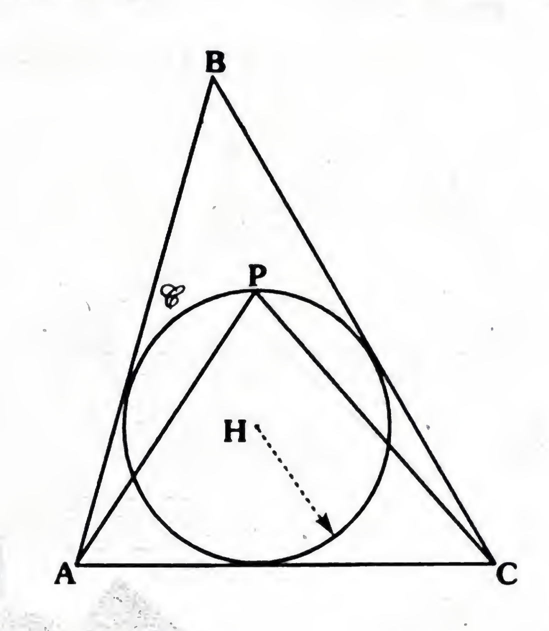
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt[3]{a^3+b^3}$

C) $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ D) $(ab)^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

E) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, H es ortocentro de el triángulo APC. Si AB=C y BC=a. Calcule AC.



A) $\sqrt{ac}$ B) $\frac{a+c}{2}$

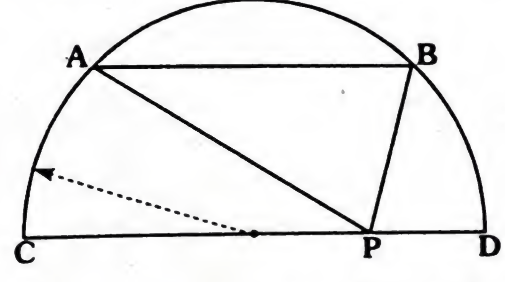
C) $\frac{a+c}{3}$ D) $\sqrt{a^2+c^2}$

E) $\sqrt{2ac}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{CD}$, AP=a, PB=b y PD=c. Calcule PC.



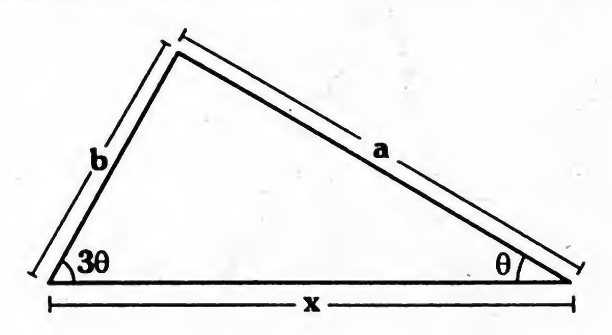
A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

C) $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$ D) $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$

E) $\frac{a^2+b^2}{c}$

PROBLEMA Nº 232

En el gráfico, calcule x en función de a y b.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ D) $\sqrt{\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b}}$

E) $\sqrt{\frac{(a^2-b^2)a}{b}}$

PROBLEMA Nº 233

El triángulo ABC tiene circunradio r, ortocentro H y la circunferencia circunscrita a su triángulo órtico tiene centro O. Calcule: $(AO)^2+(BO)^2+(CO)^2+(OH)^2$

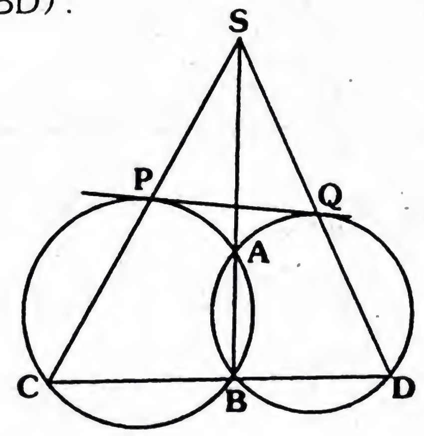
A) $2r^2$ B) $3r^2$ C) $4r^2$

D) $5r^2$ E) $6r^2$

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $(AS)^2-(AB)^2=8$.

Calcule (CB)(BD).



A) 4

B) 8

C) $4\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$

E) 5

PROBLEMA Nº 235

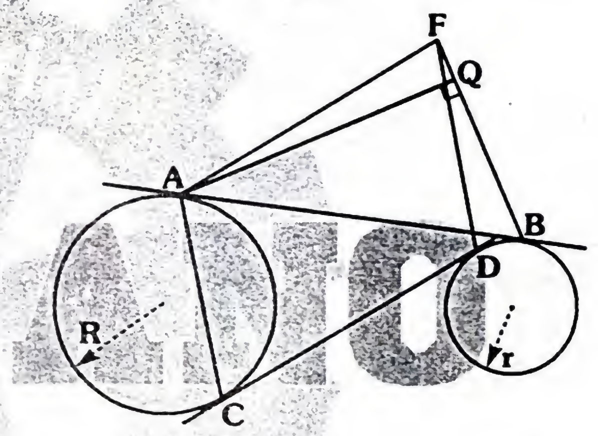
Desde el punto P exterior a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza la tangente PT (T es punto de tangencia). Si $(PA)^2+(PB)^2-(AB)^2=8$. Calcule PT

A) 4 B) 1 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si AFDC es un paralelogramo, calcule $(BQ)^2-(FQ)^2$.



A) 2Rr B) 4Rr C) R^2+r^2

D) $2(R^2+r^2)$ E) Rr

PROBLEMA Nº 237

En el gráfico:

$(AE)^2-(AF)^2=10R$ y $m\widehat{ED}=m\widehat{CD}$

Calcule BH.

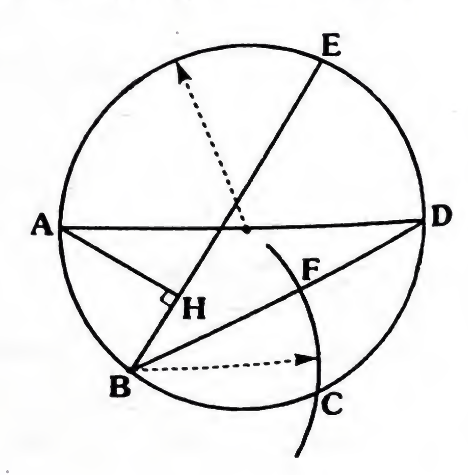
A) 10

B) $5\sqrt{2}$

C) 4

D) 3

E) 5



PROBLEMA Nº 238

En un rectángulo ABCD en $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos Q y R tal que el triángulo BQR es equilátero; si AB=a; BC=b. Calcule BQ.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

C) $\sqrt{3(a^2+b^2)}$ D) $2\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}$

E) $2\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 239

Se tiene dos circunferencias secantes en los puntos A y B de centros O_1 y O_2 con radios 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente, además $O_1O_2=2$. Calcule la longitud de la cuerda correspondiente a la circunferencia de centro O_2 que pasa por el punto A y cuyo punto medio pertenece a la circunferencia de centro O_1.

A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

PROBLEMA Nº 240

En un trapezoide ABCD; AB=2; BC=12; CD=9 y BD=6.

Además m∢BDC=m∢BAD+m∢ADB

Calcule AD.

A) $\sqrt{34}$ B) $\sqrt{37}$ C) $\sqrt{35}$

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 241

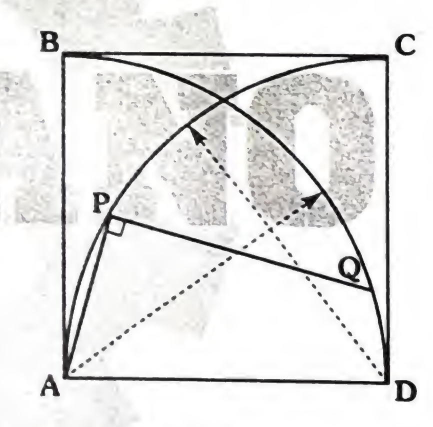
Dado un cuadrante AOB de centro O, en $\overline{AO}$ se ubica el punto C, con centro O y radio $\overline{CO}$ se traza la circunferencia $\mathscr{C}_1$ y la secante BDE a $\mathscr{C}_1$; $\overline{OH}\perp\overline{DE}$ ($H\in\overline{DE}$) en $\overset{\frown}{CE}$ se ubica el punto F tal que m∢FOD=90° de modo que la prolongación de $\overline{HO}$ interseca a $\overline{AF}$ en P; CB=6 y AF=8. Calcule PO.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{17}$ C) $\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 242

Si ABCD es un cuadrado, AP=$\sqrt{3}$ y PQ=2. Calcule $(BQ)^2-(QC)^2$.



A) 6 B) 3 C) 2

D) 5 E) 1

PROBLEMA Nº 243

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores concurrentes AM; BN y CL. Si la circunferencia circunscrita al triángulo MNL interseca en R, S y Q a los datos AB, BC y AC respectivamente, entonces $\overline{AS}$; $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$.

A) Son alturas.

B) Son medianas.

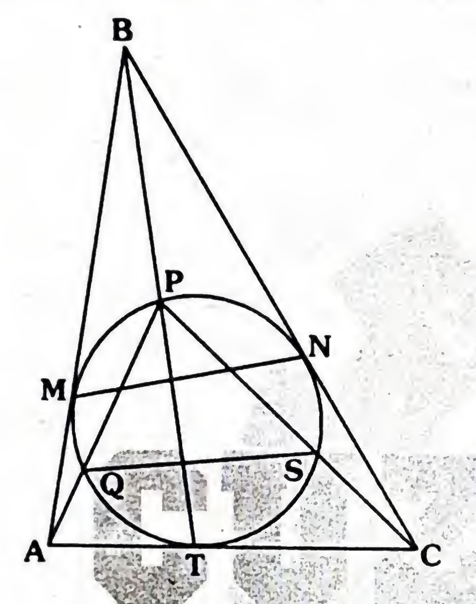
C) Son bisectrices.

D) Determinan un triángulo al intersecarse.

E) Son cevianas concurrentes.

PROBLEMA Nº 244

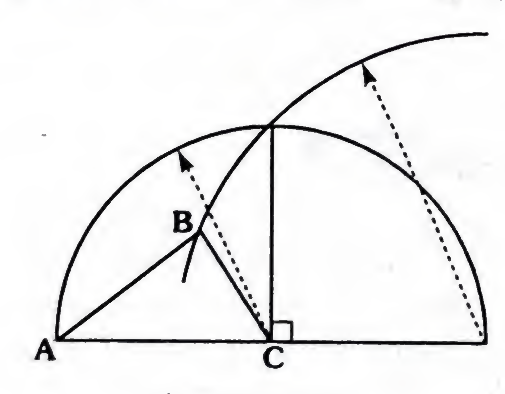
En el gráfico, M; N y T son puntos de tangencia. Si BP=PT, calcule $\frac{MN}{QS}$.



A) 0,4 B) 0,5 C) 0,8
D) 1 E) 2

PROBLEMA Nº 245

Del gráfico, calcule AB/BC.



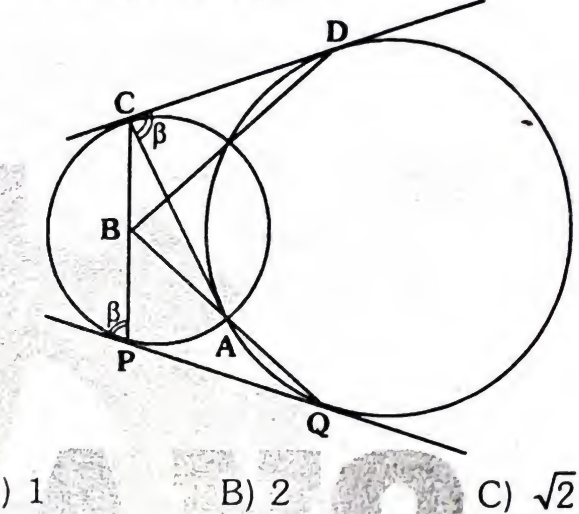
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico P, C, D y Q son puntos de tangencia; $(BC)^2+(AB)^2=16$.

Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 247

Desde el punto exterior A a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ (P y Q son puntos de tangencia y la secante ABC.

Si AB=BC y $(PB)^2+(QB)^2=3(PB)(QB)$.

Calcule $m\measuredangle PAQ$.

A) 90° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 248

Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia, tal que:

$$AB=BD=AD=5 \quad y \quad CD=4$$

Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) $\sqrt{41-4\sqrt{13}}$ B) $\sqrt{41-2\sqrt{13}}$

C) $\sqrt{39-2\sqrt{13}}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{41-8\sqrt{13}}$

E) $\sqrt{41+4\sqrt{13}}$

PROBLEMA Nº 249

En la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubican P y Q en distintos semiplanos respecto de $\overline{AB}$, se traza $\overline{PH}\perp\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). Si $m\overset{\frown}{AP}=m\overset{\frown}{BQ}$, AH=a HB=b. Calcule HQ.

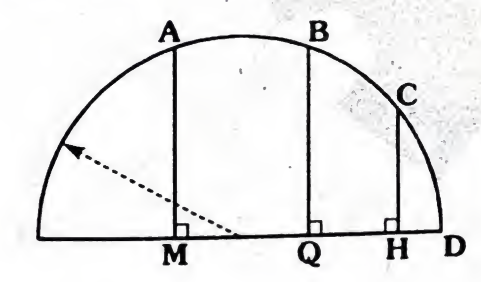
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{b^2-a^2}$ D) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}=m\overset{\frown}{CD}$. Si AM=a y HC=b. Calcule BQ.



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$

C) $\sqrt{b(a+b)}$ D) $\sqrt{ab}$

E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 251

Se tienen los triángulos equiláteros ABC y BMN, tal que M está en la región interior de ABC y N en la región exterior relativa a $\overline{BC}$. $\overleftrightarrow{AM}\cap\overline{NC}=\{E\}$. Si AE=a y EC=b. Calcule ME+EN.

A) $\sqrt{ab}$ B) a+b

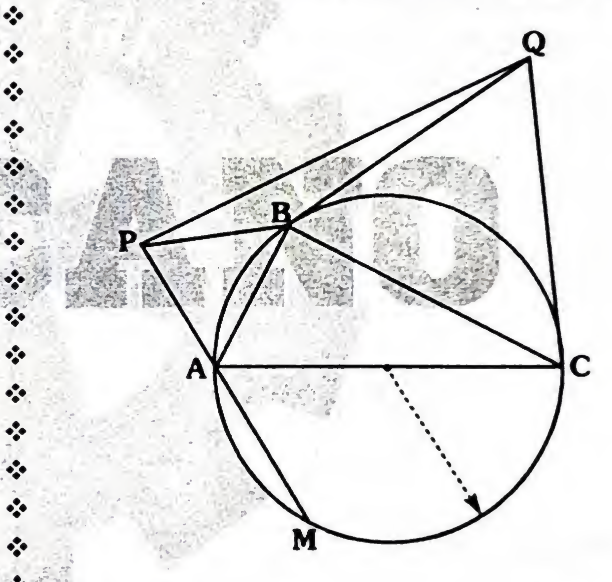
C) a−b D) $\sqrt{a^2+b^2}$

E) $\frac{a+b}{2}$

PROBLEMA Nº 252

En el gráfico, los triángulos APB y BQC son equiláteros.

Si PQ=6 y $(PM)^2-(AM)^2=16$. ¿Cuánto distan los puntos medios de $\overline{PC}$ y $\overline{AQ}$?.



A) 1 B) 3 C) 4

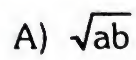
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 253

En el paralelogramo ABCD, $\overline{BD}\perp\overline{CD}$, se ubica P en la región interior, tal que $(AP)^2+(PC)^2=55$ y $(PB)^2+2(CD)^2=30$. Calcule PD.

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8



PROBLEMA Nº 254

En el gráfico, $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$. Si AB=a y AD=b. Calcule AC.

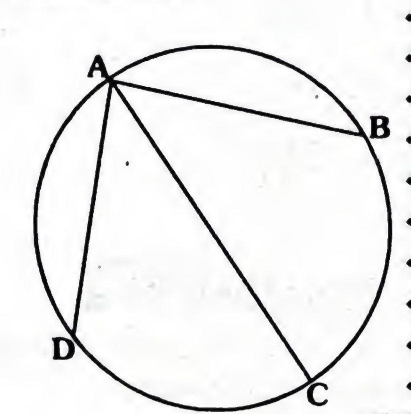
A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{b(a+b)}$

C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$

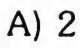
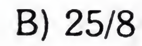
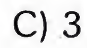
E) $\dfrac{a+b}{2}$



PROBLEMA Nº 255

En el gráfico, A; C y M son puntos de tangencia. Si $m\widehat{CN}=74°$, AC=2 y AB=3.

Calcule AM.

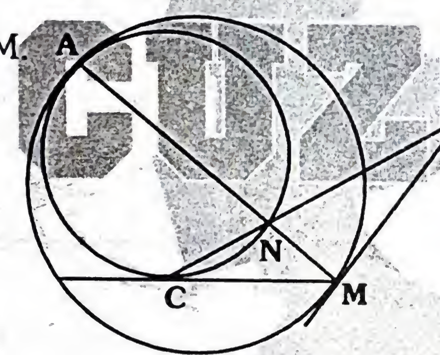
A) 2

B) 25/8

C) 3

D) 11/3

E) 17/5



PROBLEMA Nº 256

En el triángulo ABC, AB=2, BC=3 y $m\measuredangle ABC=60°$. Calcule la distancia del circuncentro al baricentro.

A) 1 B) 1/3 C) 2/3

D) 3/4 E) 3/5

PROBLEMA Nº 257

Dado el cuadrilátero no convexo en D, se ubican M, S, Q y N puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $(AC)^2+(BD)^2=60$.

Calcule $(MQ)^2+(NS)^2$.

A) 28 B) 30 C) 60

D) 15 E) 120

PROBLEMA Nº 258

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se ubican B y C (C en $\widehat{BD}$), se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$ a $\overline{AD}$ (H y N en $\overline{AD}$) tal que $m\widehat{BC}=2(m\widehat{CD})$; BH=a y CN=b. Calcule la longitud del menor recorrido para ir de B hacia C tocando $\overline{AD}$.

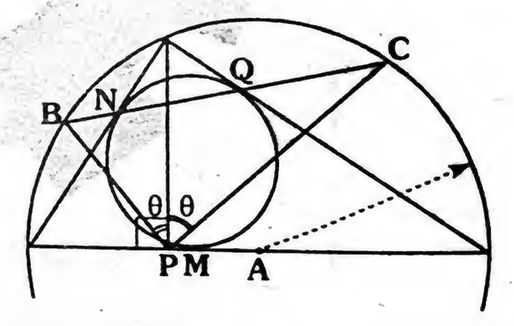
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $4\sqrt{ab}$

C) $2\sqrt{a^2+b^2}$ D) $2\sqrt{a(a+b)}$

E) $2\sqrt{b(a+b)}$

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, M; N y Q son puntos de tangencia. Si PA=1 y PB=2. Calcule PC.



A) 4,23 B) 3,9 C) 2,8

D) 3,41 E) 3,8

PROBLEMA Nº 260

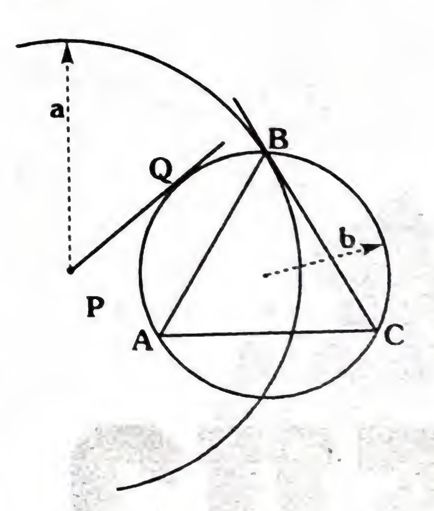
Se tiene el triángulo ABC, I es incentro y O es circuncentro.

Si AB=c; BC=a y AC=b.

Demostrar: $2a=b+c \Leftrightarrow m\measuredangle AIO=90°$

PROBLEMA Nº 261

En el gráfico, B y Q son puntos de tangencia, si el triángulo ABC es equilátero, calcule PQ.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a(a-b)}$

C) $\sqrt{a(a+b)}$ D) $\sqrt{a^2+b^2}$

E) $\sqrt{a^2-b^2}$

PROBLEMA Nº 262

En el siguiente gráfico, P, M, Q y T son puntos de tangencia. Si AP=4(AB)=4. Halle QT.

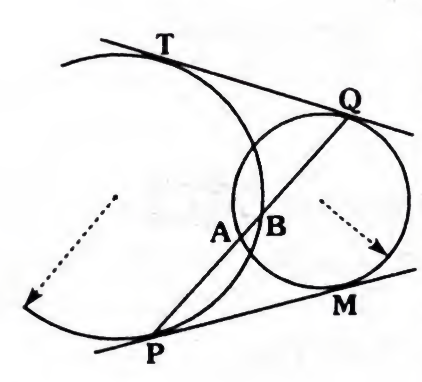
A) $3\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{3}$

C) 6

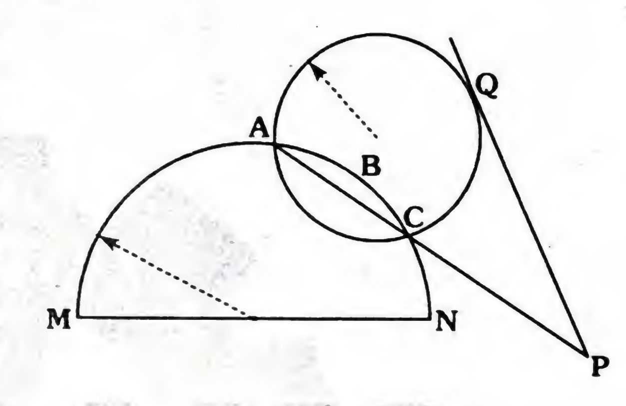
D) 5

E) $5\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 263

En la siguiente figura, Q es punto de tangencia. Si CP=MN=4 y $m\widehat{ABC}=60°$. Calcule PQ.



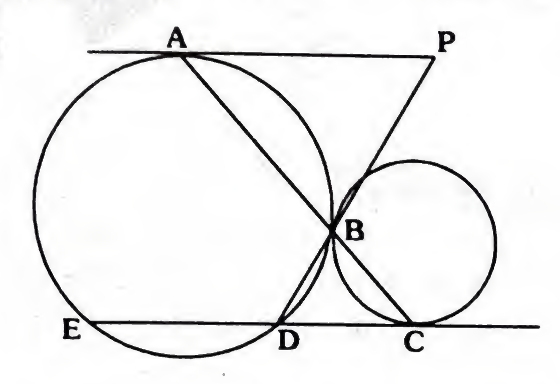
A) $2\sqrt{6}$ B) 6

C) 4 D) $4\sqrt{6}$

E) 8

PROBLEMA Nº 264

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Si AP=4 y CD=3. Halle BD.



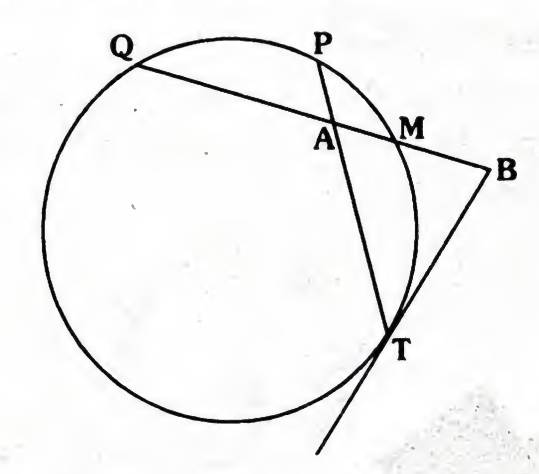
A) $\sqrt{7}/7$ B) $6\sqrt{7}/7$

C) $3\sqrt{7}/7$ D) $2\sqrt{5}/5$

E) $\sqrt{6}/6$

PROBLEMA Nº 265

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si MB=2, AM=4, m$\overset{\frown}{PMT}$=120° y m∢MAT=60°. Calcule AP.



A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 266

Se tiene el triángulo ABC, se traza la circunferencia que pasa por B la cual es tangente a $\overline{AC}$ en P, secante a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en R y Q respectivamente. Si AB=QC; AR=BQ; AP=1 y AC=4. Calcule AR.

A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

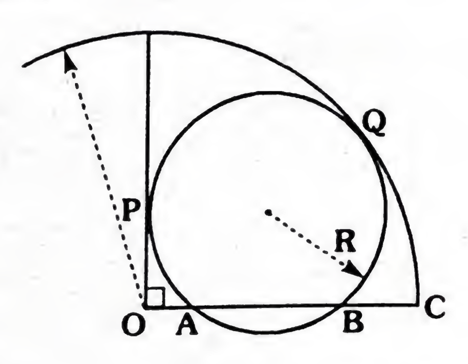
PROBLEMA Nº 267

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, las diagonales se cortan perpendicularmente en E. Si AE=a y EC=b. Calcule AD.

A) $a\sqrt{\frac{a+b}{b}}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{\frac{b^3}{a}}$
D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

PROBLEMA Nº 268

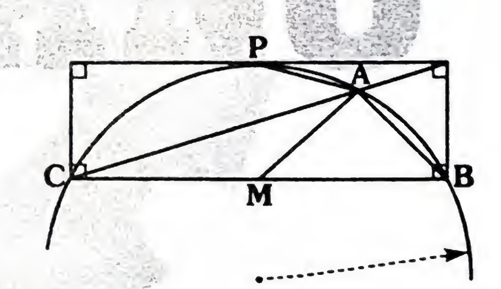
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si OA=2 y BC=3. Calcule R.



A) 2,5 B) 3,5 C) 4,5
D) 2,4 E) 3,6

PROBLEMA Nº 269

En el gráfico, P es punto de tangencia y CM=MB. Si AP=a y AB=b. Calcule AM.



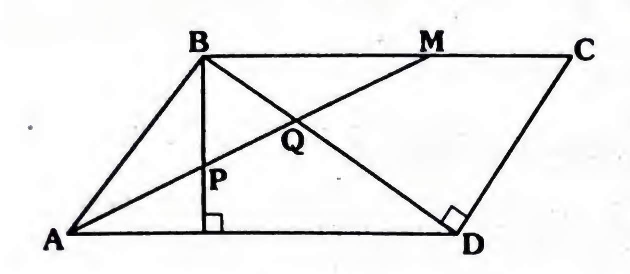
A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{2ab}$ D) $\frac{\sqrt{b^4+a^2b^2-a^4}}{a}$

E) $\frac{\sqrt{b^4+a^2b^2-a^4}}{b}$

PROBLEMA Nº 270

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Si BP=6; AP=14 y AB=BM. Calcule PQ.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

PROBLEMA Nº 271

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle ACB) \quad y$$

$$(BC)^2-(AB)^2=8(AB)$$

Calcule AC.

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6
D) 8 E) 3

PROBLEMA Nº 272

En el cuadrante AOB (O es centro y AO es radio), se ubica C y D en $\overset{\frown}{AB}$ y en $\overline{OA}$ respectivamente, M es punto medio de $\overline{CD}$ y $m\sphericalangle BCD=90°$.

Si $CD=2$ y $BC=4\sqrt{2}$. Calcule OM.

A) 4 B) $\frac{\sqrt{70}}{2}$

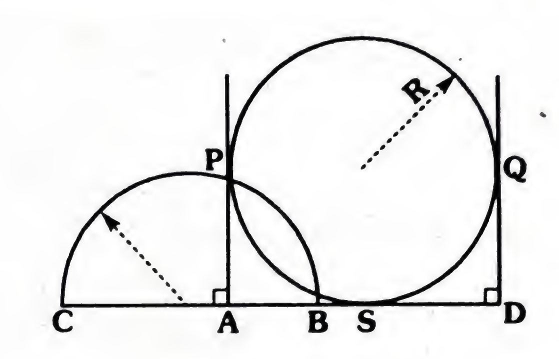
C) $2\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{71}}{2}$

E) $\sqrt{17}$

PROBLEMA Nº 273

En el gráfico, P, S y Q son puntos de tangencia. Si $AB=b$ y $CD=a$.

Calcule R.



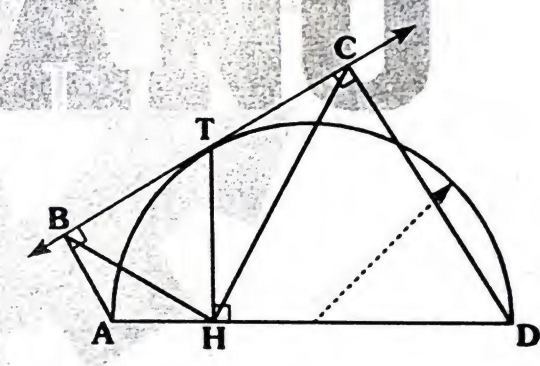
A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\frac{a+b}{2}$ D) $\sqrt{b(a+b)}-b$

E) $\sqrt{a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 274

Según el gráfico, T es punto de tangencia. Si $(BH)^2+(HC)^2=k$.
Calcule TH.



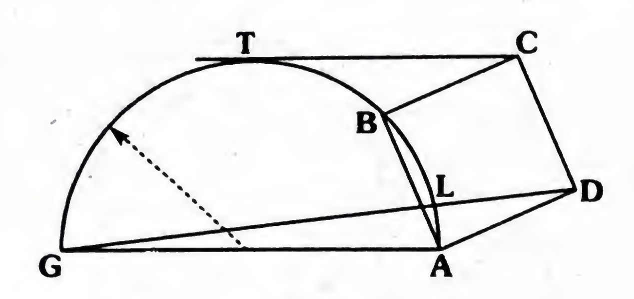
A) $\sqrt{k}$ B) $\frac{\sqrt{k}}{2}$

C) $\sqrt{2k}$ D) $\frac{\sqrt{k}}{4}$

E) $\frac{\sqrt{k}}{6}$

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico ABCD es un cuadrado T es punto de tangencia GL=a y LD=b.
Calcule CT.



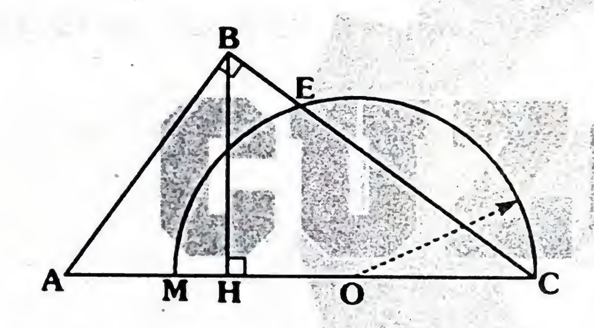
A) $2\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{a+b}{2}$ D) $\sqrt{b(a+b)}$

E) $\sqrt{a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 276

En el gráfico, EC=7(EB), AM=2 y HB=6. Calcule OH.



A) $2\sqrt{2}+3$ B) $2\sqrt{7}+1$

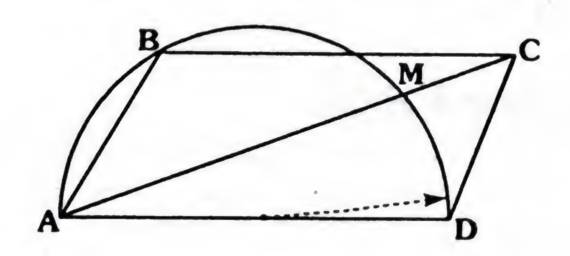
C) $2\sqrt{3}-1$ D) $2\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}+2$

PROBLEMA Nº 277

En el siguiente gráfico, ABCD es un paralelogramo, AM=17 y MC=9.

Calcule la distancia de D hacia $\overline{AC}$.

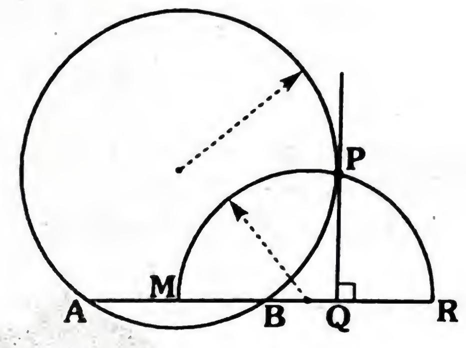


A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, P es punto de tangencia, y AM=MB. Si QR=3 y MQ=4, calcule MB.

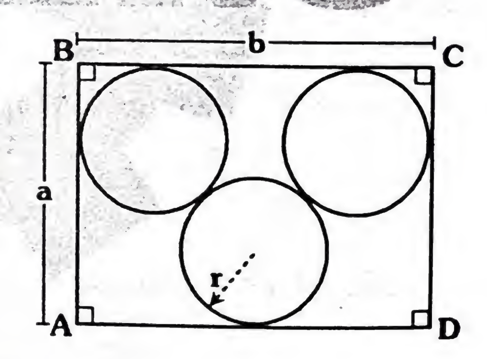


A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3,5

PROBLEMA Nº 279

En el gráfico, las tres circunferencias son congruentes. Calcule r.



A) $2a+\dfrac{b}{2}-\sqrt{a(3a+2b)}$

B) $\sqrt{ab}+2a+\dfrac{b}{2}$

C) $\sqrt{a(a+b)}+a+b$

D) $a+b-\sqrt{a(3a+2b)}$

E) $2a+\dfrac{b}{2}-\sqrt{a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 280

En el triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en Q, S y P respectivamente.

Si $\frac{1}{(PC)^2}-\frac{1}{(PA)^2}=k\left[\frac{1}{(PS)^2}-\frac{1}{(PQ)^2}\right]$

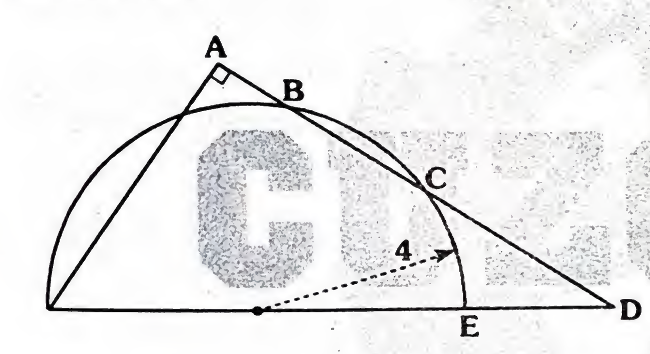
Calcule "k"

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 281

En el gráfico, DE=2 y BC=2(AB).

Calcule CD.



A) 2 B) 3 C) $\sqrt{10}$
D) $\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 282

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, además se ubican los puntos Q y P en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que AQPH es un rombo y HC=2.

Calcule AH.

A) $\sqrt{5}+1$ B) $\sqrt{3}+1$
C) $\sqrt{3}-1$ D) $\sqrt{5}-1$
E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 283

En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle BCA)$, AB=4 y AC=10.

Calcule BC.

A) $\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{14}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 3

PROBLEMA Nº 284

En el trapecio ABCD con $\overline{AB}//\overline{CD}$, AD=a, CD=b y $m\measuredangle BAD=m\measuredangle BDC$.

Calcule $(AC)^2+(BC)^2$.

A) $\frac{a^2+b^2}{2}$ B) $\frac{2a^2+b^2}{2}$
C) $\frac{a^2+b^2}{4}$ D) $2(a^2+b^2)$
E) a^2+b^2

PROBLEMA Nº 285

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro), se ubica P y Q en $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Si AP=OQ y PQ=8.

Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{PB}$ y $\overline{AQ}$.

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$
D) 8 E) 2

PROBLEMA Nº 286

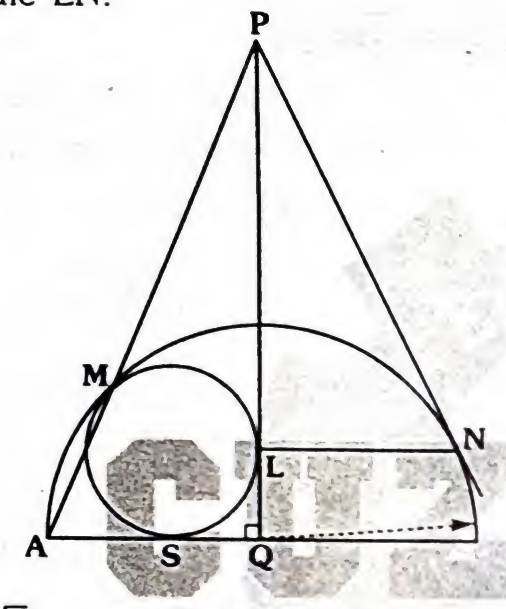
Halle "x" en función de "θ".

A) $90°-\theta$ B) $90°-\frac{\theta}{2}$ C) $45°+\frac{\theta}{2}$

D) θ E) 2θ

PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, M, L, N y S son puntos de tangencia. Si PL=9(LQ) y $QN=\sqrt{10}$. Calcule LN.



A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) 4

D) 5 E) $\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 288

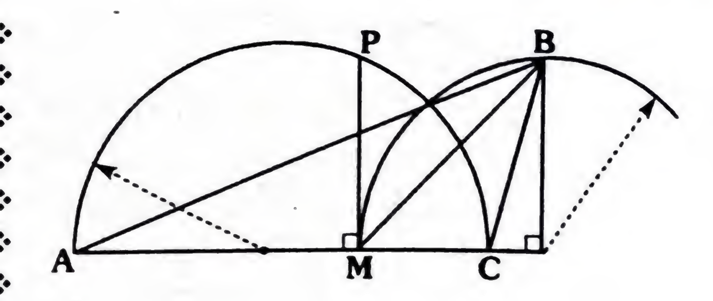
Se tiene el hexágono regular ABCDEF, P es un punto interior tal que $m\sphericalangle CBP=70°$ y $m\sphericalangle PFE=10°$. Si $(PF)^2+(PD)^2=36$, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{FD}$ y $\overline{BP}$.

A) $\sqrt{16}$ B) 3 C) 2

D) 5 E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 289

En el gráfico, $(AB)(BC)-(MP)^2=k$, calcule MB.



A) $\sqrt{k}$ B) $\sqrt{2k}$

C) $2\sqrt{k}$ D) $4\sqrt{k}$

E) $\sqrt{3k}$

PROBLEMA Nº 290

En un heptágono regular ABCDEFG; $\frac{1}{BF}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{2}$.

Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{CF}$ y $\overline{BD}$.

A) 1 B) 2 C) 0,5

D) 1,5 E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 291

Desde el punto A exterior a una circunferencia, se trazan las tangentes $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ (P y Q son puntos de tangencia) y la secante ABC. Si (BP)(CQ)=k, Calcule (BC)(PQ).

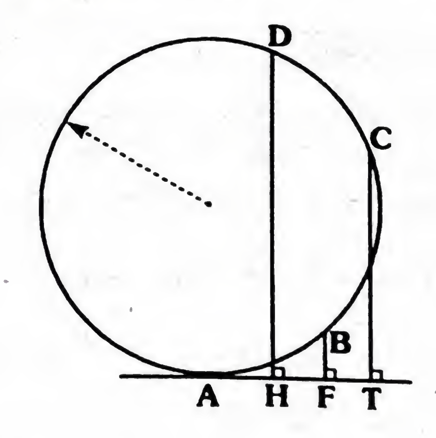
A) 2k B) k

C) 3k D) 4k

E) $k\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico $m\overset{\frown}{DC}=m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{BC}$, DH=a y BF=b; A es punto de tangencia. Calcule CT.



A) $\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ B) $a-b$

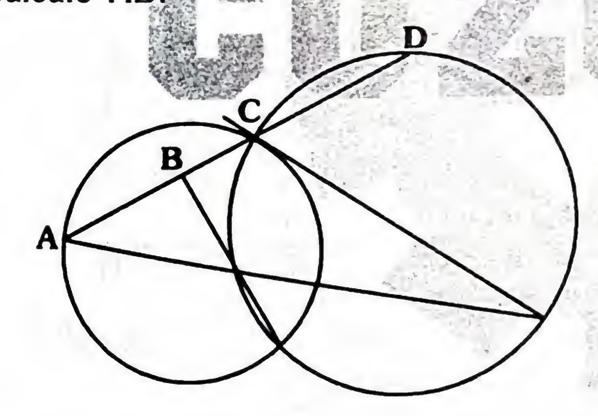
C) $\sqrt{ab}$ D) $\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

E) $\dfrac{a+b}{2}$

PROBLEMA Nº 293

En el gráfico, C es punto de tangencia. Si BC=a y CD=b.

Calcule AB.



A) $\sqrt{a(a+b)}$ B) $\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{a(2a+b)}$ D) $\sqrt{b(a+b)}$

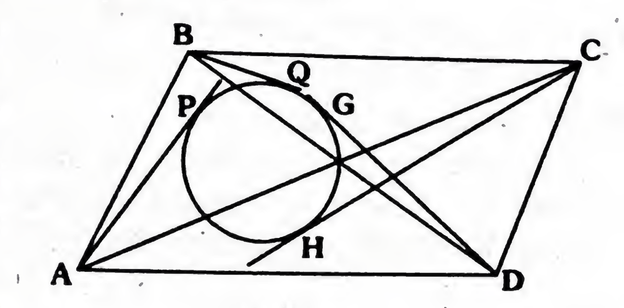
E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 294

En el gráfico, ABCD es paralelogramo si:

$$(AP)^2+(DG)^2+(CH)^2+(BQ)^2=200$$

Calcule $(AB)^2+(BC)^2$. (P, Q, G y H son puntos de tangencia)



A) 50   B) 100   C) 200

D) $50\sqrt{2}$ E) $100\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 295

En una semicircunferencia de diámetro AB se ubican los puntos P y Q, luego se traza $\overline{PH}\perp\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$), tal que $\overrightarrow{PH}$ es bisectriz del ∢APQ. Si AH=9 y HB=7. Calcule la distancia de Q a $\overline{AB}$.

A) 4   B) $\dfrac{3}{4}\sqrt{7}$ C) $\sqrt{3}$

D) 1   E) $\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 296

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B), se ubica M en $\overline{AB}$ tal que el triángulo CMD es equilátero. Si AM=a y MB=b. Calcule MC.

A) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ B) $2\sqrt{a^2+b^2}$

C) $2\sqrt{ab}$ D) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}$

E) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3(a^2-ab+b^2)}$

PROBLEMA Nº 297

Indique el valor de las siguientes proposiciones:

I. La mediana de mayor longitud es relativa al mayor lado.

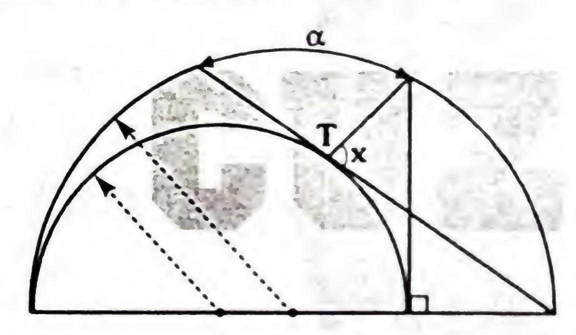
II. Si un cuadrilátero convexo cumple el teorema de Ptolomeo es inscriptible.

III. En un triángulo se cumple que si un lado tiene mayor longitud que otro, entonces tiene mayor longitud de la proyección sobre el tercer lado.

A) VFV B) VVV
C) FFF D) FVV
E) VVF

PROBLEMA Nº 298

En el gráfico, T es punto de tangencia, calcule x en función de α.



A) α B) $90°-\alpha$
C) $90°-\frac{\alpha}{2}$ D) $45°+\alpha$
E) $90°-\frac{\alpha}{4}$

PROBLEMA Nº 299

En el arco AB de una circunferencia circunscrita al hexágono regular ABCDEF, cuyo lado mide ℓ, se ubica P. Calcule:

$$(AP)^2+(PB)^2+(PC)^2+(PD)^2+(PE)^2+(PF)^2$$

A) $6\ell^2$ B) $8\ell^2$ C) $9\ell^2$
D) $10\ell^2$ E) $12\ell^2$

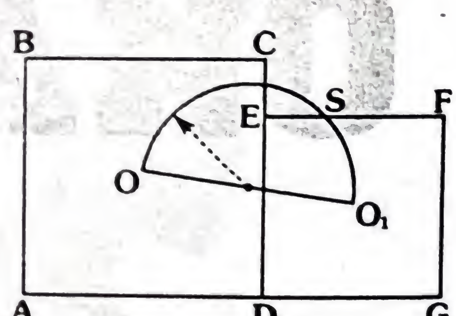
PROBLEMA Nº 300

En el gráfico, O y O_1 son centros de los cuadrados ABCD y DEFG tal que:

$$2(AD)=3(DG) \quad \text{y}$$

$$3(SO_1)+2(SO)=3\sqrt{13}$$

Calcule SD.



A) 3 B) 6 C) $\sqrt{13}$
D) 5 E) $2\sqrt{13}$

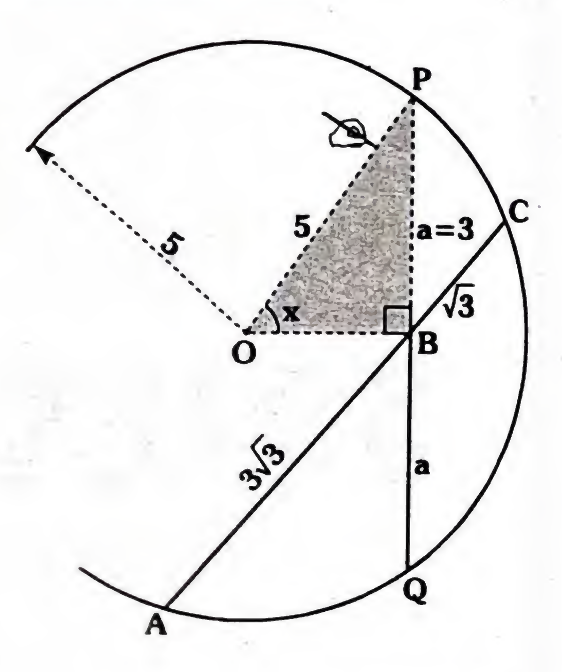
Geometría

SOLUCIONARIO

- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

RELACIONES MÉTRICAS

RESOLUCIÓN Nº 1



- Nos piden: $m\widehat{PQ}$
- Como $PB = BQ$

  $\Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{PQ}$ y $m\widehat{PQ} = 2x$
- Por teorema de las cuerdas:

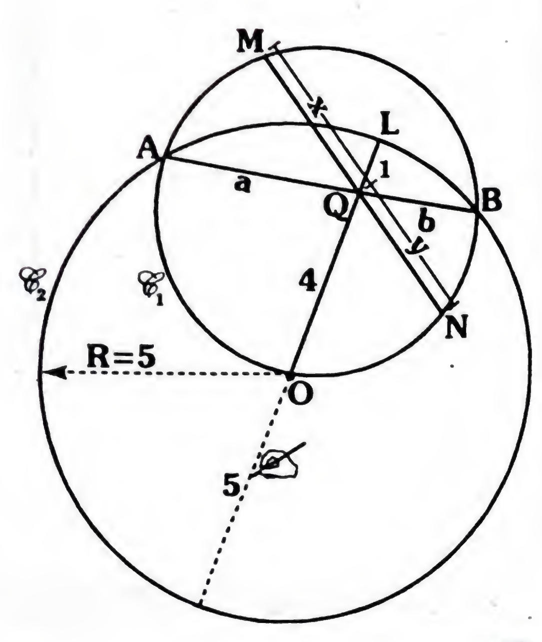
  $a \cdot a = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a = 3$
- El ⊿OBP es notable de 37° y 53°

  $\Rightarrow x = 37°$

$\therefore$ **$m\widehat{PQ} = 74°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 2



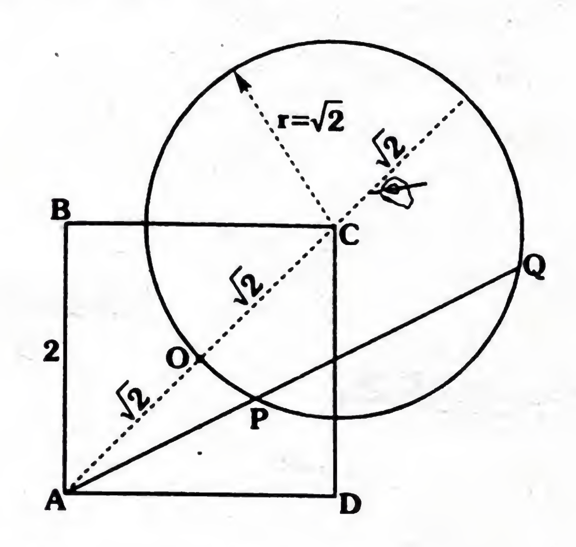
- Nos piden: xy
- Como:

  $OQ = 4$ y $QL = 1 \Rightarrow R = 5$
- Por teorema de las cuerdas:
- En $\mathscr{C}_1$, $xy = ab$
- En $\mathscr{C}_2$, $ab = 1 \cdot 9 = 9$

$\therefore$ **$xy = 9$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 3



- Nos piden: (AP) (AQ)
- Debido a que ABCD es un cuadrado y O es centro:

$$AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = OC = \sqrt{2}$$

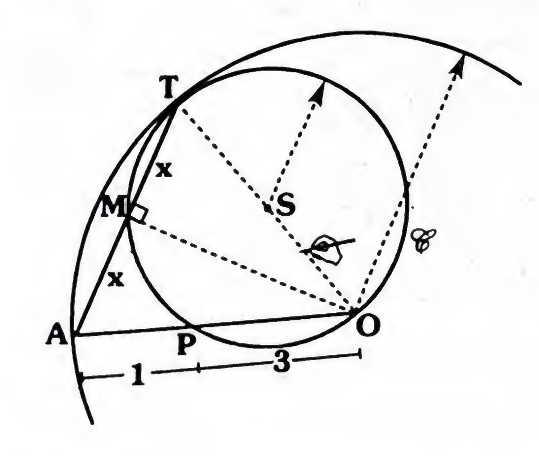
- Por teorema de la secante:

$$(AP)(AQ) = (\sqrt{2})(3\sqrt{2})$$

$$\therefore \mathbf{(AP)(AQ) = 6}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 4



- Piden: AT
- Por teorema de circunferencia, O,S y T son colineales, entonces $\overline{OT}$ es diámetro de 𝒞.
- Como ΔAOT es isósceles y $\overline{OM}$ es altura $\Rightarrow AM = MT$.
- Por teorema de la secante.

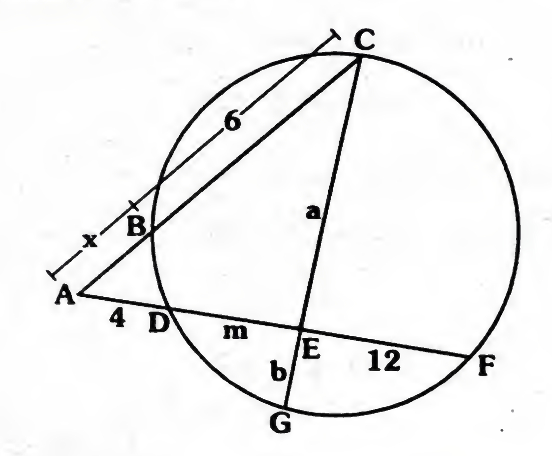
$$x(2x) = 1(4)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \mathbf{AT = 2\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 5



- Nos piden: x
- Dato: $ab = 24$
- Por teorema de las cuerdas:

$$ab = 12m \Rightarrow m = 2$$

- Por teorema de la secante:

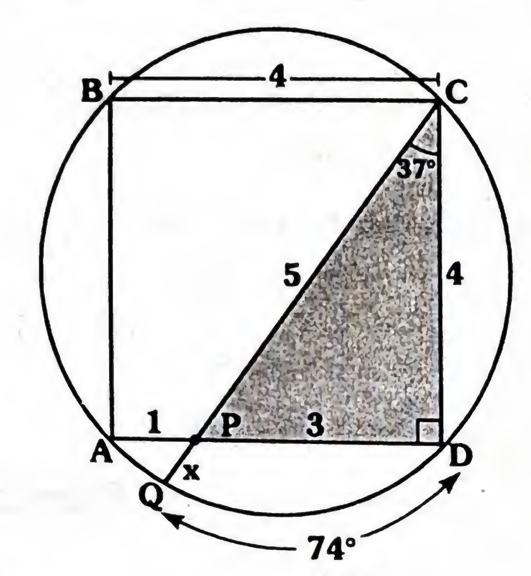
$$x(x+6) = \underbrace{4(18)}$$

$$x(x+6) = 6(6+6)$$

$$\therefore \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 6



- Piden: x
- Por medida de ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle QCD = 37°$$

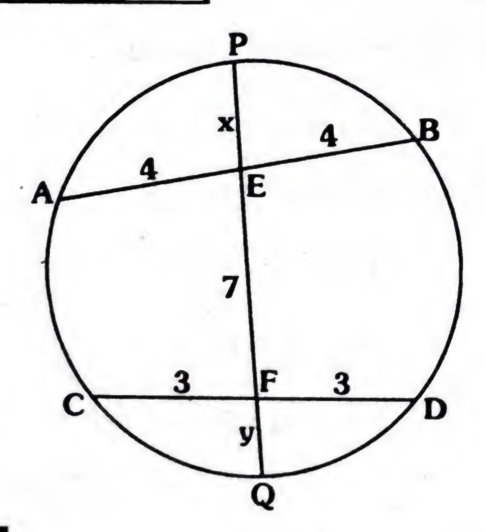
- ⊿CPD: notable 37° y 53°
- Por teorema de cuerdas:

$$x \cdot 5 = 1 \cdot 3$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 3/5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7



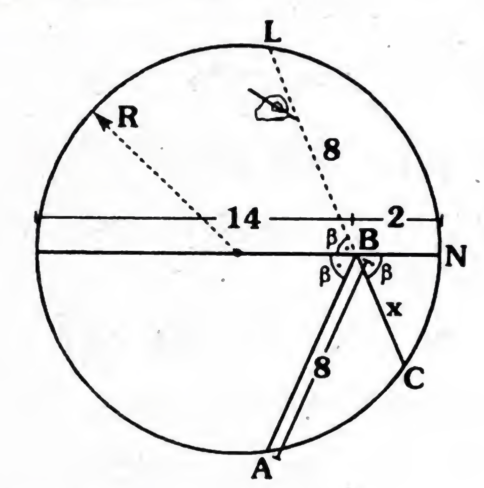
- Piden: x − y
- Por teorema de cuerdas:
- Para $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$: $4 \cdot 4 = x(7+y)$
- Para $\overline{CD}$ y $\overline{PQ}$: $3 \cdot 3 = y(7+x)$ (−)

$$7 = 7(x-y)$$

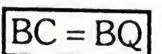
$$\therefore\ \mathbf{x - y = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 8



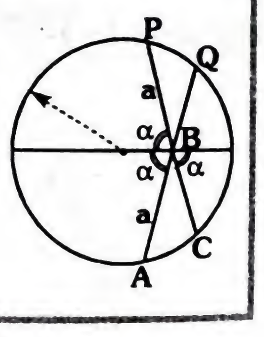
- Piden: x



- Por propiedad de simetría. En el gráfico, se cumple:

BA = BP y

BC = BQ

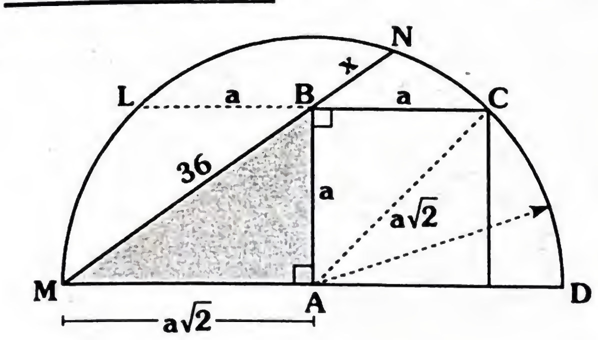


- De la observación BL = BA = 8
- Por teorema de cuerdas:

$$x \cdot 8 = 14 \times 2 \Rightarrow \mathbf{x = 7/2 = 3,5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 9



- Piden: x
- Por teorema en la circunferencia:

$$LB = BC$$

- Por teorema de cuerdas:

$$x \cdot 36 = a \cdot a \rightarrow 36x = a^2 \qquad \ldots (I)$$

- ⊿BMA: $(36)^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$

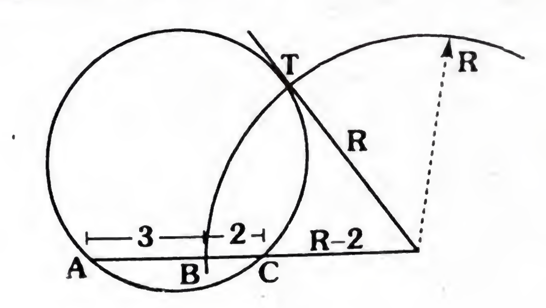
$$\Rightarrow a^2 = 36 \times 12 \qquad \ldots (II)$$

- (II) en (I): $36x = 36 \cdot 12$

$$\therefore \mathbf{x = 12}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 10



- Piden: R
- Por teorema de la tangente:

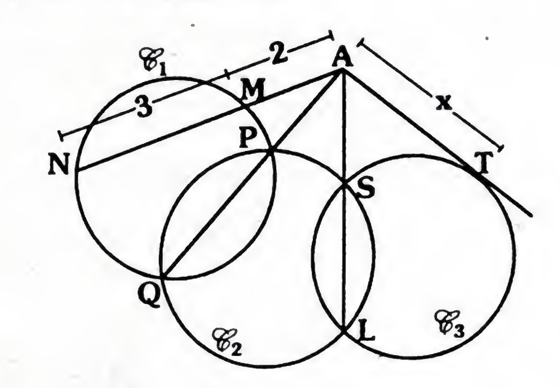
$$R^2 = (R+3)(R-2)$$

$$\cancel{R^2} = \cancel{R^2} + R - 6$$

$$\therefore \mathbf{R = 6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 11



- Piden: x
- Por teorema de la tangente

En $\mathscr{C}_3$: $x^2 = (AL)(AS) \qquad \ldots (I)$

- Por teorema de la secante

En $\mathscr{C}_2$: $(AS)(AL) = (AQ)(AP) \qquad \ldots (II)$

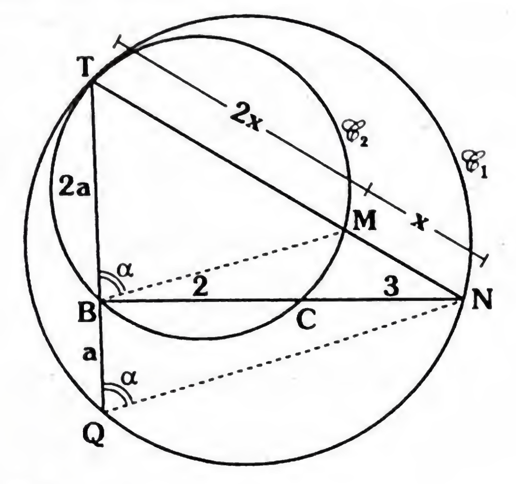
En $\mathscr{C}_1$: $(AQ)(AP) = 5(2) \qquad \ldots (III)$

- (II) y (III) en (I): $x^2 = 10$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{10}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 12



- Piden: x
- Por posiciones relativas entre 2 circunferencias:

$$m\overset{\frown}{MT} = m\overset{\frown}{TN} \rightarrow \overline{BM} // \overline{QN}$$

- ΔQTN: por corolario de Tales

$$TM = 2(MN) = 2x$$

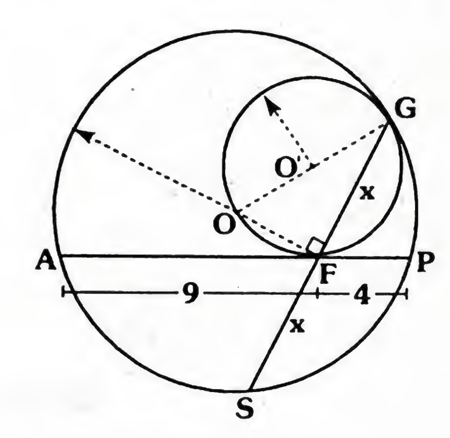
- En $\mathscr{C}_2$: por teorema de la secante

$$\cancel{3}x \cdot x = 5 \times \cancel{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{5}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 13



- Nos piden: x
- Como O,O' y G son colineales, tendremos que $\overline{OG}$ es el diámetro de la circunferencia menor

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle OFG = 90°$$

- En la circunferencia mayor:

$$SF = FG = x$$

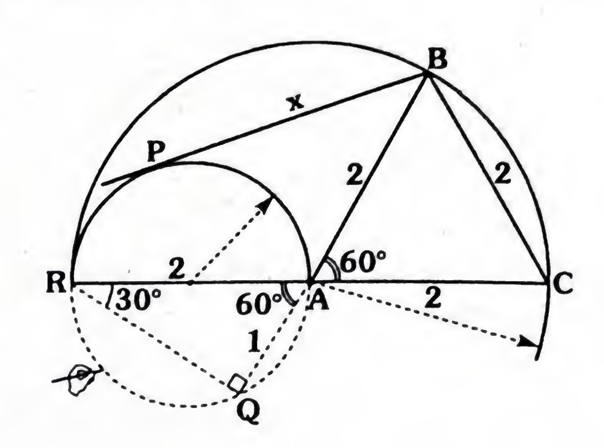
- Del teorema de las cuerdas:

$$x \cdot x = 9 \cdot 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 14



- Nos piden: x
- Se prolonga $\overline{BA}$ hasta el punto Q de la circunferencia menor.
- El ⊿AQR es notable de 30°

$$\Rightarrow \quad AQ = 1$$

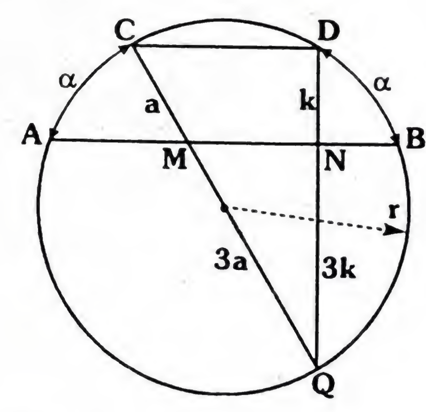
- Por el teorema de tangente:

$$x^2 = 2 \cdot 3$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{6}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 15



- Nos piden: r
- Dato: $(AM)(MB) = 12$
- Como: $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overline{CD} // \overline{AB}$

- Por Teorema de Tales:

$$\frac{CM}{MQ}=\frac{k}{3k} \Rightarrow CM=a \; ; \; MQ=3a$$

- Por teorema de cuerdas:

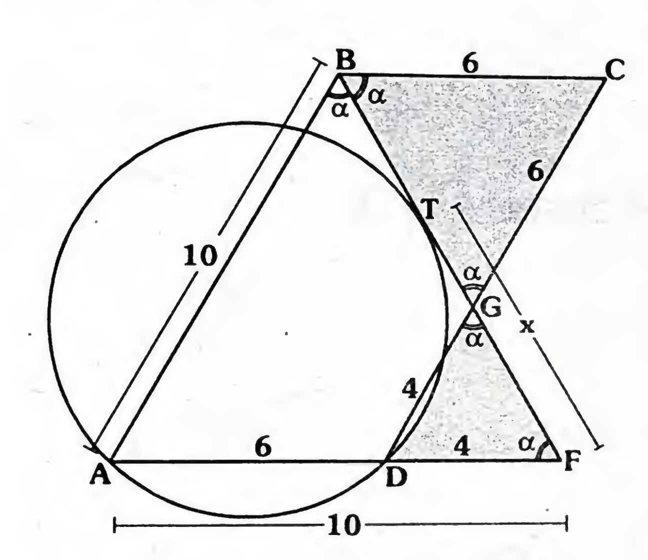
$$AM \cdot MB = a \cdot 3a \Rightarrow 12 = a \cdot 3a \Rightarrow a = 2$$

- Como $CQ=4a \Rightarrow r=2a$

$$\therefore \; \mathbf{r=4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 16



- Nos piden: x
- Como ABCD es paralelogramo

$\Rightarrow$ AD=BC=6 y $\Rightarrow$ AB=CD=10

- ΔDFG y ΔBGC son isósceles

$\Rightarrow$ AD=BC=6 y $\Rightarrow$ DG=DF=4

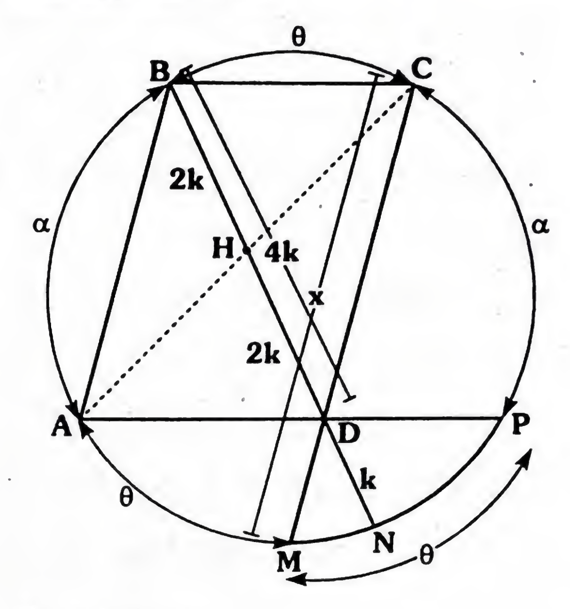
- Por teorema de tangente:

$$x^2 = 4 \cdot 10$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 2\sqrt{10}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 17



- Nos piden: x
- Por teorema de las cuerdas:

$$\underbrace{AD \cdot DP}_{8} = 4k \cdot k \Rightarrow k=\sqrt{2}$$

- También:

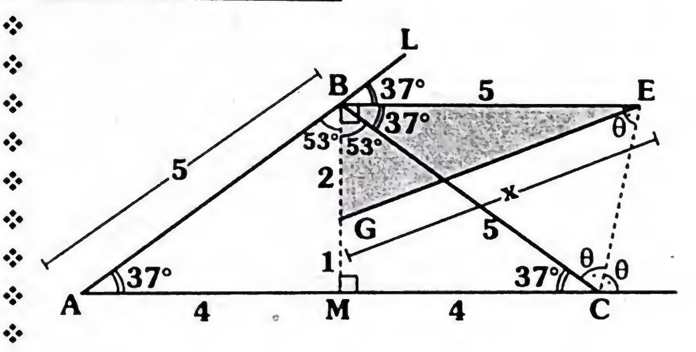
$$AH \cdot HC = 2k \cdot 3k \Rightarrow AH = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

- Pero: $m\widehat{MPC} = m\widehat{ABC} = \alpha + \theta$

$$\therefore \; \mathbf{x = AC = 4\sqrt{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 18



- G: baricentro del ΔABC.
- E: excentro relativo a $\overline{BC}$ del ΔABC.

- Nos piden: x
- Se traza la mediana $\overline{AM}$, la cual también es bisectriz y altura, por ser el ΔABC isósceles.
- ⊿AMB notable de 37° y 53° $\Rightarrow$ BM=3
- Como G es baricentro

$$\Rightarrow BG = 2 \quad y \quad GM = 1$$

- Como "E" es excentro

$$\Rightarrow m\sphericalangle LBE = m\sphericalangle EBC = 37°$$

y $m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle ECT$, luego: $\overline{BE} // \overline{AC}$ y ΔCBE: isósceles $(BC = BE = 5)$.

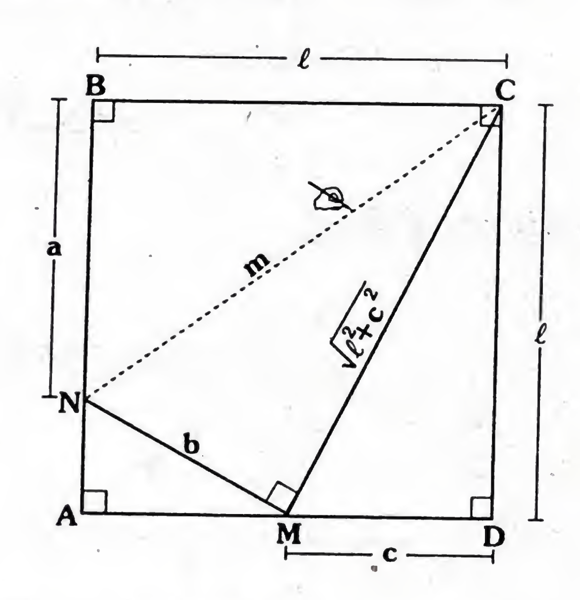
- ◺GBE: teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 2^2 + 5^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{29}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 19



- Nos piden la relación entre a, b y c.
- Por teorema de Pitágoras:
- En ◺MDC:

$$(MC)^2 = c^2 + \ell^2 \Rightarrow MC = \sqrt{\ell^2 + c^2}$$

- En ⊿ NMC:

$$m^2 = b^2 + (\ell^2 + c^2)^2 \qquad \ldots (I)$$

- En ⊿NBC:

$$m^2 = a^2 + \ell^2 \qquad \ldots (II)$$

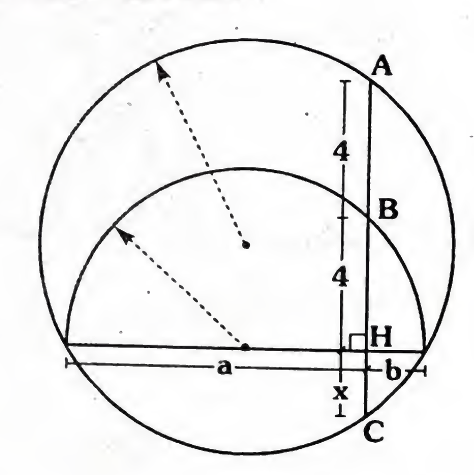
- De (I) y (II):

$$a^2 + \ell^2 = b^2 + \ell^2 + c^2$$

$$\therefore \ \mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 20



- Nos piden: x
- Por teorema de las cuerdas:

$$ab = 8x \qquad \ldots (I)$$

- En la semicircunferencia:

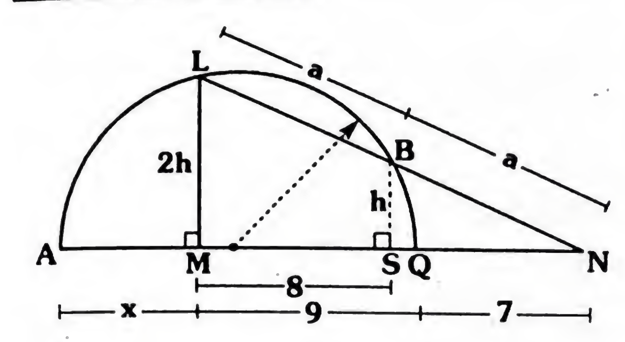
$$4^2 = ab \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $8x = 16$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 21



- Nos piden: x
- Trazamos $\overline{BS} \perp \overline{AQ}$ entonces para el $\triangle$LMN, $\overline{BS}$ es base media

$$\Rightarrow LM = 2(BS) \quad y \quad MS = SN$$

- Luego: $MS = 8$ y $SQ = 1$
- En la circunferencia por teorema:

$$h^2 = (8 + x) \cdot 1 \qquad \text{... (I)}$$

$$(2h)^2 = 9x \qquad \text{... (II)}$$

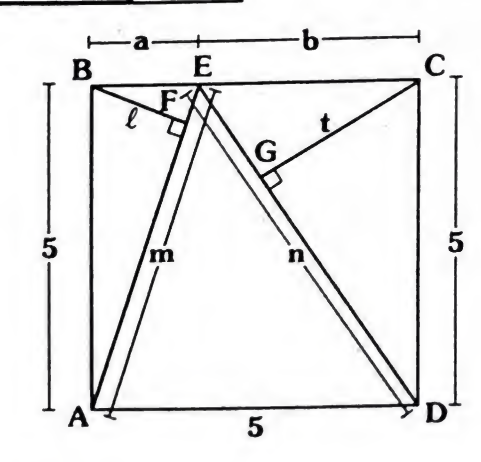
- De (I) y (II):

$$4(8 + x) = 9x \Rightarrow x = \frac{32}{5}$$

$$\therefore \mathbf{x = 6,4}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 22



- Nos piden: $\ell m + nt$

- En $\triangle$ABE y $\triangle$ECD, por teorema:

$$5a = \ell m \qquad \text{... (I)}$$

$$5b = tn \qquad \text{... (II)}$$

- Sumando (I) y (II):

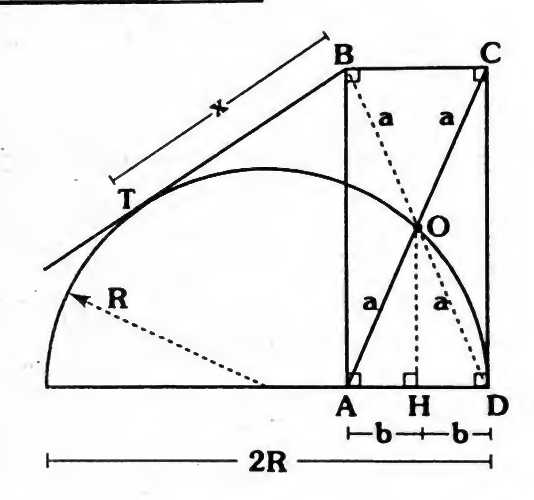
$$5a + 5b = \ell m + tn$$

$$5\underbrace{(a + b)}_{5} = \ell m + tn$$

$$\therefore \mathbf{\ell m + tn = 25}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 23



- Nos piden: x
- Dato: $(BC)R = k$
- Como $AO = OC \Rightarrow O$ es centro del rectángulo ABCD

$$\Rightarrow B, O \text{ y } D \text{ son colineales}$$

- ΔAOD es isósceles, al trazar la altura $\overline{OH} \Rightarrow AH = HD = b$
- Del dato: $2bR = k \qquad \text{... (I)}$
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = a(2a) = 2a^2 \qquad \text{...(II)}$$

- En la semicircunferencia, por teorema:

$$a^2 = b(2R) \qquad \text{... (III)}$$

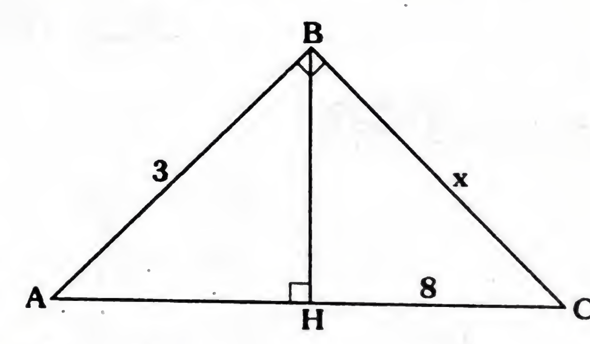
- De (II) y (III):

$$x^2 = 2(\underbrace{2bR}_{k})$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{2k}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 24



- Nos piden: x
- Por teorema:

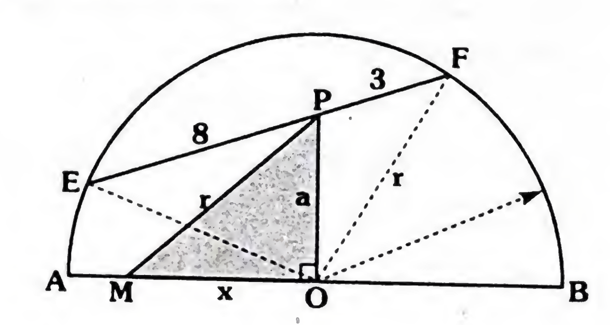
$$3^2 = AH(AH+8) \ \Rightarrow \ AH = 1$$

- También: $x^2 = 8 \cdot 9$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 25



- Nos piden: x
- Por teorema de cuerdas (*caso especial*)

$$8 \cdot 3 = r^2 - a^2 \qquad \text{... (I)}$$

- Por teorema de Pitágoras en ΔMOP:

$$x^2 + a^2 = r^2 \qquad \text{... (II)}$$

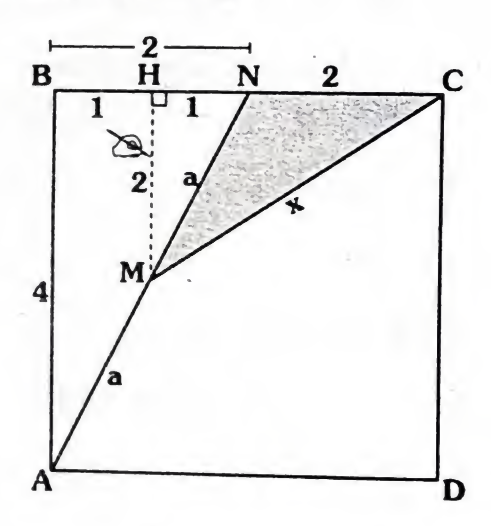
- De (I) y (II):

$$x^2 = 24$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2\sqrt{6}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 26



- Nos piden: x
- Por teorema de base media en ΔABN:

$$BH = HN = 1$$

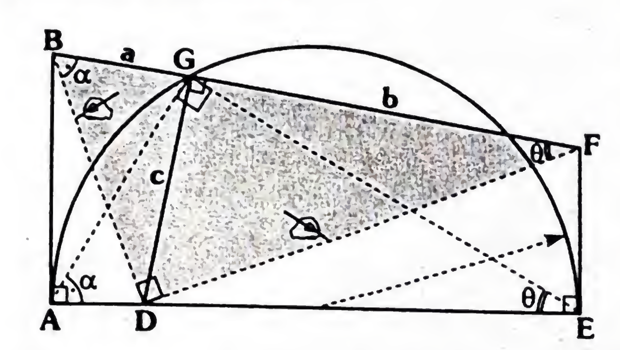
- Por teorema de Pitágoras en ⊿MHC:

$$2^2 + 3^2 = x^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{13}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 27



- Por teorema de cuadriláteros inscriptibles:

$$m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle OBC \quad y$$
$$m\sphericalangle CED = m\sphericalangle CFD$$

- En ΔACE: $\alpha + \theta = 90°$

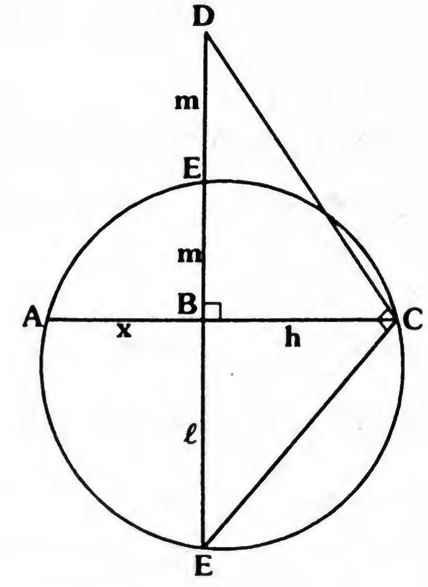
  $\Rightarrow$ en ΔBDF: $m\sphericalangle BDF = 90°$

- Por teorema en el ⊿BDF:

$$\mathbf{c^2 = ab}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 28



- Nos piden: x
- Dato: $xh=8$
- Por teorema de cuerdas:

$$xh = m\ell \qquad ...(1)$$

- Por teorema en el ⊿EDC:

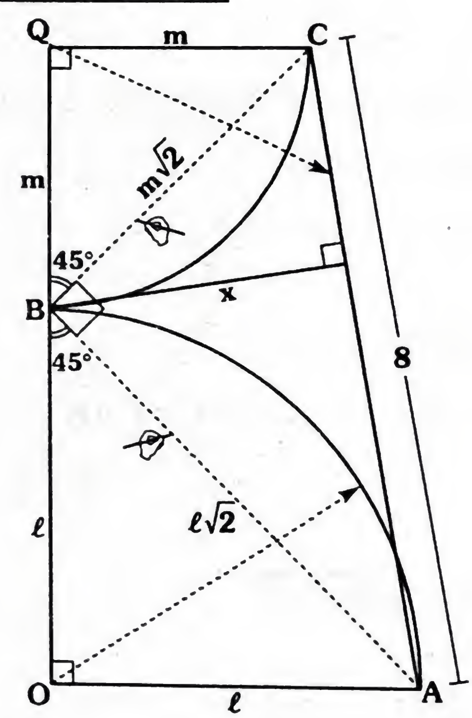
$$h^2 = 2m\ell \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2): $h=2x$
- En el dato: $x(2x) = 8$

$$\therefore \mathbf{x = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 29



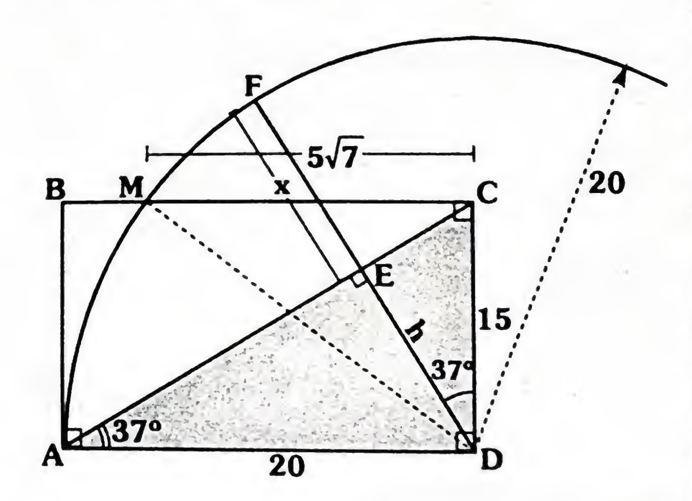
- Nos piden: x
- Dato: $m\ell = 12$
- Por teorema en el ⊿BCA:

$$m\sqrt{2}\cdot \ell\sqrt{2} = x\cdot 8 \Rightarrow 2\underbrace{m\ell}_{12} = x\cdot 8$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 30



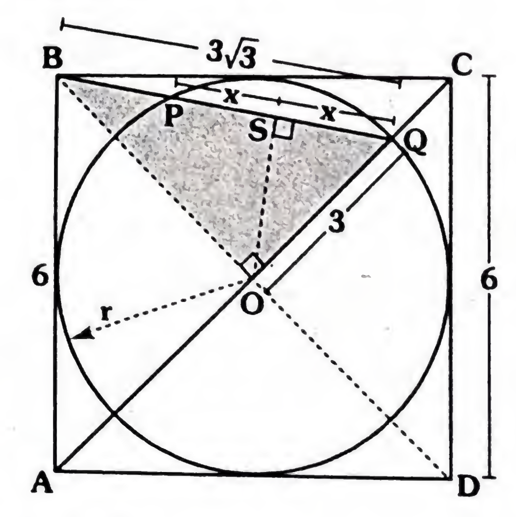
- Nos piden: x
- Por teorema de Pitágoras en ⊿MCD:
- Como MD=20 $\Rightarrow$ CD = 15
- Como CD=20 y CD=15

$$\Rightarrow m\measuredangle CAD = 37°$$

- ⊿DEC: notable $\Rightarrow$ h = 12
- Finalmente: $\mathbf{x = 20 - 12 = 8}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 31



- Piden: PQ
- O es centro de la circunferencia y del cuadrado $\Rightarrow r = 3$, $OB = 3\sqrt{2}$ y $m\measuredangle BOC = 90°$.
- Se traza $\overline{OS} \perp \overline{PQ}$ $\Rightarrow$ PS = SQ = x
- En el ⊿BOQ, por teorema de Pitágoras:

$$BQ = 3\sqrt{3}$$

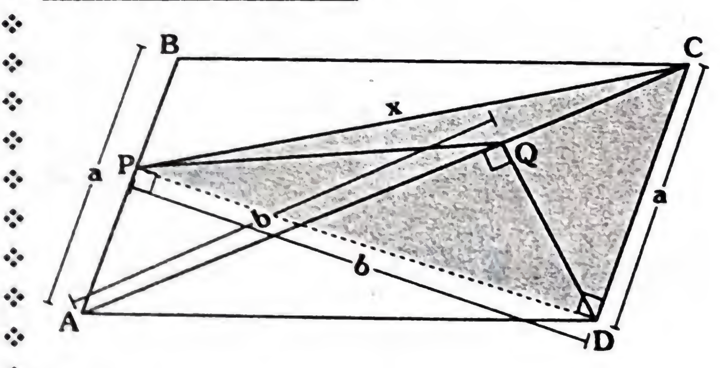
- También: $3^2 = (3\sqrt{3})x$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \mathbf{PQ = 2\sqrt{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 32



- Nos piden: x
- Como APQD es un trapecio isósceles

$$\Rightarrow AQ = PD = b \quad y \quad m\measuredangle APD = 90°$$

- Como:

$$\overline{AB} // \overline{CD} \Rightarrow m\measuredangle PDC = 90°$$

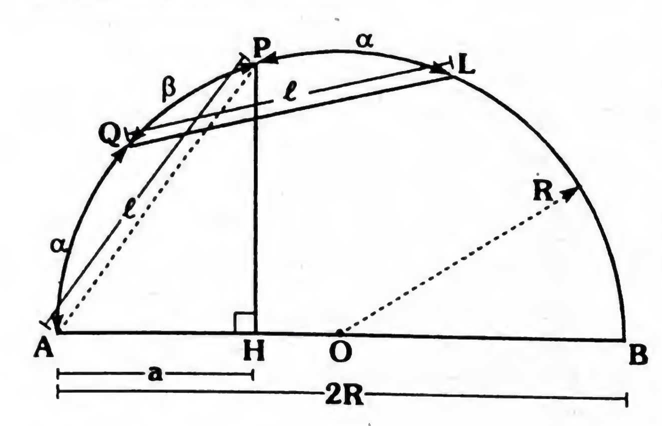
- En ⊿PDC, por teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 33



- Nos piden: QL
- Datos: $AR = k$ y $m\widehat{AQ} = m\widehat{PL}$
- Del último dato se deduce:

$$m\widehat{AP} = m\widehat{GL} \Rightarrow QL = AP = \ell$$

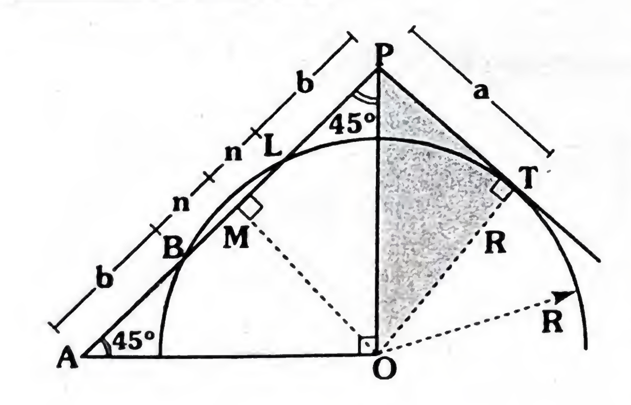
- En la semicircunferencia:

$$\ell^2 = a(2R) = 2\underbrace{(aR)}_{k}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\ell = \sqrt{2k}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 34



- Nos piden: R
- Por teorema.
- Al trazar $\overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow AM = MC$

  y $BM = ML \Rightarrow LC = b$

- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = b(b + 2n) \Rightarrow n = \frac{a^2 - b^2}{2b}$$

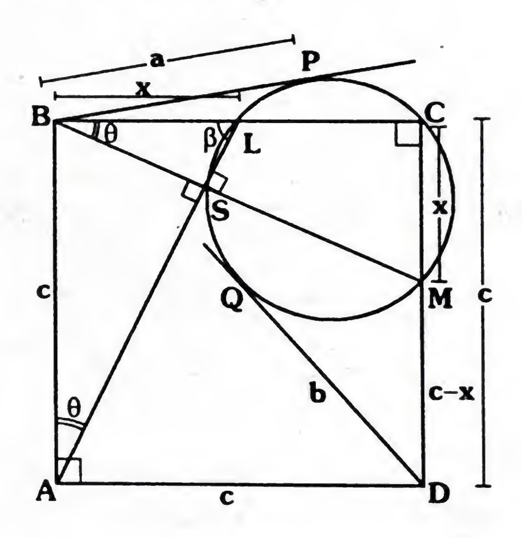
- $PM = n + b = \dfrac{a^2 + b^2}{2b}$
- El ⊿OTP: teorema de Pitágoras

$$R^2 + a^2 = \left[\left(\frac{a^2 + b^2}{2b}\right)\sqrt{2}\right]^2$$

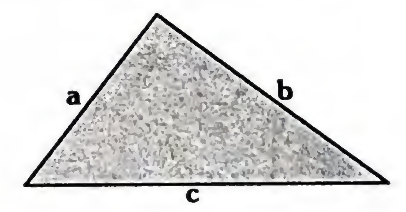
$$\therefore\ \mathbf{R = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 35



- Nos piden que tipo de triángulo es el que tiene por lados: a, b, c



- Analicemos la relación entre ellos.
- Notemos $m\sphericalangle LSM = 90°$

- $\triangle ABL \cong \triangle BCM(ALA) \Rightarrow BL = CM = x$
- Por teorema de la tangente:

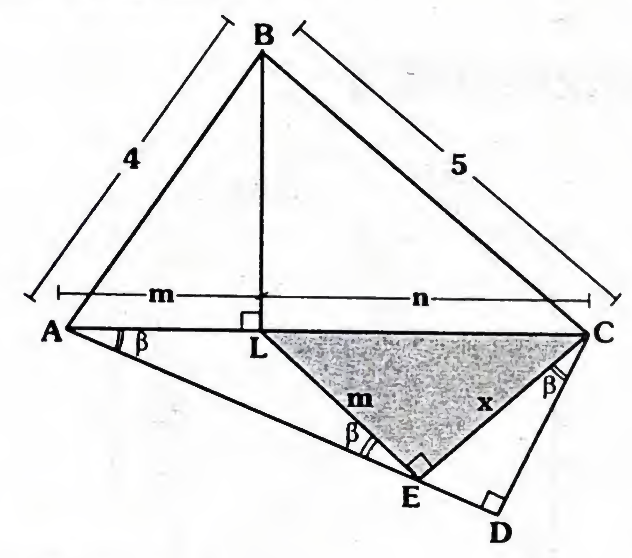
$$a^2 = xc \quad \ldots (I)$$

$$b^2 = (c - x)c \quad \ldots (II)$$

- Sumando (I) y (II): $a^2 + b^2 = c^2$
- Por el recíproco del teorema de Pitágoras, el triángulo sombreado es triángulo rectángulo.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 36



- Piden: x
- Se deduce ΔALE: isósceles
- $\triangle LEC$: $n^2 = m^2 + x^2$

$$x^2 = n^2 - m^2 \quad \ldots (I)$$

- ΔABC: teorema de proyecciones:

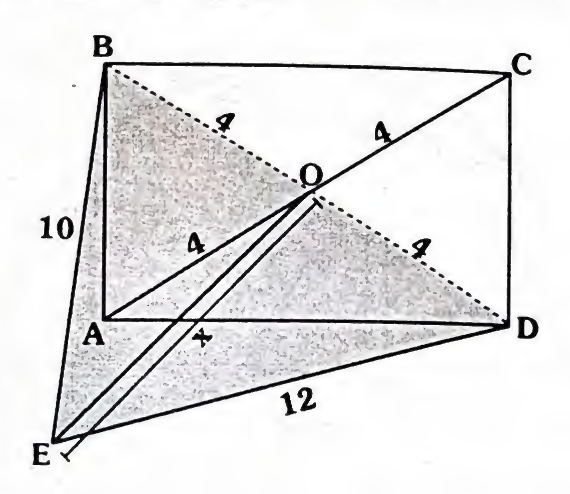
$$n^2 - m^2 = 9^2 - 4^2 = 9 \quad \ldots (II)$$

- (II) en (I): $\mathbf{x^2 = 9}$

$$\mathbf{x = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 37



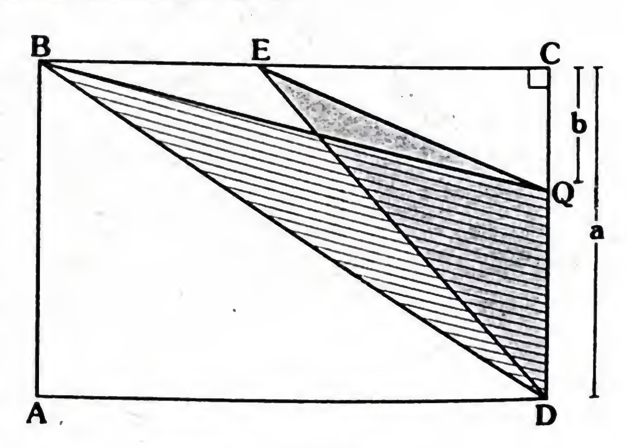
- Piden: x
- Como ABCD es un rectángulo B, O y D: son puntos colineales además: $BO = OD = 4$
- ΔBED: teorema del cálculo de la mediana.

$$(10)^2 + (12)^2 = 2x^2 + \frac{8^2}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{106}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 38



- Piden: $(BD)^2 + (EQ)^2$
- Dato: $(BQ)^2 + (ED)^2 = k$

- Por teorema de proyecciones:

$\Delta DBQ : (BD)^2 - (BQ)^2 = a^2 - b^2$ ... (I)

$\Delta DEQ : (ED)^2 - (EQ)^2 = a^2 - b^2$ ... (II)

- Entonces (I) = (II) :

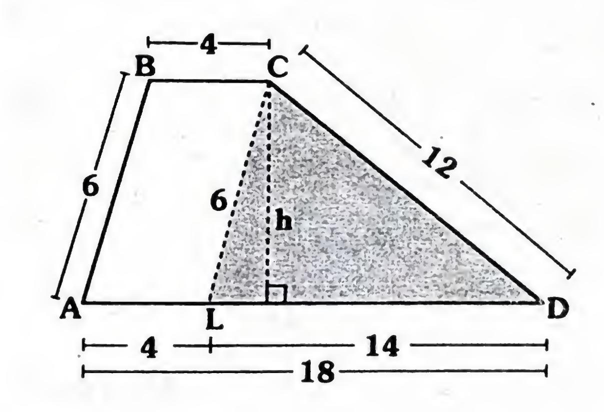
$$(BD)^2 - (BQ)^2 = (ED)^2 - (EQ)^2$$

$$(BD)^2 + (EQ)^2 = \underbrace{(ED)^2 + (BQ)^2}_{k}$$

$$\therefore \ \mathbf{(BD)^2 + (EQ)^2 = k}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 39



- Piden: H
- Trazamos:

$\overline{CL} // \overline{AB} \rightarrow$ ▱ABCL: paralelogramo

$\Rightarrow AL = 4$ y $CL = 6$

- ΔLCD: teorema de Herón

Hallemos su semiperímetro:

$$\frac{6+12+14}{2} = 16$$

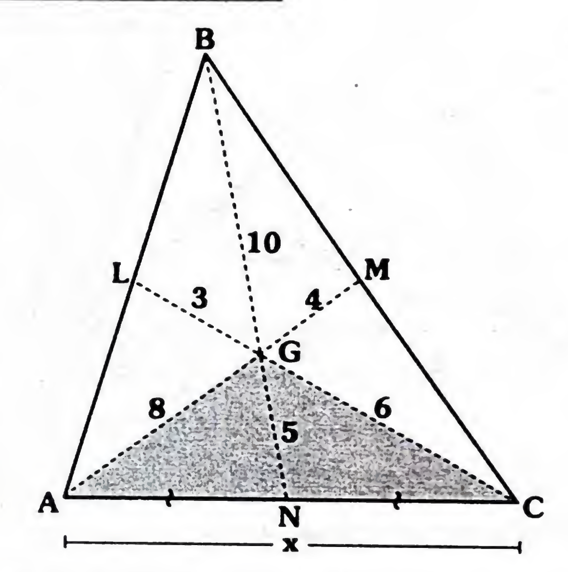
$$\Rightarrow \ h = \frac{2}{14}\sqrt{16 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$h = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 16}{\underset{7}{\cancel{14}}}\sqrt{5}$$

$$\therefore \ \mathbf{h = \frac{16}{7}\sqrt{5}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 40



- Nos piden la longitud del menor lado.
- La mayor mediana es respecto al menor lado.

$\Rightarrow \overline{AC}$ es el menor lado

- Se sabe que las tres medianas son concurrentes en G (baricentro). Por propiedad:

$AG = 2(GM)$; $BG = 2(GN)$ y $CG = 2(GL)$

$\Rightarrow AG=8$, $GN=5$ y $GC=6$

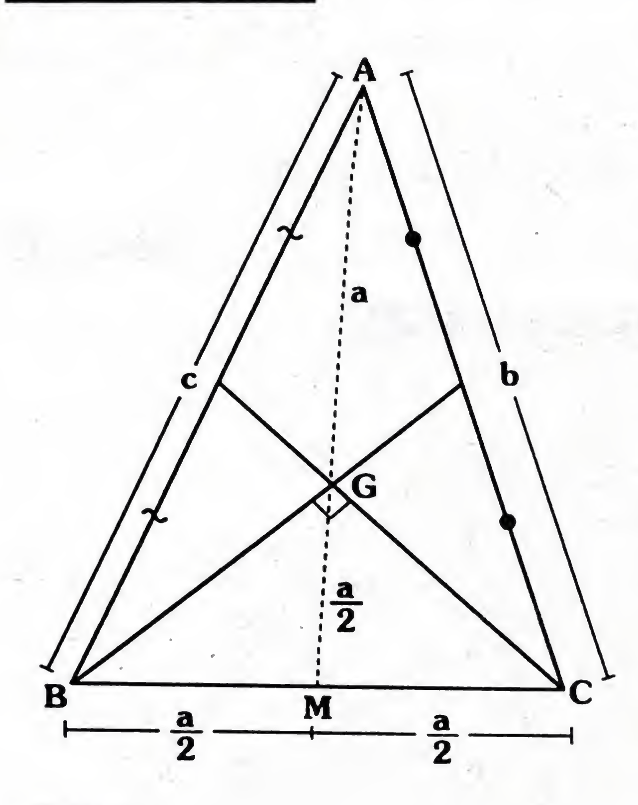
- ΔAGC : teorema cálculo de la mediana

$$8^2 + 6^2 = 2(5^2) + \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 41



- Piden:

  la relación entre a, b y c.

- Se observa G, baricentro del ΔABC.

- ⊿BGC: mediana relativa a la hipotenusa.

$$GM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

- Además: $AG = 2(GM) = a$

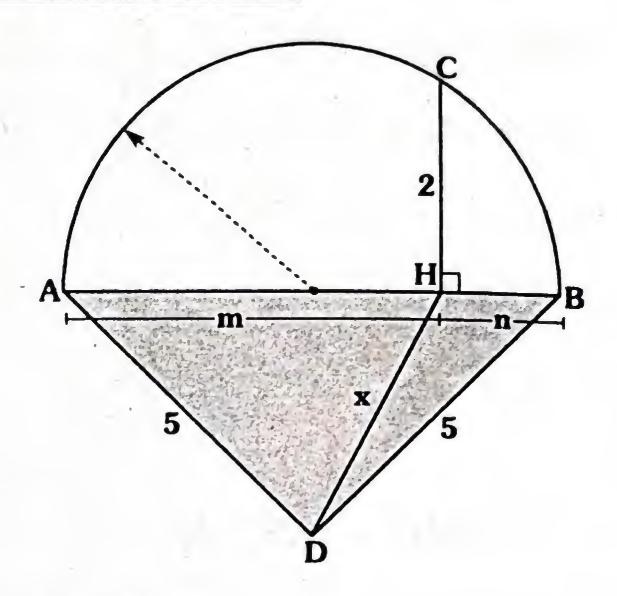
- ΔBAC : teorema cálculo de la mediana.

$$c^2 + b^2 = 2\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{c^2 + b^2 = 5a^2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 42



- Piden x:

- ΔADB : Teorema Stewart (para el triángulo isósceles):

$$x^2 = 5^2 - mn \qquad \text{... (I)}$$

- En ◠, $\quad 2^2 = mn \qquad \text{...(II)}$

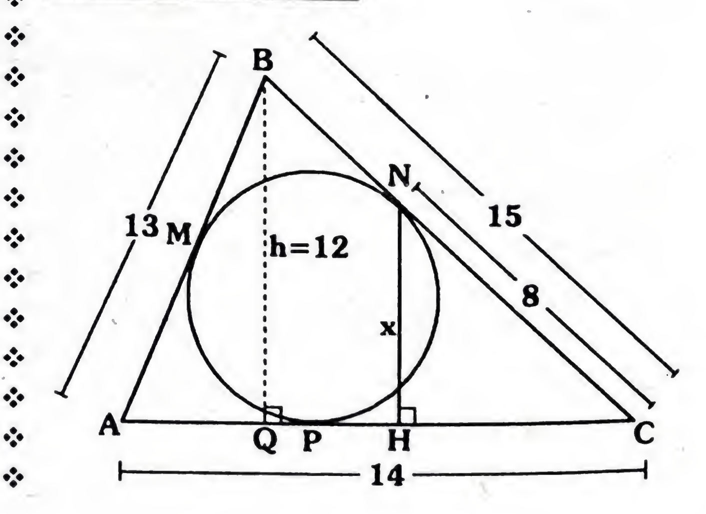
- (II) en (I): $\quad x^2 = 5^2 - 2^2$

$$x^2 = 21$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{21}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 43



- Nos piden: x
- Por teorema de Heron: $h = 12$
- Por teorema en ΔABC: $NC = p - 13$,

pero: $p = \dfrac{13+14+15}{2} \Rightarrow p = 21$

$$\Rightarrow NC = p - 13 = 8$$

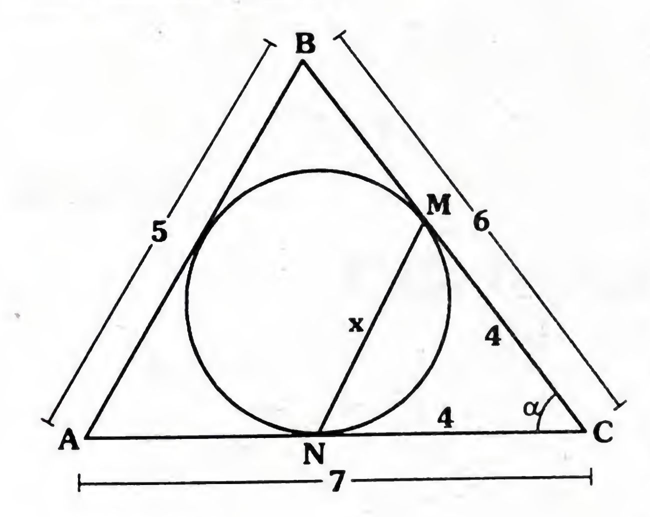
- Por: $\Delta BQC \sim \Delta NHC$

$$\frac{x}{12} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \mathbf{x = 6,4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 44



- Nos piden: x
- Por teorema en ΔABC:

$$MC = NC = p - 5$$

pero: $p = \dfrac{5+6+7}{2} \Rightarrow p = 9 \Rightarrow NC = 4$

- Por teorema de cosenos en ΔABC:

$$5^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{7}$$

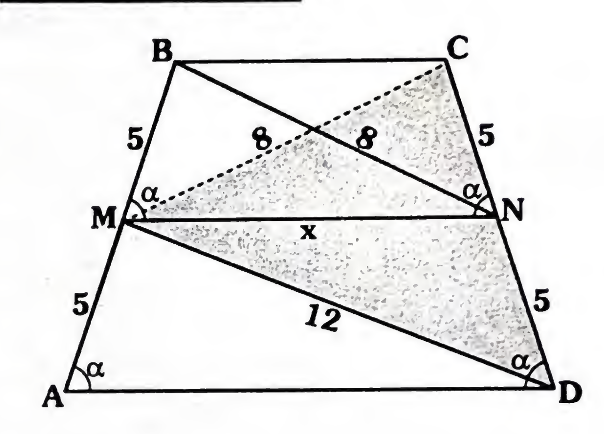
- En ΔCMN:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos\alpha$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{8\sqrt{7}}{7}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 45



- Nos piden: x
- Como ⌂MBCN es un trapecio isósceles

$$\Rightarrow MC = 8$$

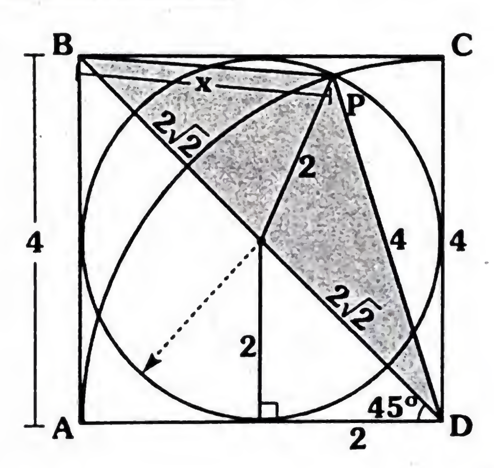
- Por teorema de mediana en ΔMCD:

$$8^2 + 12^2 = 2x^2 + \frac{10^2}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{79}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 46



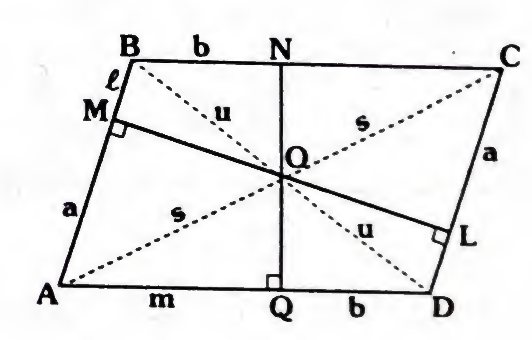
- Nos piden: x
- Por teorema de mediana en el ΔBPD:

$$x^2+4^2=2\cdot 2^2+\frac{(4\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=2\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 47



- Nos piden: a^2+b^2
- Dato: $m^2+\ell^2=k$
- Por teorema: $AM=CL=a$

$QD=BN=b$

- Por teorema de proyecciones:

ΔAOB: $s^2-u^2=a^2-\ell^2$

ΔAOD: $s^2-u^2=m^2-b^2$

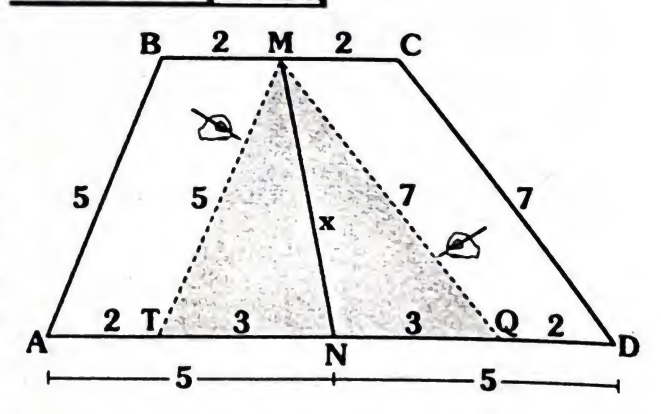
$$\Rightarrow\ a^2-\ell^2=m^2-b^2$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2=\ell^2+m^2$$

$$\therefore\ \mathbf{a^2+b^2=k}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 48



- Nos piden: x
- Se traza $\overline{MT}//\overline{AB}$ y $\overline{MQ}//\overline{CD}$

$\Rightarrow MT=5,\ MQ=7,\ AT=2$ y $QD=2$

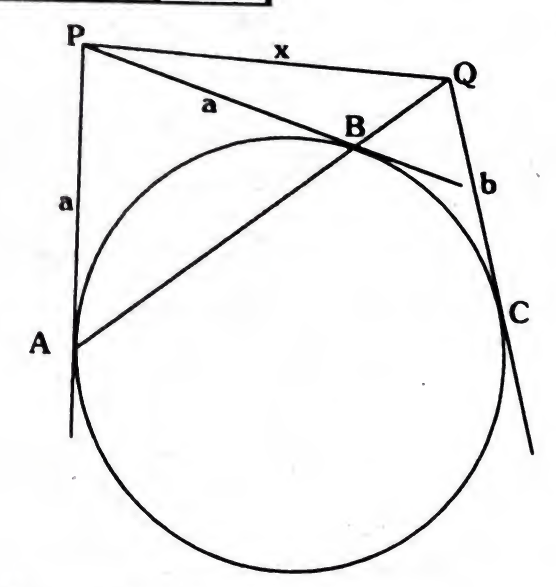
- Por teorema, mediana en ΔTMQ:

$$5^2+7^2=2x^2+\frac{6^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=2\sqrt{7}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 49



- Nos piden: x
- Por teorema de Stewart en APB:

$$x^2=a^2+(AQ)(BQ) \qquad \ldots\text{(I)}$$

- Por teorema tangente:

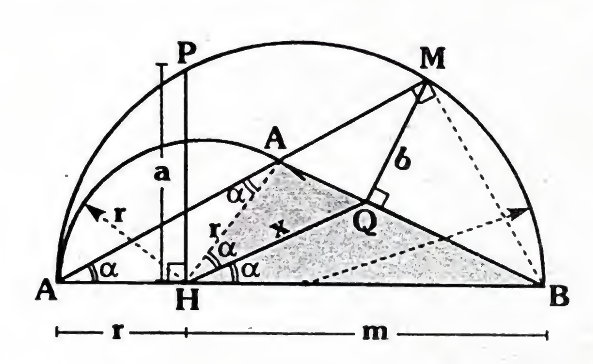
$$b^2 = (AQ)(BQ) \quad \dots (II)$$

- (II) en (I):

$$\mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 50



- Nos piden: x
- Por teorema:

$$a^2 = rm \quad \dots (I)$$

- Por teorema en ⊿AMB:

$$b^2 = (AQ)(QB) \quad \dots (II)$$

- Por teorema de bisectriz en ΔHBA :

$$x^2 = rm - (AQ)(QB)$$

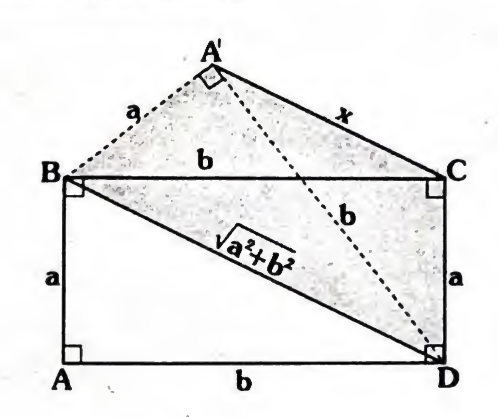
- Reemplazando (I) y (II):

$$x^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 51



- Nos piden: x
- Al doblar la hoja, se cumple:

$$BA' = CD = a \quad y$$

$$BC = A'D = b$$

- Por teorema de Pitágoras, en el ⊿ABD:

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

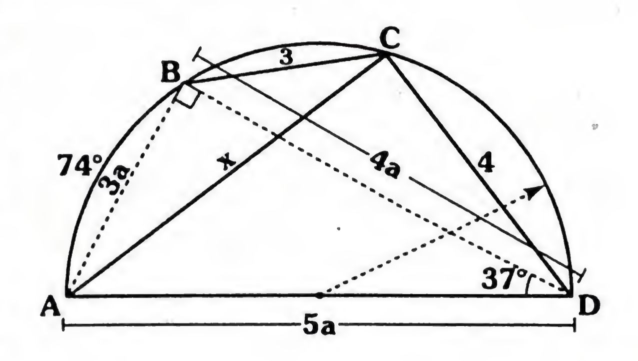
- Por teorema de Ptolomeo, en ⏢ BA'CD:

$$x\sqrt{a^2 + b^2} + a \cdot a = b^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 52



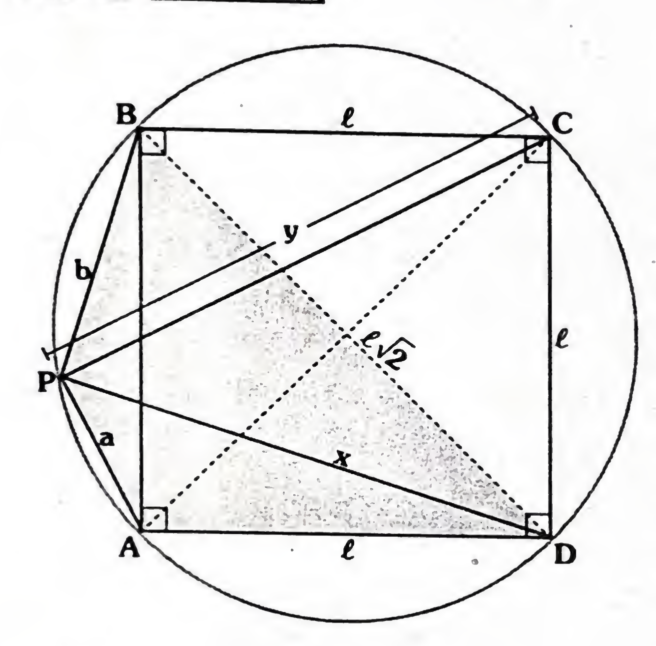
- Nos piden: x
- $\triangle$ABD: notable de 37°
- Como el $\square$ABCD es inscrito, por teorema de Ptolomeo:

$$x(4a) = (3a) + 4(5a)3$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{27}{4} = 6{,}75}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 53



- Nos piden: $\dfrac{a+b}{x+y}$
- En $\square$APBD: teorema de Ptolomeo

$$x\ell = b\ell + \ell\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ x = b + a\sqrt{2} \qquad \text{... (I)}$$

- Análogamente:
- En $\square$PBCD: por teorema de Ptolomeo

$$y\ell = a\ell + b\ell\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ y = a + b\sqrt{2} \qquad \text{... (II)}$$

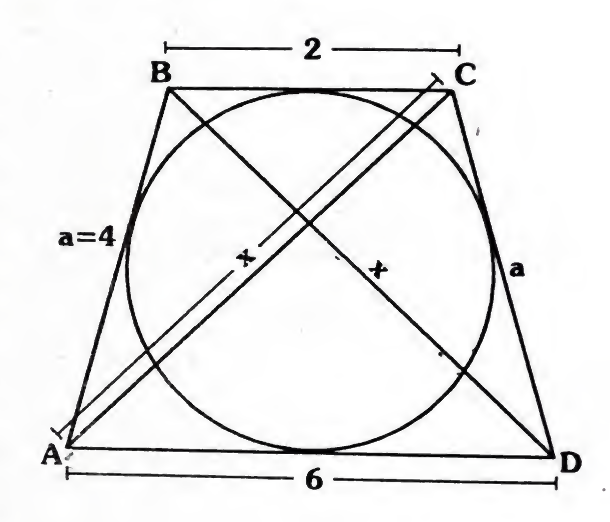
- Sumando (I) y (II):

$$x + y = a + b + \sqrt{2}(a + b)$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{a+b}{x+y} = \sqrt{2} - 1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 54



- Nos piden: x
- Como ABCD es trapecio isósceles $\Rightarrow$ AC = BD = x .
- Por teorema de Pitot:

$$a + a = 6 + 2\ \Rightarrow a = 4$$

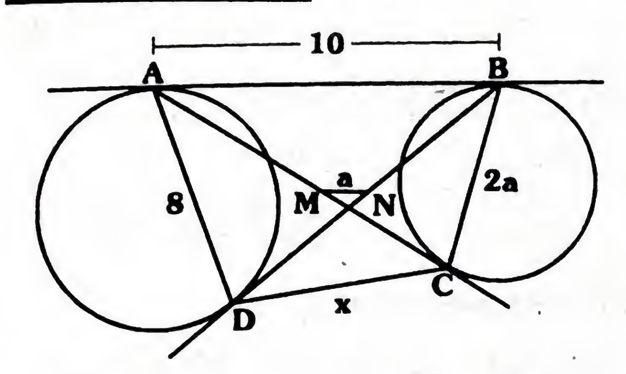
- Como el $\square$ABCD es también inscriptible, por teorema de Ptolomeo:

$$x \cdot x = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2\sqrt{7}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 55



- Nos piden: x
- Por segmentos tangente:

$$AB = BD = AC = 10$$

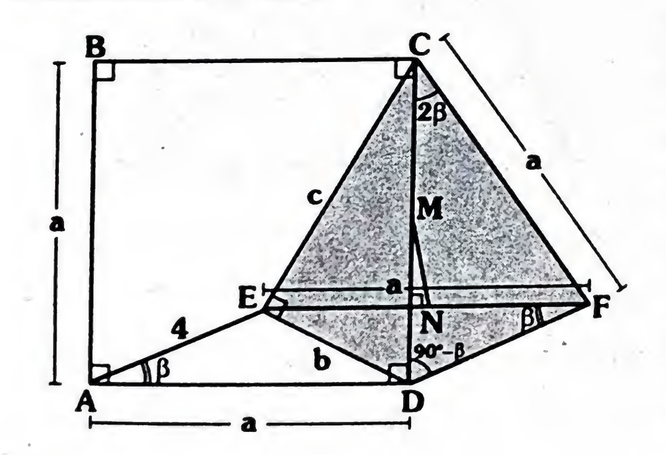
- Como M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, por teorema de Euler:

$$8^2 + 10^2 + (2a)^2 + x^2 = 10^2 + 10^2 + 4a^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 6}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 56



- Se nos pide x.
- M y N son puntos medios de las diagonales del ⏢EDFC.
- AEFD: paralelogramo $\Rightarrow m\measuredangle EFD = \beta$
- ΔDCF : isósceles $\Rightarrow DC = DF = a$
- ◺DEC: $a^2 = b^2 + c^2$

- En ⏢ECFD: teorema de Euler

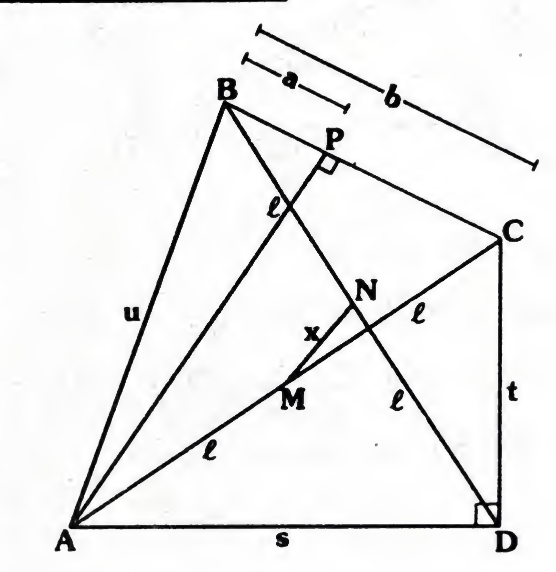
$$4^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} + a^2 = a^2 + a^2 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 16 = 4x^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 57



- Nos piden: x
- Dato: $ab = 8$
- Por teorema de Euler:

$$u^2 + s^2 + t^2 + b^2 = 4x^2 + 4\ell^2 + 4\ell^2 \quad \ldots \text{(I)}$$

- Por teorema de Pitágoras en el ◺ACD:

$$s^2 + t^2 = 4\ell^2 \quad \ldots \text{(II)}$$

- Por T. de Euclides en ΔABC:

$$(2\ell)^2 = u^2 + b^2 - 2ab \quad \ldots \text{(III)}$$

- Reemplazando (II) y (III) en (I):

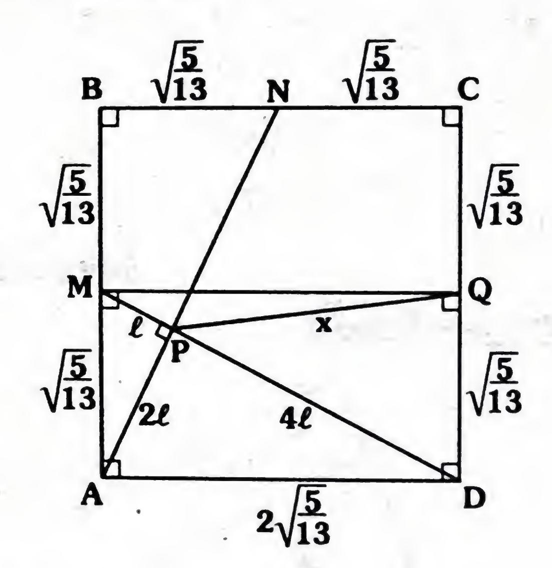
$$4\ell^2 + 2ab + 4\ell^2 = 4x^2 + 4\ell^2 + 4\ell^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{ab}{2} = 4$$

$$\therefore \mathbf{x = 2}$$

Clave B

Resolución N° 58



- Nos piden x
- Como $m\measuredangle MDA = 53°/2$,

  $m\measuredangle BAN = 53°/2 \Rightarrow m\measuredangle MPA = 90°$
- En AMQD: teorema de Marlen

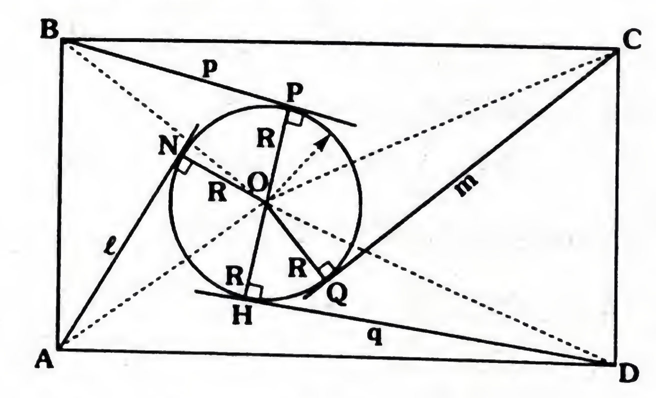
$$x^2 + 4\ell^2 = \ell^2 + 16\ell^2$$

- En ⊿APM: $\ell\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{13}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{1}{13}$

$$\therefore \mathbf{x = 1}$$

Clave E

Resolución N° 59



- Nos piden: $m^2 + \ell^2$
- Dato: $p^2 + q^2 = 100$
- Por teorema de Marlen:

$$BO^2 + OD^2 = AO^2 + OC^2 \quad \text{... (I)}$$

- Por teorema de Pitágoras:

$$BO^2 = p^2 + R^2 \ ; \ OD^2 = q^2 + R^2 \ ;$$

$$AO^2 = \ell^2 + R^2 \ ; \ OC^2 = m^2 + R^2$$

- Reemplazando en (I):

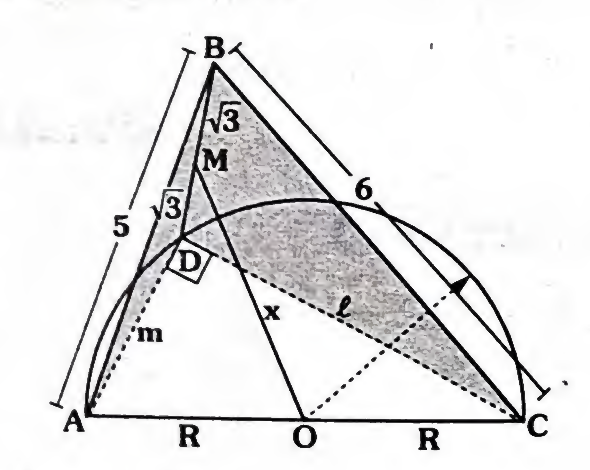
$$p^2 + R^2 + q^2 + R^2 = \ell^2 + R^2 + m^2 + R^2$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 = \ell^2 + m^2$$

$$\therefore \mathbf{m^2 + \ell^2 = 100}$$

Clave C

Resolución N° 60



- Nos piden: x
- Dato: ab = 8
- Por teorema de Euler en el ABCD:

$$5^2 + 6^2 + m^2 + \ell^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2R)^2 + 4x^2 \quad \text{... (I)}$$

- Por teorema de Pitágoras en ⊿ADC:

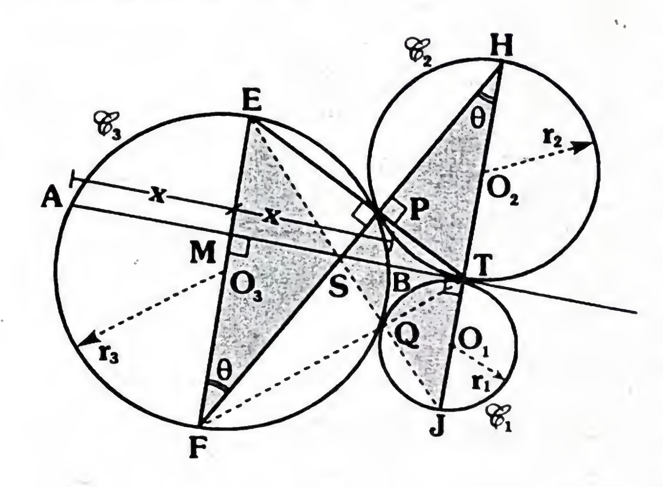
$$m^2 + \ell^2 = (2R)^2$$

- Reemplazando en (I):

$$\therefore \mathbf{x = 3,5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 61



- Nos piden AB
- Por teorema O_1, T y O_2 son colineales.
- Se prolonga $\overline{HP}$ y $\overline{TP}$ que cortan a $\mathscr{C}_3$ en F y E, por propiedad $\overline{EF}$ es diámetro y como:

$$m\widehat{EP} = m\widehat{PT} \Rightarrow \overline{EF} // \overline{HJ} \quad \overline{EF} \perp \overline{AB},$$

$$\Rightarrow AM = MB$$

- Por teorema de las cuerdas:

$$x \cdot x = (EM)(MF) \qquad \dots (I)$$

- Como $m\widehat{TQ} = m\widehat{QF} \Rightarrow$ F, Q y T son colineales.
- Para el ΔETF, S es ortocentro $\Rightarrow$ E, S, Q y J colineales.
- Como:

$$\Delta ESF \sim \Delta JSH \Rightarrow \frac{EM}{MF} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \dots (II)$$

$$EM + MF = 2r_3 \qquad \dots (III)$$

- De (II) y (III):

$$EM = \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_2} \quad y \quad MF = \frac{2r_2r_3}{r_1 + r_2}$$

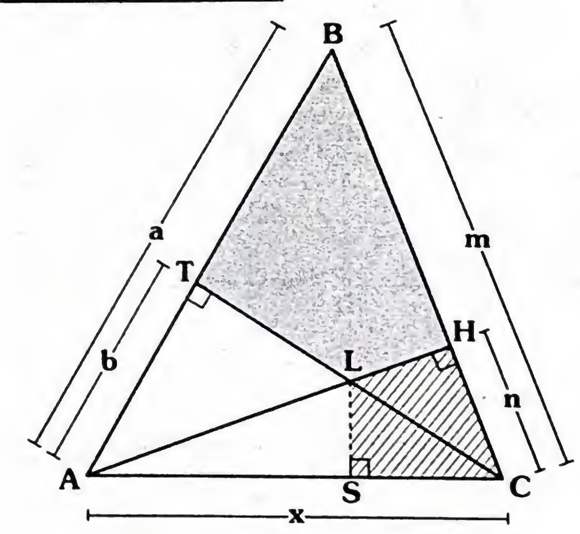
- En (I):

$$x^2 = \frac{4r_1r_2r_3^2}{(r_1 + r_2)^2} \Rightarrow x = \frac{2r_3}{r_1 + r_2}\sqrt{r_1r_2}$$

$$\therefore \mathbf{AB = \frac{4r_3}{r_1 + r_2}\sqrt{r_1r_2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 62



- Piden: x
- Por observación de teorema secante; para cuadriláteros inscriptibles:

$\triangle$TBHL: $a.b = (AH)(AL)$

$\triangle$LHCS: $(AH)(AL) = x(AS)$

$$\Rightarrow x(AS) = ab \qquad \dots (I)$$

- Análogamente:

$\triangle$TBHL: $mn = (TC)(CL)$

$\triangle$ATLS: $(TC)(CL) = x(SC)$

$\Rightarrow x(SC) = mn \quad ... (II)$

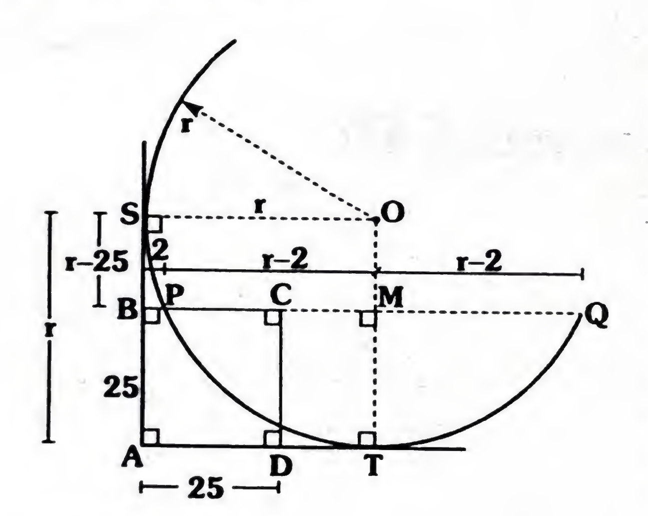
- De (I) + (II): $x\underbrace{(AS+SC)}_{x} = \underbrace{ab}_{k_1} + \underbrace{mn}_{k_2}$

$$x^2 = k_1 + k_2$$

$$\mathbf{x = \sqrt{k_1 + k_2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 63



- Nos piden r
- Del gráfico, ASOT es un cuadrado, tenemos:

$$AB = 25 \Rightarrow BS = r - 25$$

- Como:

$$PM = MQ \Rightarrow BQ = 2r - 2$$

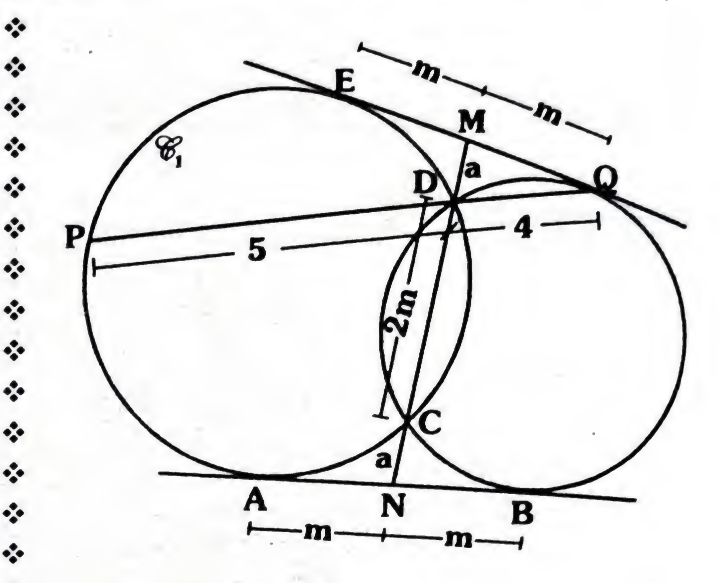
- Por teorema de la tangente:

$$(r-25)^2 = 2(2r-2)$$

$$\therefore \ \mathbf{r = 37}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 64



- Piden: $2(m+a)$
- Se deduce: $MD = CN = a$
- Además se sabe: $EQ = AB$
- Por observación del teorema de tangente:

$$EM = MQ \quad y \quad AN = NB$$

- En $\mathscr{C}_1$: teorema de tangente:

$$(2m)^2 = 9 \times 4 \Rightarrow m = 3$$

- Además para la tangente $\overline{EM}$:

$$m^2 = (2m+a)a$$

$$\mathbf{m^2} + m^2 = 2ma + a^2 + \mathbf{m^2}$$

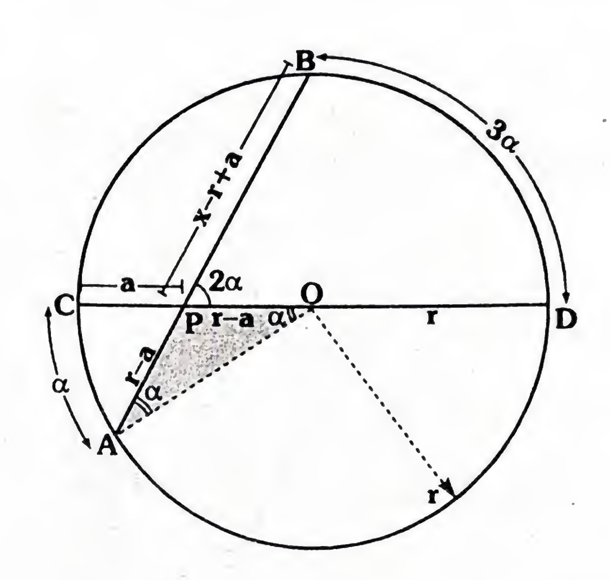
$$2\underbrace{m^2}_{9} = (a+m)^2$$

$$a + m = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{2(a+m) = 6\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 65



- Piden: AB
- Sea AB=x
- m∢BPD : 2α (m∢interior)
- ΔAPO : isósceles AP = PO = r – a
- Por teorema de cuerdas: $(x-r+a)(r-a)=a(2r-a) \Rightarrow x(r-a)-(r-a)^2=2ra-a^2$

$$x(r-a)-\cancel{a^2}-r^2+2\cancel{ar}=2\cancel{ra}-\cancel{a^2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{r^2}{r-a}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 66

- Nos piden: x
- Por teorema de tangente en $\mathscr{C}_2$:

$m^2=4\cdot 9 \Rightarrow m=6$

- También: $TQ^2=(TH)(TF)$

$m^2=(TH)(TF) \Rightarrow TQ=m=6$

- Luego: $20^2=(AF)x$ ... (I)
- En $\mathscr{C}_1$: $15^2=(FB)x$ ... (II)
- (I) + (II) : $20^2+15^2=(AF+FB)x \Rightarrow 20^2+15^2=x\cdot x$

$\therefore\ \mathbf{x=25}$

RESOLUCIÓN Nº 67

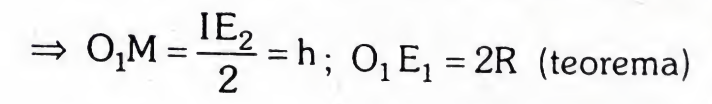
- Piden demostrar que:

$$\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+x^2=12R^2$$

- Por teorema:

I es ortocentro del $\Delta E_1E_2E_3$

- Sea O_1 el circuncentro del $\Delta E_1E_2E_3$



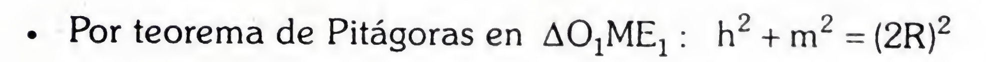
$$\Rightarrow O_1M=\frac{IE_2}{2}=h;\ O_1E_1=2R \text{ (teorema)}$$

- Por teorema de mediana:

En el ΔIOE_2: $x^2+\ell_2^2=2R^2+\frac{(2h)^2}{2}$

En el ΔE_1OE_3: $\ell_1^2+\ell_3^2=2R^2+\frac{(2m)^2}{2}$

$$\Rightarrow x^2+\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2=4R^2+2(h^2+m^2) \quad \ldots \text{(I)}$$



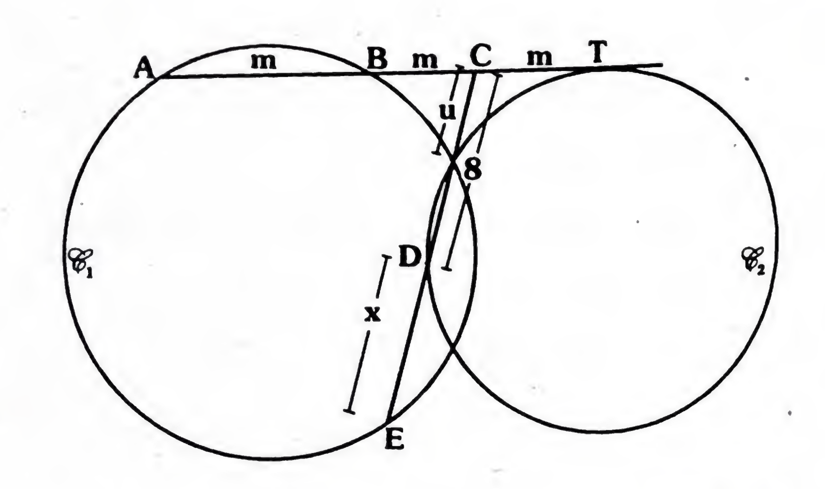
- Por teorema de Pitágoras en ΔO_1ME_1: $h^2+m^2=(2R)^2$

- En (I): $x^2+\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2=\mathbf{12R^2}$

RESOLUCIÓN Nº 68

- Nos piden x:

- Por teorema de tangente:



En $\mathscr{C}_1$: $(2m)^2=u(8+x)$ ... (I)

En $\mathscr{C}_2$: $m^2=u\cdot 8$ ... (II)

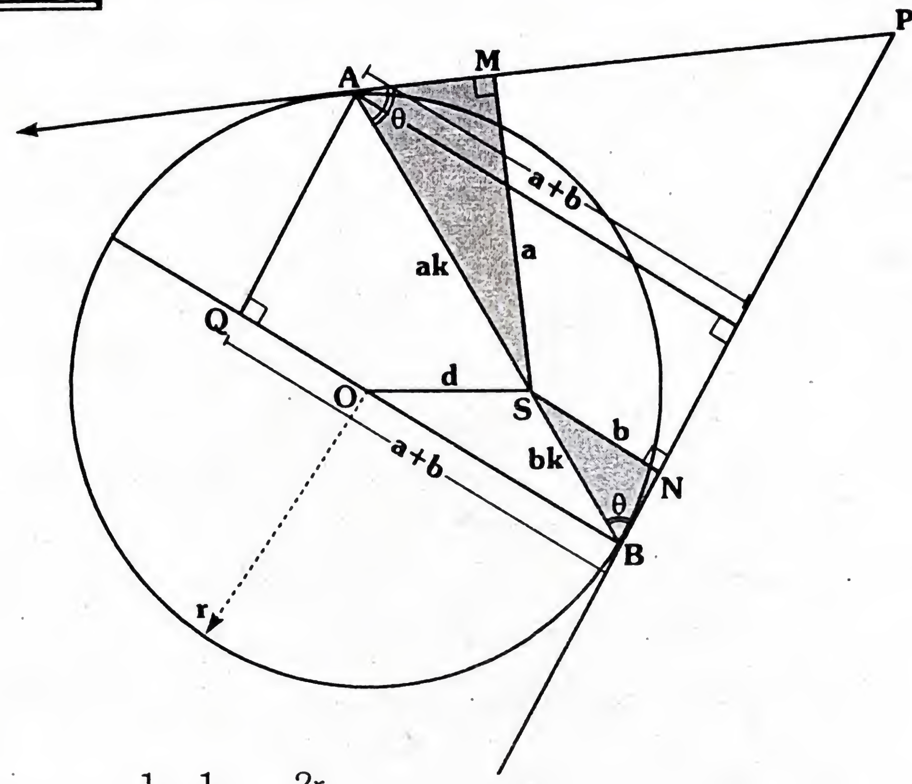
- De (I) y (II):

$$4(8\not{u})=\not{u}(8+x)$$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave **D**

RESOLUCIÓN Nº 69



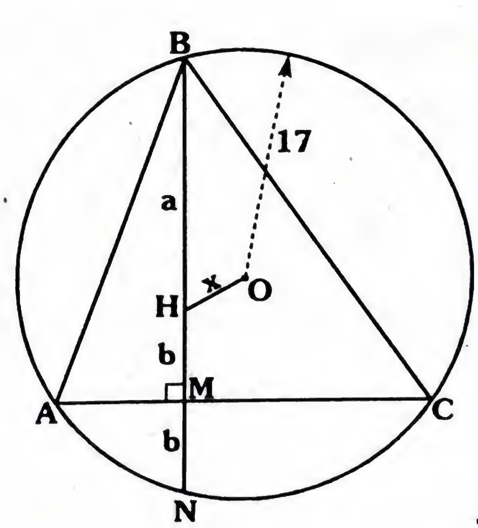
- Piden demostrar: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2r}{r^2-d^2}$
- Como ⊿ AMS ~ ⊿ BSN ⇒ AS = ak , BS = bk
- Por teorema de cuerdas: $r^2-d^2=abk^2$ ...(I)
- Por teorema: $(AB)^2=(BQ)2r \Rightarrow [(a+b)k]^2=(a+b)2r \Rightarrow (a+b)k^2=2r$ ... (II)
- De (I) y (II): $\dfrac{r^2-d^2}{ab}=\dfrac{2r}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2r}{r^2-d^2}$

RESOLUCIÓN Nº 70

- Piden: x
- Dato: ab = 120
- Por teorema: HM = MN
- Por teorema de cuerdas:

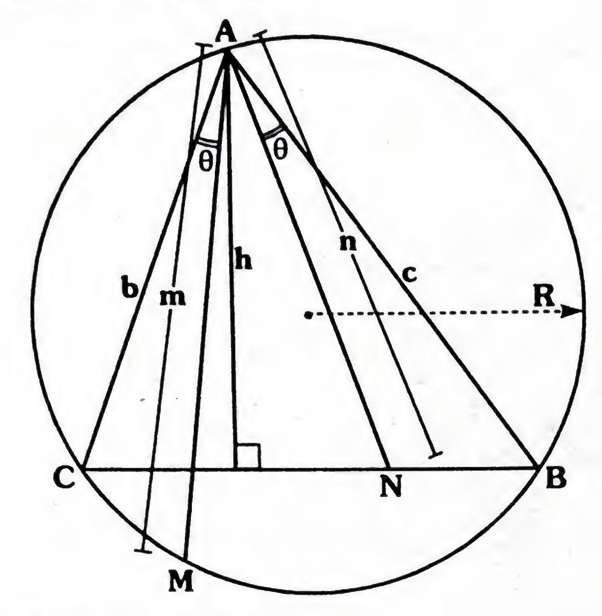
$$a\cdot 2b=17^2-x^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x=7}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 71



- Nos piden: h
- En ΔABC, por teorema del producto de lados:

$$bc = h(2R) \qquad \ldots (I)$$

- En ΔABC, por teorema de los isogonales:

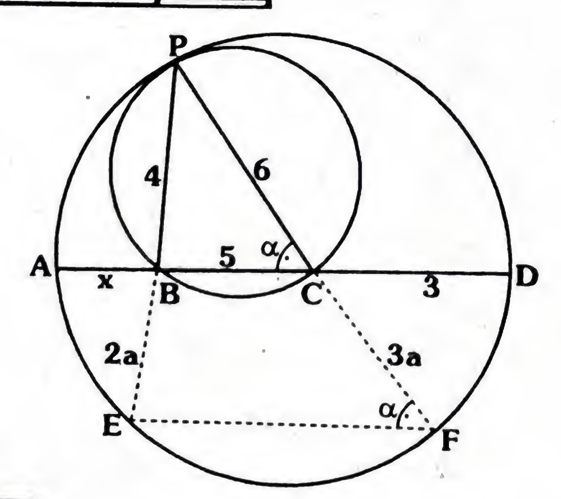
$$bc = mn \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $h2R = mn$

$$\therefore\ \mathbf{h = \frac{mn}{2R}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 72



- Se pide: x
- Al prolongar $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$, notemos:

$$m\widehat{EP} = m\widehat{BP} \Rightarrow m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle EFP$$

- Luego: $\overline{BC} // \overline{EF}$, por teorema de Tales:

$$\frac{EB}{4} = \frac{FC}{6} \Rightarrow EB = 2a \;\; y \;\; FC = 3a$$

- Por teorema de las cuerdas:

$$x \cdot 8 = 4(2a) \qquad \ldots (I)$$

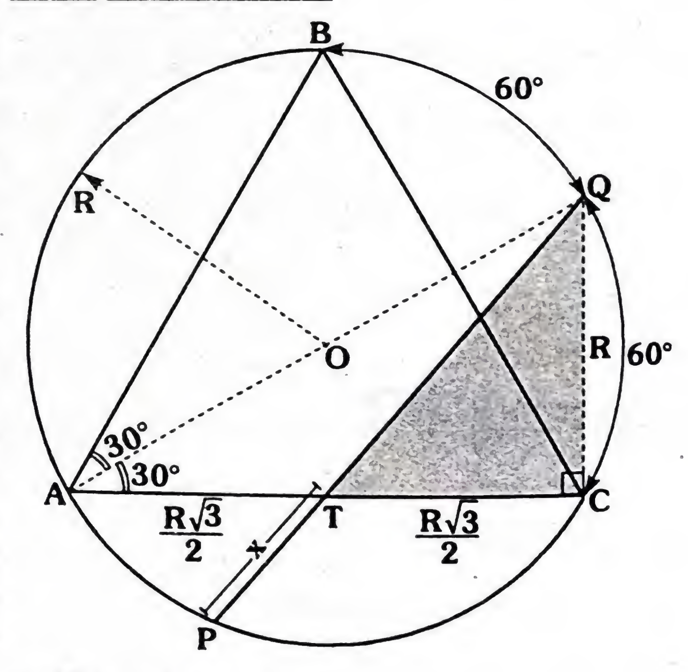
$$3(x+5) = 6(3a) \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $\dfrac{8x}{3(x+5)} = \dfrac{8}{18}$

$$\therefore\ \mathbf{x = 1}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 73



- Nos piden: x
- ΔABC : equilátero, por propiedad:

$$AB = AC = R\sqrt{3}$$

- Como biseca a $AC \Rightarrow AT = TC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

- Como $m\widehat{BQ} = m\widehat{QC} \Rightarrow \overline{AQ}$ es diámetro $\Rightarrow m\measuredangle ACQ = 90^\circ$
- $\triangle$TCQ: por teorema de Pitágoras:

$$TQ = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

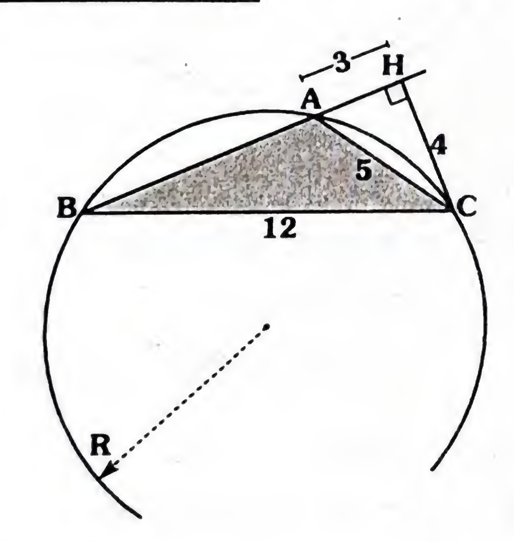
- Por teorema de las cuerdas:

$$x\left(\frac{R\sqrt{7}}{\cancel{2}}\right) = \left(\frac{R\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{3}{14}\sqrt{7}R}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 74



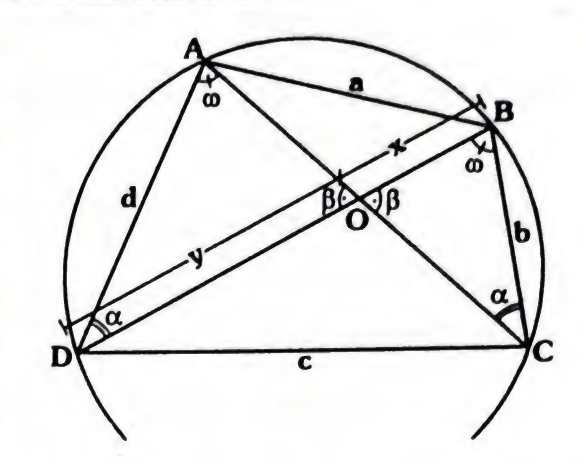
- Piden: R
- En $\triangle$AHC: HC = 4
- Por teorema del producto de lados:

$$(5)(12) = 4(2R)$$

$$\therefore\ \mathbf{R = 7,5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 75



- Por demostrar: $\frac{x}{y} = \frac{ab}{cd}$
- $\Delta ADO \sim \Delta BCO$:

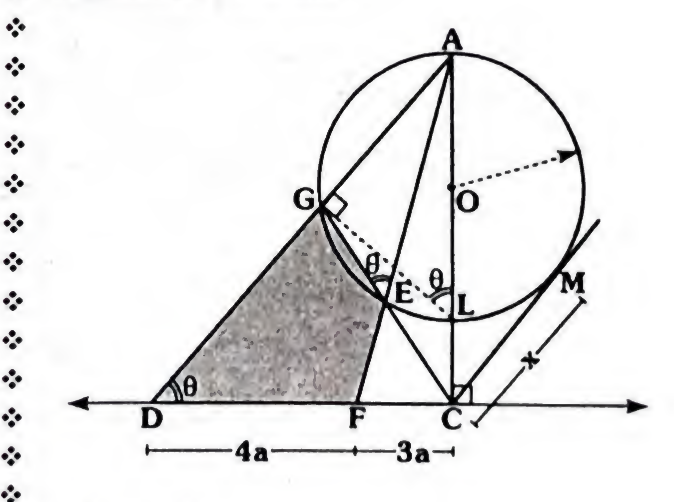
$$\frac{x}{m} = \frac{b}{d} \qquad \dots (I)$$

- $\Delta DOC \sim \Delta AOB$:

$$\frac{y}{m} = \frac{c}{a} \qquad \dots (II)$$

- $(I) \div (II)$: $\mathbf{\frac{x}{y} = \frac{ab}{cd}}$

RESOLUCIÓN Nº 76



- Nos piden: x

- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (CE)(CG) \quad \dots (I)$$

- Sea $m\measuredangle GEA = \theta$, por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle GLA = \theta$$

- ⏢DGLC: inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle GDC = \theta$
- ⏢GDFE: inscriptible, por teorema de la secante:

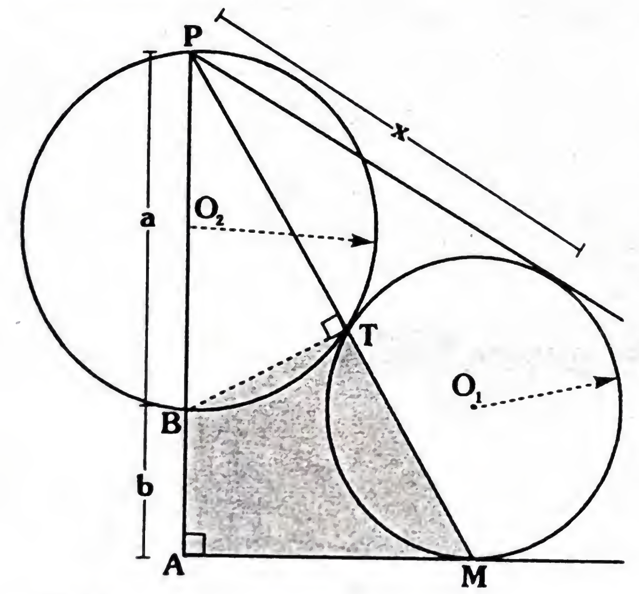
$$(CE)(CG) = 3a(7a) \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $x^2 = 3a(7a)$

$$\therefore \; \mathbf{x = a\sqrt{21}}$$

Clave E

Resolución Nº 77



- Piden: x
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (PT)(PM) \quad \dots (I)$$

- ⏢ABTM: inscriptible, por teorema de la secante:

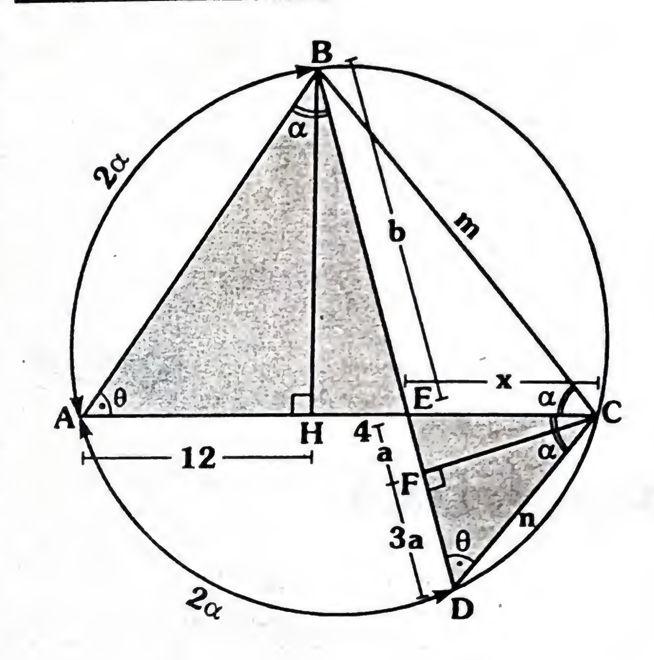
$$(PT)(PM) = a(a+b) \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $x^2 = a(a+b)$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{a(a+b)}}$$

Clave B

Resolución Nº 78



- Piden: x
- ΔBCD: teorema del cálculo de la bisectriz

$$x^2 = \underbrace{mn}_{36} - b(4a) \quad \dots (I)$$

- $\Delta ABE \sim \Delta ECD$:

$\overline{BH}$ y $\overline{CF}$: alturas homólogas

$$\Rightarrow \; AH = 3(HE) = 12 \; \Rightarrow \; HE = 4$$

- Por teorema de cuerdas:

$$b(4a) = 16 \cdot x \quad \dots (II)$$

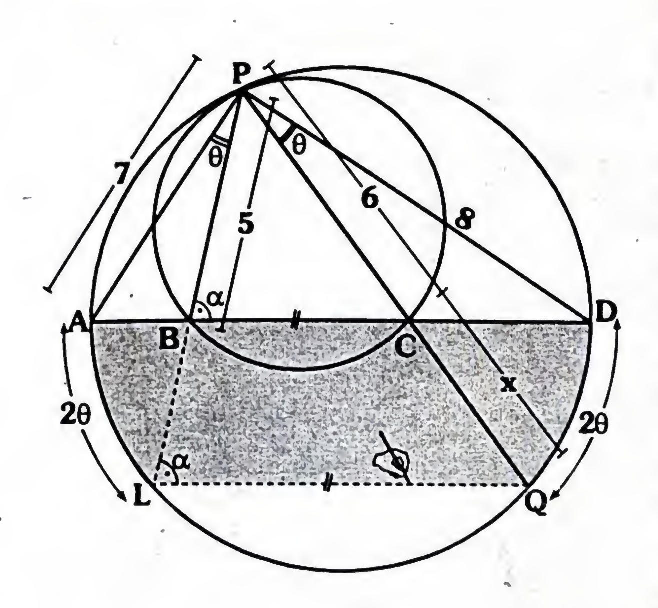
- (II) en (I): $x^2 = 36 - 16x$

$$x(x+16) = 36$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 79



- Piden: x
- Se sabe que:

$$m\overset{\frown}{PC} = m\overset{\frown}{PDQ} \Rightarrow m\sphericalangle PBD = m\sphericalangle PLQ$$

- Luego $\overline{AD} // \overline{LQ}$, por teorema:

$$m\overset{\frown}{AL} = m\overset{\frown}{QD}$$

- Por ángulo inscrito

$$m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle QPD$$

- En el ΔAPD por teorema de las isogonales:

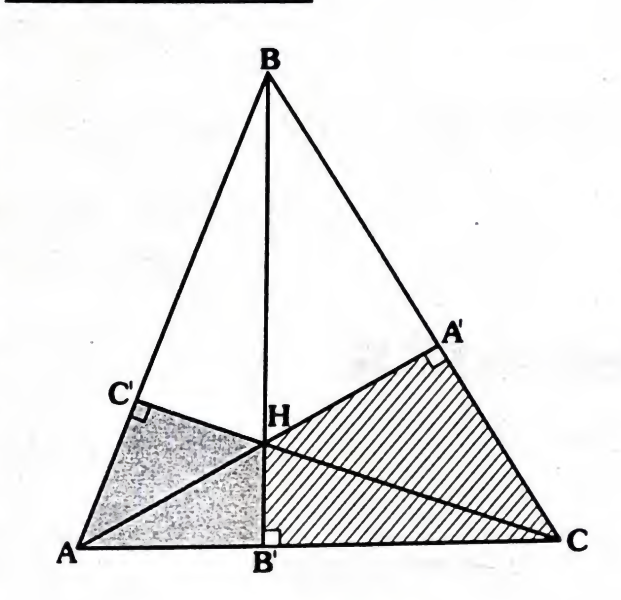
$$7 \cdot 8 = (x+6)5$$

$$11{,}2 = x+6$$

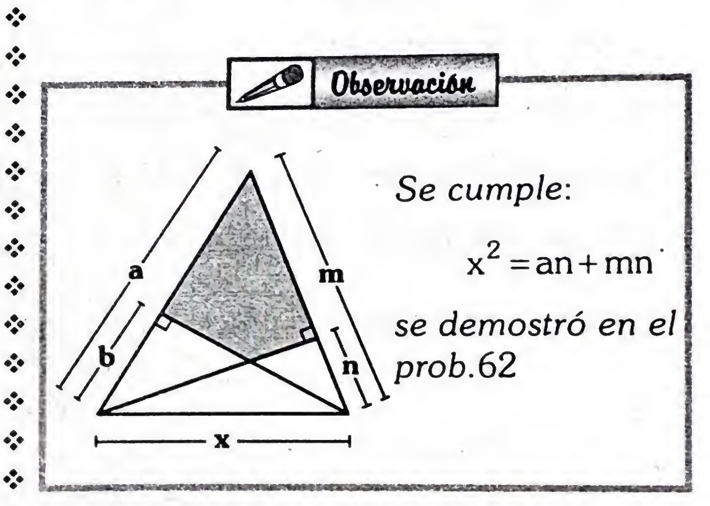
$$\therefore\ \mathbf{x = 5{,}2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 80



Observación



Se cumple:

$$x^2 = an + mn$$

se demostró en el prob.62

- Piden:

$$\frac{(AA')(HA)+(BB')(HB)+(CC')(HC)}{(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2}$$

- Por observación:

ΔABC:

$$(AC)^2 = \underbrace{(AB)(AC')}_{(AH)(AA')} + \underbrace{(BC)(CA)}_{(CC')(CH)} \qquad \dots (I)$$

- De manera análoga:

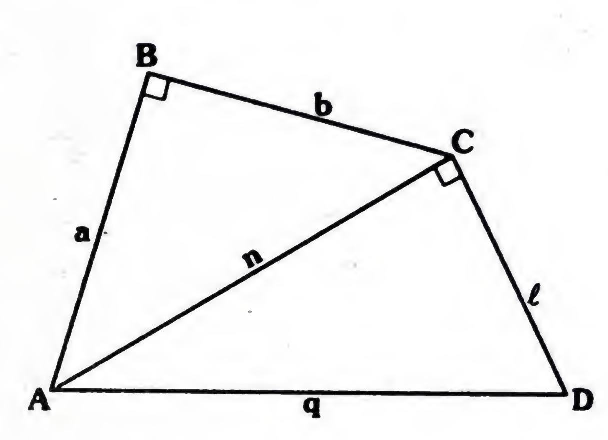
$$(AB)^2 = \underbrace{(BC)(BA')}_{(BB')(BH)} + \underbrace{(AC)(AB')}_{(AH)(AA')} \qquad \dots (II)$$

$$(BC)^2 = \underbrace{(BA)(BC')}_{(BH)(BB')} + \underbrace{(AC)(B'C)}_{(CH)(CC')} \qquad ...(III)$$

- (I) + (II) + (III) : $(AC)^2 + (AB)^2 + (BC)^2 = 2(AA')(AH) + 2(BB')(BH) + 2(CC')(CH)$

$$\Rightarrow \quad \frac{(AA')(AH) + (BB')(BH) + (CC')(CH)}{(AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

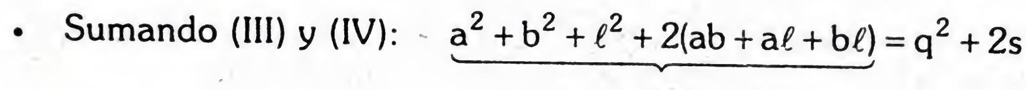
RESOLUCIÓN Nº 81



- Nos piden: $a + b + \ell$ en función de "q" y "s".
- Dato: $ab + a\ell + b\ell = 5$
- Por teorema de pitágoras:

  $\triangle ABC$: $a^2 + b^2 = n^2$ ... (I)

  $\triangle ACD$: $n^2 + \ell^2 = q^2$ ... (II)
- Sumando (I) y (II): $a^2 + b^2 + \ell^2 = q^2$ ... (III)
- Del dato: $2(ab + a\ell + b\ell) = 2s$ ... (IV)



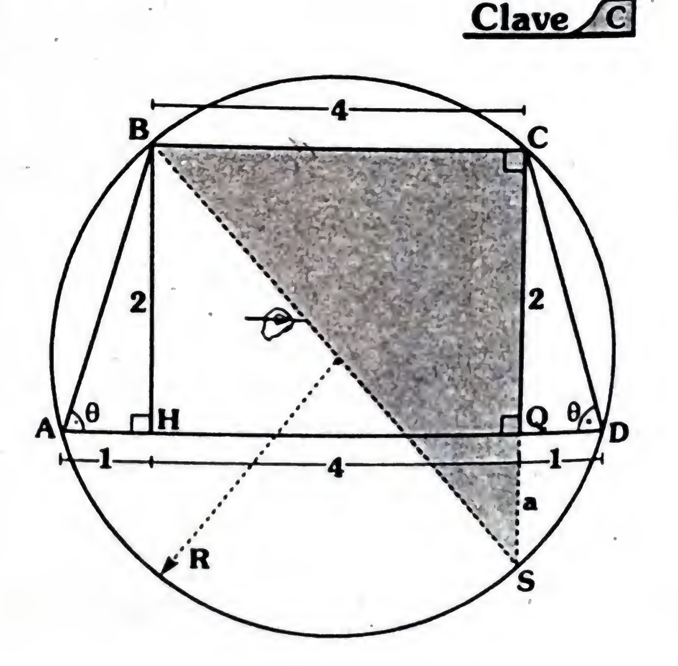
- Sumando (III) y (IV): $\underbrace{a^2 + b^2 + \ell^2 + 2(ab + a\ell + b\ell)} = q^2 + 2s$

$$(a + b + \ell)^2 = q^2 + 2s$$

$$\therefore \mathbf{a + b + \ell = \sqrt{q^2 + 2s}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 82



- Piden: R
- Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow$ ⏢ABCD es un trapecio; isósceles

$$\Rightarrow AH = QD = 1$$

- Por teorema de las cuerdas:

$$2a = (5)(1) \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

- $\overline{BS}$ es diámetro.

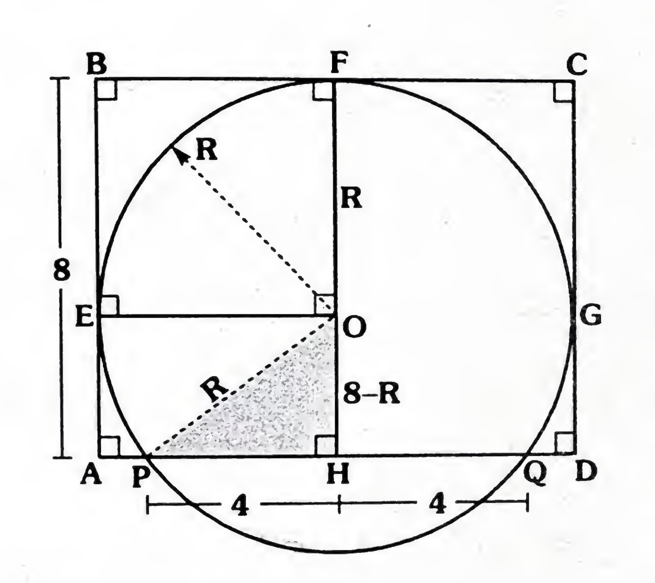
- En ⊿BCS: por teorema de Pitágoras:

$$(2R)^2 = 4^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\therefore \mathbf{R = \frac{\sqrt{145}}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 83



- Piden R
- $\overline{OF} \perp \overline{BC} \Rightarrow$ al prolongar $\overline{FO}$ se encuentra H $\Rightarrow$ $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$.
- Luego:

$$PH = HQ = 4 \quad y$$

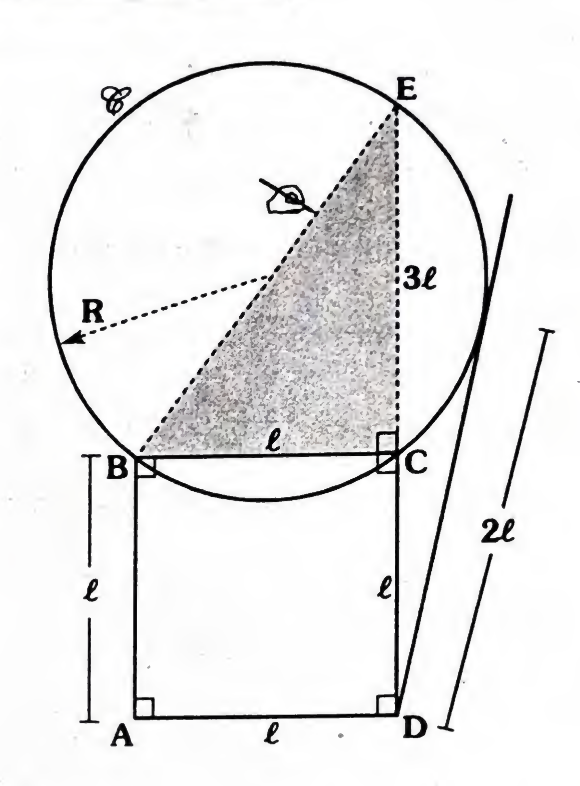
$$OH = 8 - R$$

- ⊿PHO: $R^2 = (8 - R)^2 + 4^2$

$$\therefore \mathbf{R = 5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 84



- Piden ℓ en función de R.
- Prolongamos $\overline{DC}$ hasta que corte a 𝒞 en E.
- Por teorema de la tangente:

$$(2\ell)^2 = \ell(DE)$$

$$\Rightarrow DE = 4\ell \Rightarrow CE = 3\ell$$

- Como:

$$m\measuredangle BCE = 90° \Rightarrow \overline{BE} \text{ es diámetro}$$

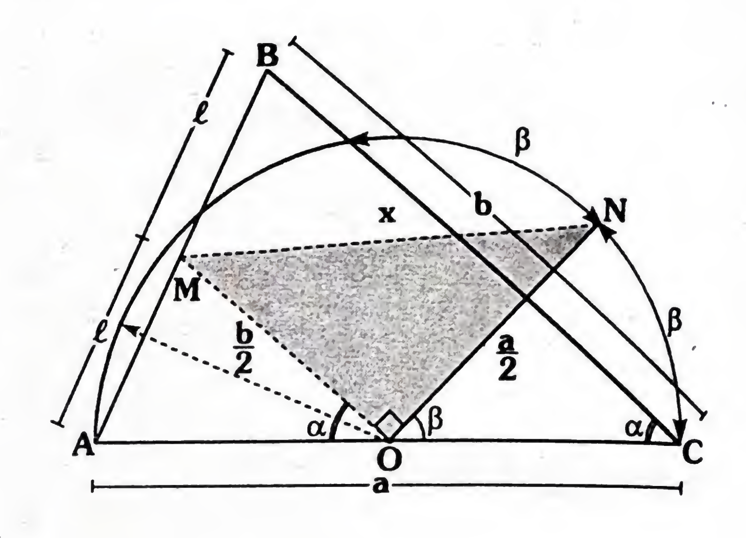
- En ⊿BCE:

$$(2R)^2 = \ell^2 + (3\ell)^2$$

$$\therefore \mathbf{\ell = R\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 85



- Piden: x
- Sea $m\measuredangle ACB = x \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180°$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

- Por el teorema de la base media:

$$OM = \frac{b}{2} \text{ y } \overline{OM} // \overline{BC} \Rightarrow m\measuredangle AOM = x$$

- Por $\measuredangle$ central:

$$m\measuredangle NOC = \beta \Rightarrow m\measuredangle MON = 90°$$

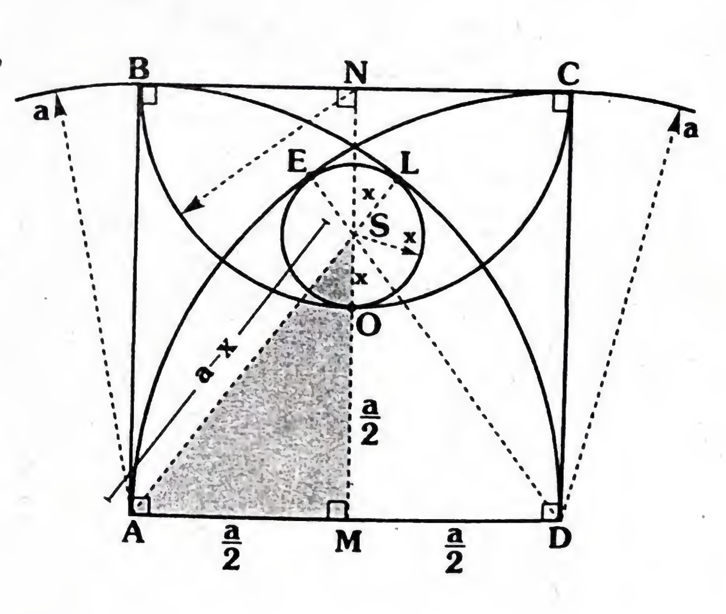
- ⊿MON: $x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 86

- Nos piden x en función de a.
- A, S y L colineales, lo mismo que E, S y D.
- O es centro del cuadrado.
- La recta $\overleftrightarrow{MN}$ es eje de simetría.
- ⊿ AMS: teorema de Pitágoras:

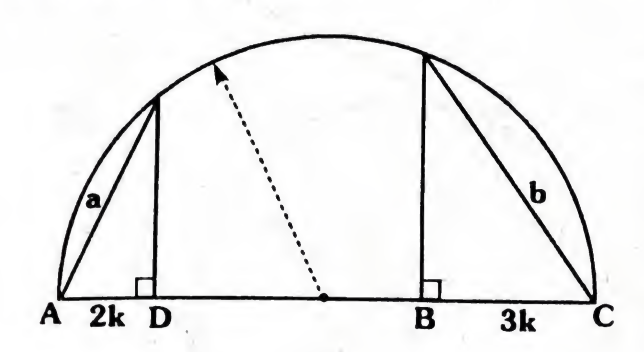


$$(a - x)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{a}{6}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 87



- Nos piden: a/b
- Por teorema:

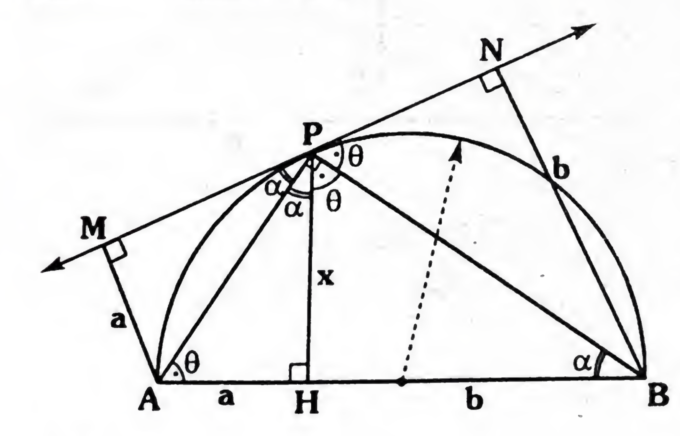
$$a^2 = 2k \cdot AC$$

$$b^2 = 3k \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 88



- Piden: x
- Por teorema de bisectriz:

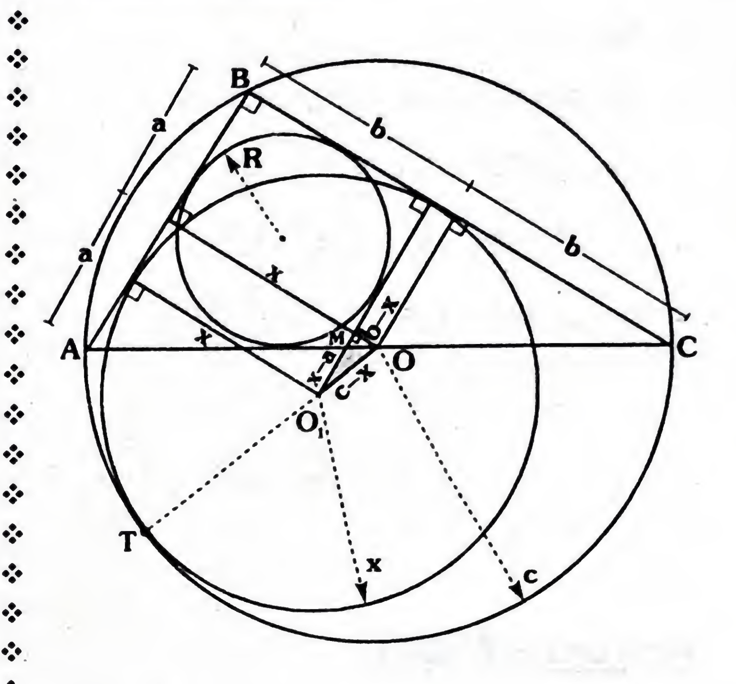
$$AH = a \quad ; \quad HB = b$$

- Por teorema en ⊿APB:

$$\mathbf{x = \sqrt{ab}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



- Piden: x
- Por teorema de Pitágoras en ⊿ O_1MO :

$$(c-x)^2 = (x-a)^2 + (b-x)^2$$

$$\Rightarrow c^2 + 2(a+b-c)x = a^2 + b^2 + x^2 \quad ...(I)$$

- Por teorema de Pitágoras en ⊿ABC:

$$(2a)^2 + (2b)^2 = (2c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

- En (I):

$$2(a+b-c)x = x^2 \Rightarrow x = 2(a+b-c) \quad ...(II)$$

- Por teorema Poncelet en ⊿ABC:

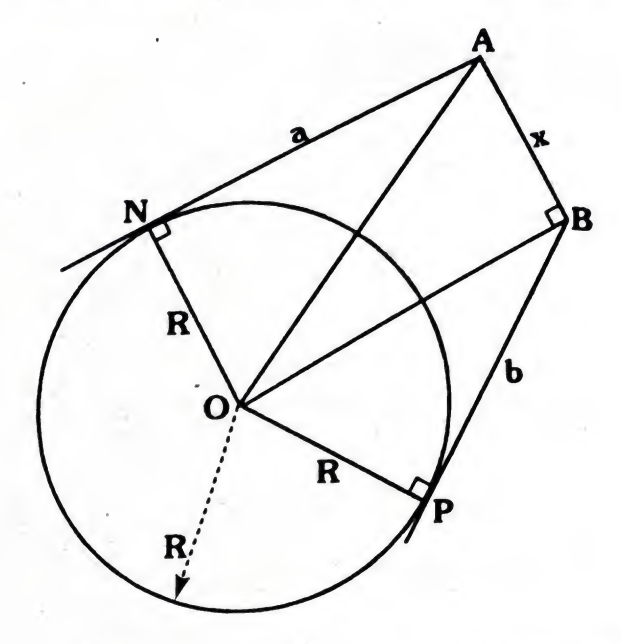
$$2a + 2b = 2c + 2R \Rightarrow a + b - c = R$$

- En (II):

$$\mathbf{x = 2R}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 90



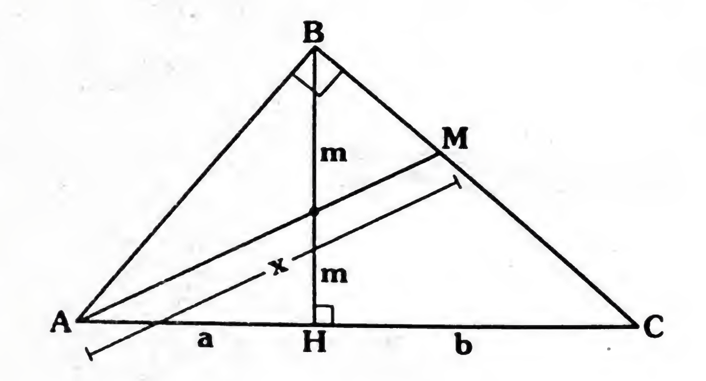
- Nos piden: R
- Por teorema de Pitágoras:
- En ⊿ONA: $OA = \sqrt{R^2 + a^2}$
- En ⊿OPB: $OB = \sqrt{R^2 + b^2}$
- En ⊿OAB: $OB^2 + x^2 = OA^2$

$$\Rightarrow \quad R^2 + b^2 + x^2 = R^2 + a^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 91



- Nos piden: x
- Por teorema en el ⊿ABC:

$$AB^2 = a(a+b) \Rightarrow AB = \sqrt{a(a+b)}$$

$$BC^2 = b(a+b) \Rightarrow BC = \sqrt{b(a+b)} \quad \ldots \text{(I)}$$

- Por teorema de Menelao en ⊿HBC:

$$(CM)ma = (BM)m(a+b) \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{CM+BM}{BM} = \frac{2a+b}{a}$$

- De (I): $BM = \dfrac{a}{2a+b}\sqrt{b(a+b)}$
- Por teorema de Pitágoras en ⊿ABM:

$$x^2 = a(a+b) + \frac{a^2b(a+b)}{(2a+b)^2}$$

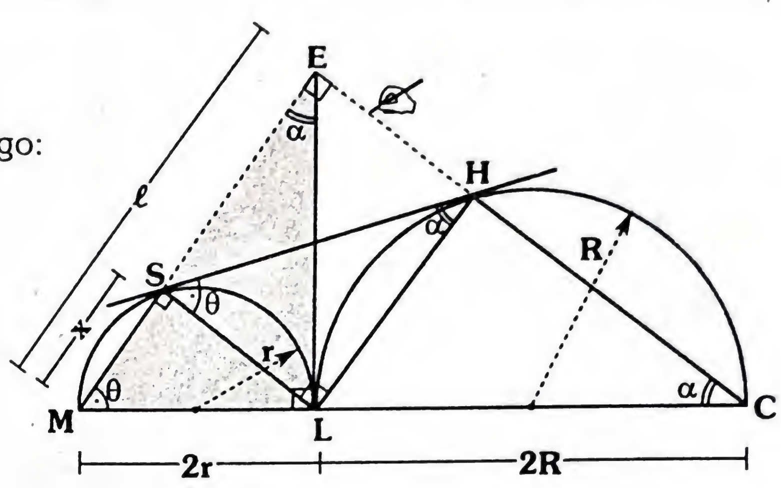
$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{(a+b)}{2a+b}\sqrt{4a^2 + ab}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 92

- Nos piden x en función de R y r.
- Por teorema: $m\sphericalangle SLH = 90^\circ$, luego: $\alpha + \theta = 90^\circ$.
- En ⊿MLE: $(2r)^2 = x\ell$

$$\Rightarrow x = \frac{4r^2}{\ell} \quad \ldots \text{(I)}$$



- En ⊿MEC: $\ell^2 = 2r(2r + 2R)$

$$\Rightarrow \ell = 2\sqrt{r(r+R)} \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$\therefore \mathbf{x = \frac{2r^2}{\sqrt{r(r+R)}}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 93

- Piden: x
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, se tiene que AFCH es rectángulo.
- En la semicircunferencia, por teorema:

$$h^2 = \ell(2R - \ell) \Rightarrow h = \sqrt{\ell(2R-\ell)} \quad \ldots \text{(I)}$$

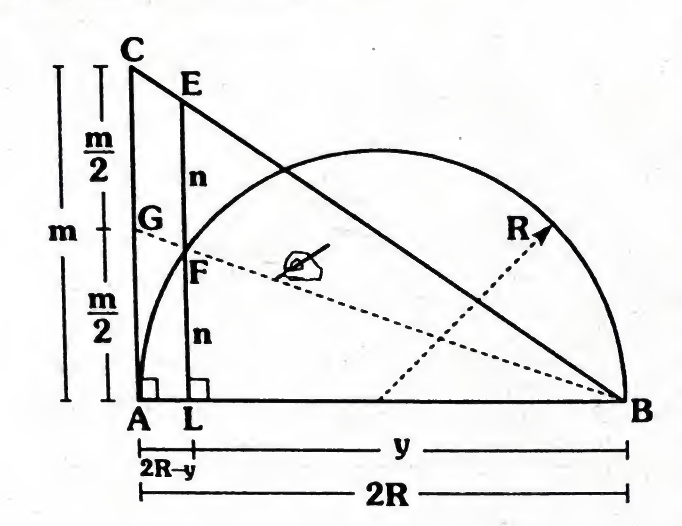
- ⊿AHC ~ ⊿EOB $\Rightarrow \dfrac{x}{\ell} = \dfrac{R}{h}$

$$\Rightarrow x = \frac{R\ell}{\sqrt{\ell(2R-\ell)}}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{R\sqrt{\ell(2R-\ell)}}{2R-\ell}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 94



- Piden R en función de "m" y "n".

- $\triangle$ ELB ~ $\triangle$ CAB

$$\Rightarrow CG = GA = \frac{m}{2}$$

- $\triangle$ FLB ~ $\triangle$ GAB:

$$\frac{y}{2R} = \frac{n}{\left(\frac{m}{2}\right)} \Rightarrow y = \frac{4Rn}{m} \quad \ldots (I)$$

- En la semicircunferencia por teorema:

$$n^2 = (2R - y)y \quad \ldots (II)$$

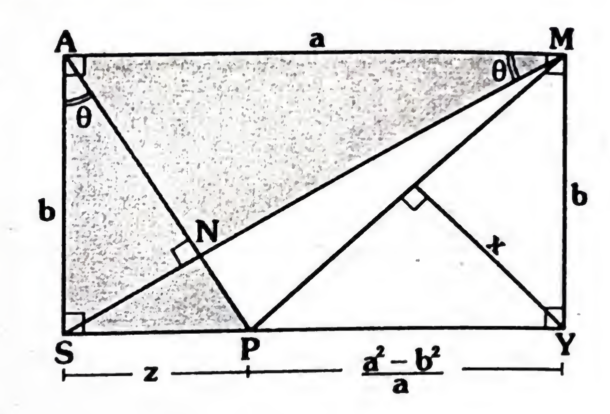
- Reemplazando (I) en (II):

$$n^2 = \left(2R - \frac{4Rn}{m}\right)\frac{4Rn}{m}$$

$$\therefore \mathbf{R = \frac{m}{4}\sqrt{\frac{2n}{m - 2n}}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 95



- Nos piden x

- $\triangle$ ASP ~ $\triangle$ MAS $\Rightarrow \frac{z}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow z = \frac{b^2}{a}$

- $PY = a - z \Rightarrow PY = \frac{a^2 - b^2}{a}$

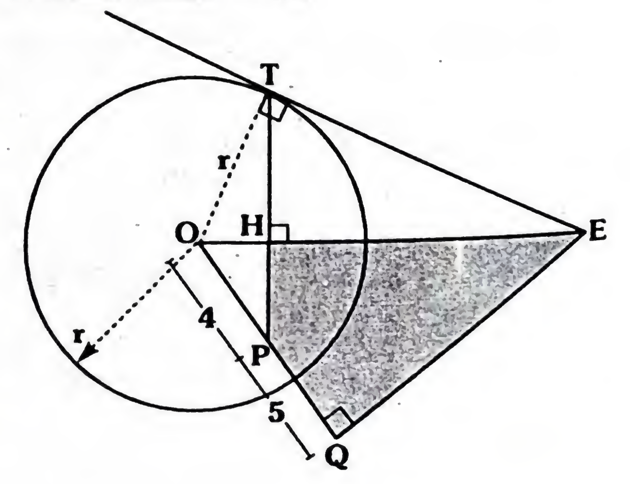
- En $\triangle$PYM:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{a(a^2 - b^2)}{\sqrt{2a^4 + b^4 - 2a^2b^2}}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 96



- Piden: r
- En ⊿ETO: $r^2 = (OH)(OE)$ ...(I)
- Como el ⌂PHEQ es inscriptible

$$\Rightarrow (OH)(OE) = (OP)(OQ) \quad \ldots (II)$$

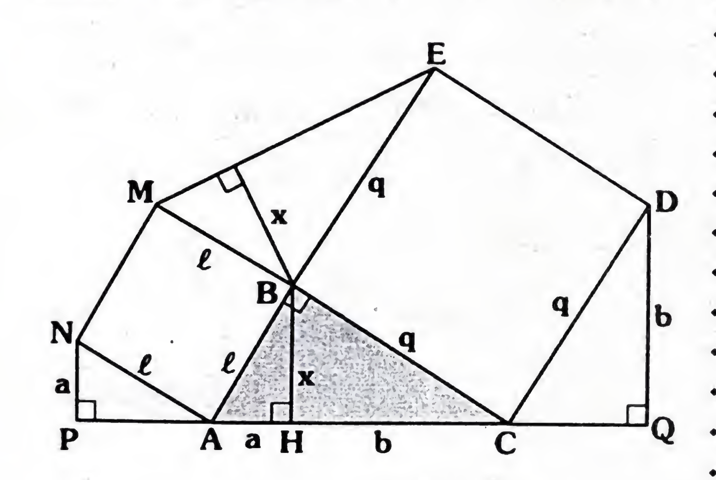
- De (I) y (II):

$$r^2 = (4)(9)$$

$$\therefore \mathbf{r = 6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 97



- Nos piden: x
- Notemos:

$$⊿NPA \cong ⊿ABH \Rightarrow AH = a$$

$$⊿CDQ \cong ⊿HBC \Rightarrow HC = b$$

- Por:

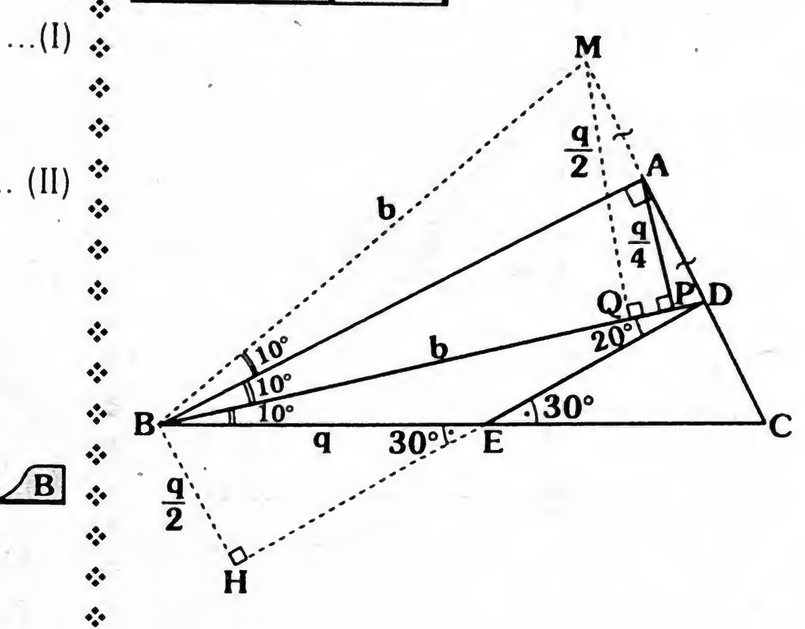
$$⊿MBE \cong ⊿ABC \Rightarrow BH = x$$

- Por teorema; en el ⊿ABC:

$$x^2 = ab \Rightarrow \mathbf{x = \sqrt{ab}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 98



- Piden: AB + AD
- Por : ⊿BHD ≅ ⊿BMQ ⇒ MQ = q/2
- Como: MA = AD ⇒ AP = q/4
- Por teorema de Pitágoras:

$$AB^2 + AD^2 = b^2 \quad \ldots (I)$$

- Por teorema:

$$AB \cdot AD = \frac{qb}{4} \quad \ldots (II)$$

$$(AB + AD)^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD$$

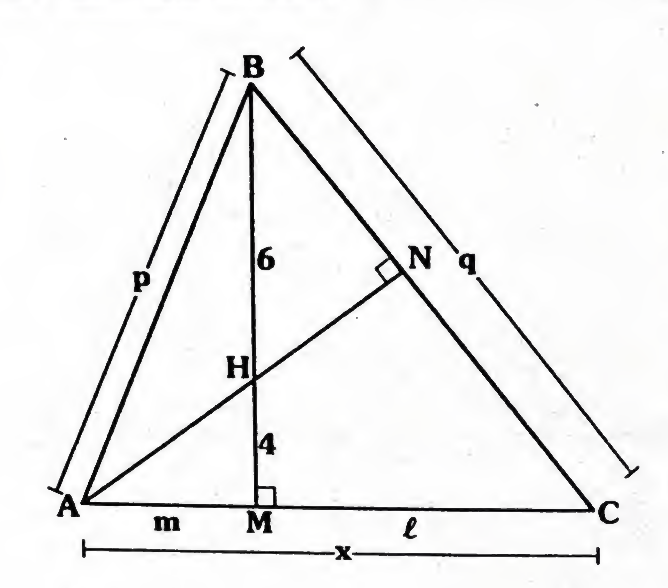
- De (I) y (II):

$$(AB + AD)^2 = b^2 + 2\left(\frac{qb}{4}\right)$$

$$\therefore \mathbf{AB + AD = \sqrt{\frac{b}{2}(2b + q)}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 99



- Nos piden: x
- Dato: $p^2+q^2=a^2+120$
- Por ⊿AMH ~ ⊿MBC:

$$\frac{4}{m}=\frac{\ell}{10} \Rightarrow m\ell=40$$

- Por teorema de Pitágoras

⊿AMB: $p^2=10^2+m^2$

⊿CMB: $q^2=10^2+\ell^2$

$$\Rightarrow p^2+q^2=200+m^2+\ell^2$$

- Usando el dato:

$$\Rightarrow m^2+\ell^2=a^2-80$$

- Finalmente:

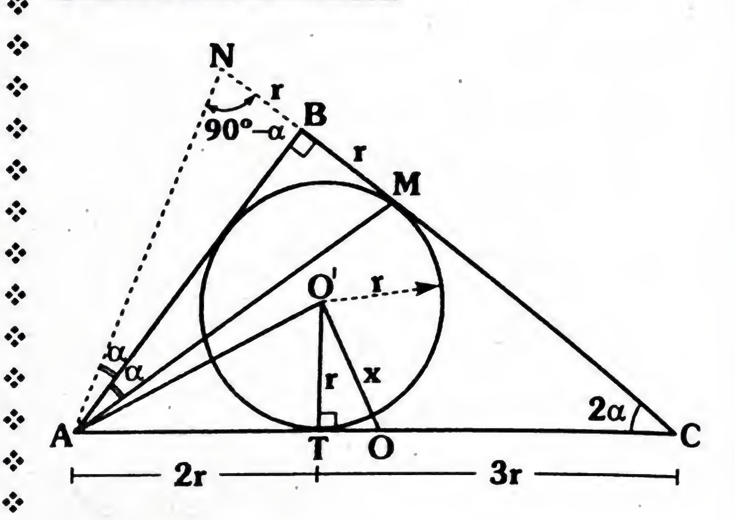
$$x^2=m^2+\ell^2+2m\ell$$

$$x^2=a^2-80+80=a^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x=a}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 100

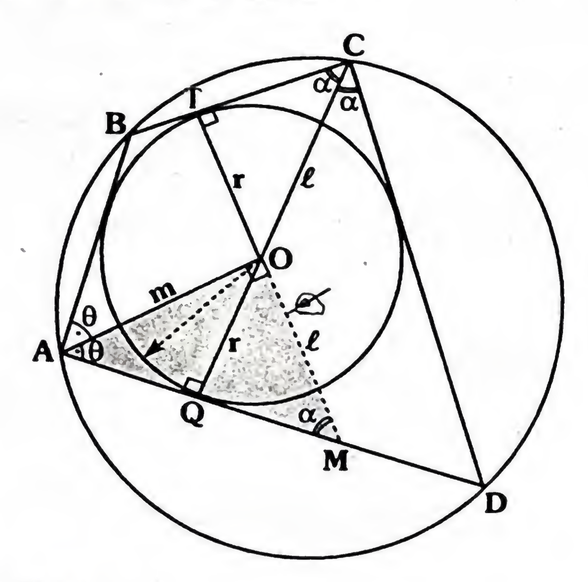


- Nos piden: x
- Prolongamos $\overline{CB}$ hasta N tal que MB=BN=r, como CN=CA ⇒ AT=2r ⇒ m∢O'AT = 53°/2 luego: TC=3r ; TO=r/2.
- En ⊿TOO':

$$\mathbf{x=\frac{r\sqrt{5}}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 101



- Piden: r

- Dato: $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{\ell^2}=\dfrac{1}{9}$
- Como el ⏢ABCD es inscrito entonces:

$$2\alpha + 2\theta = 180° \Rightarrow \alpha + \theta = 90°$$

- Se traza :

$$⊿OQM \cong ⊿OTC \Rightarrow m\sphericalangle AOM = 90°$$

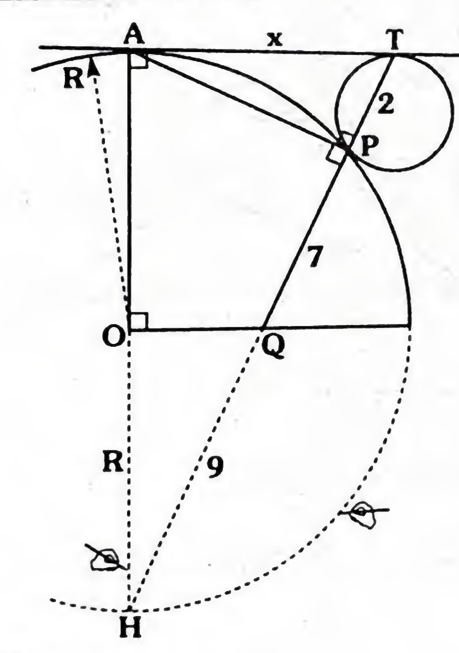
- Por teorema ⊿AOM:

$$\frac{1}{r^2}=\underbrace{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{\ell^2}}_{\frac{1}{9}}$$

$$\therefore\ \mathbf{r = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 102



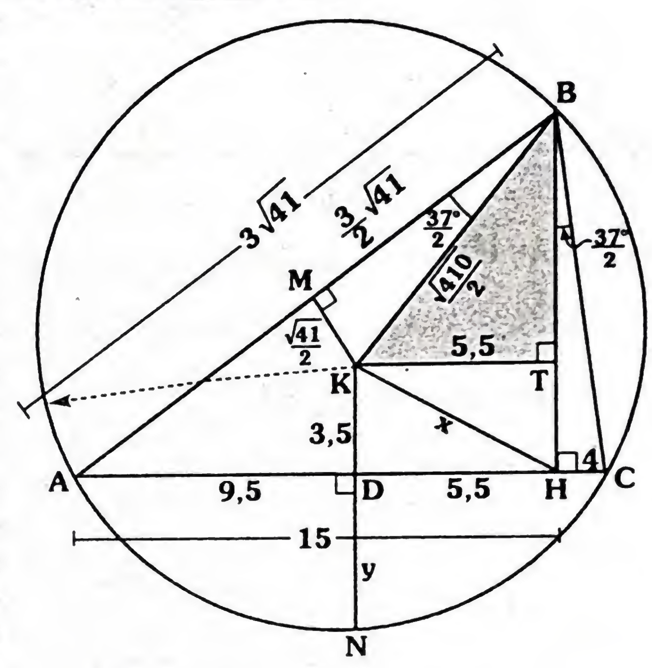
- Piden: x
- Se prolonga $\overline{TQ}$ hasta H (pues $m\sphericalangle APT = 90°$)
- En ⊿HAT: $\overline{OQ}$ es base media ⇒ HQ=9
- Por teorema en ⊿ATH :

$$x^2 = (2)(18)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 103



- Piden: x e y
- Como BT=12 y HC=4

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle HBC = \frac{37°}{2}$$

- Por teorema:

$$m\sphericalangle ABK = m\sphericalangle HBC = 37°/2$$

- Teorema de Pitágoras en ⊿KBT:

$$BT = 8{,}5 \Rightarrow TH = KD = 3{,}5$$

- Finalmente:

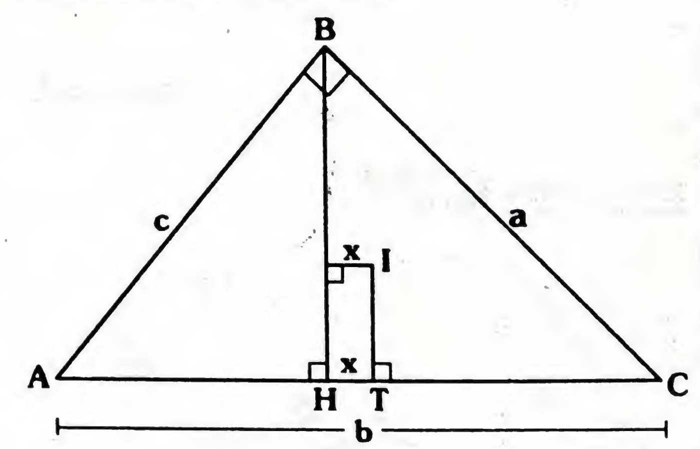
$$y = \frac{\sqrt{410}}{2} - 3\cdot 5 = \mathbf{6{,}62}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{(3{,}5)^2 + (5{,}5)^2} = 6{,}51}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 104

Analicemos en general:



- Nos piden: x
- Sea BC=a, AB=c y AC=b (a ≥ c)
- Por teorema en ⊿ABC:

$$c^2 = AH \cdot b \Rightarrow AH = \frac{c^2}{b}$$

- Teorema:

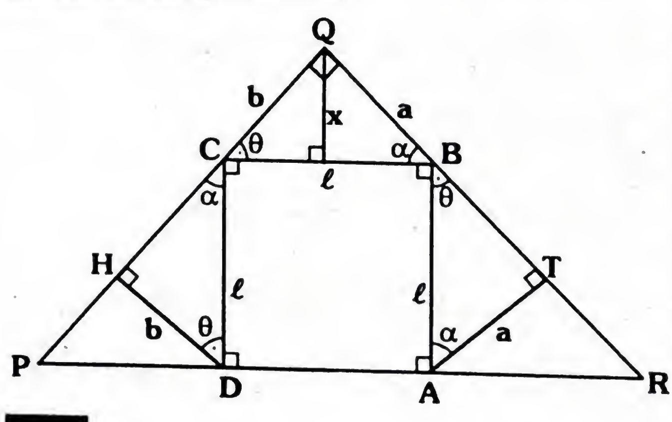
$$AT = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$$

- Finalmente: $\boxed{x = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c^2}{b}}$
- Para $a = 40$, $c = 30$ y $b = 50$ reemplazando se tiene:

$$\mathbf{x = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 105



- Nos piden: x
- De ⊿DHG ≅ ⊿CQB ≅ ⊿ABT

$$\Rightarrow CQ = b \text{ y } BQ = a$$

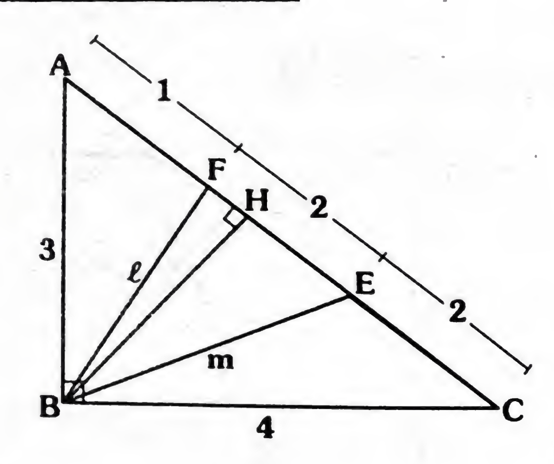
- Por teorema en ⊿CQB:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 106



- Nos piden $m^2 - \ell^2$
- Teorema en ΔABC:

$$3^2 = AH \cdot 5 \Rightarrow AH = \frac{9}{5} \Rightarrow FH = \frac{4}{5} \text{ y}$$

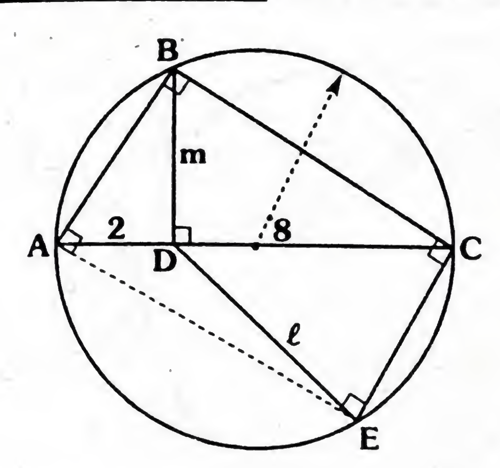
$$HE = \frac{6}{5}$$

- Teorema de proyecciones en ΔBEF:

$$m^2 - \ell^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \mathbf{4/5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 107

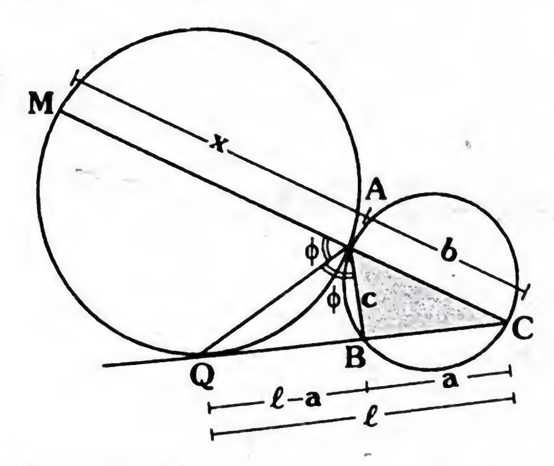


- Piden $m^2 + \ell^2$
- Como $\overline{CE} // \overline{AB} \Rightarrow$ ABCE es un rectángulo.
- Por teorema de Marlen en ABCE:

$$m^2 + \ell^2 = 2^2 + 8^2 = 68$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 108



- Nos piden: x
- Sabemos que $\overline{AQ}$ es bisectriz exterior, entonces:

$$\frac{\ell}{\ell - a} = \frac{b}{c} \Rightarrow \ell = \frac{ab}{b-c} \qquad \text{... (I)}$$

- Por teorema de la tangente:

$$\ell^2 = b(b+x) \qquad \text{... (II)}$$

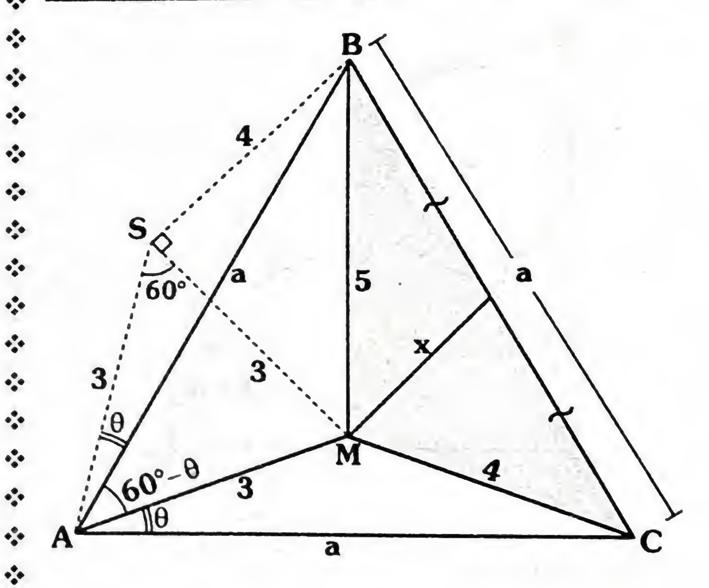
- De (II) y (I):

$$\frac{a^2b^2}{(b-c)^2} = b(b+x)$$

$$\therefore \ \mathbf{x} = \frac{b\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{(b-c)^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 109



- Nos piden: x
- En el ΔABC, usemos el teorema del cálculo de la mediana:

$$4^2 + 5^2 = 2x^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{... (I)}$$

- Se traza el ΔASM equilátero, con ello notamos:

$$\Delta ASB \cong \Delta AMC (LAL) \Rightarrow SB = 4$$

Como AS=3 y BM=5

$$\Rightarrow m\measuredangle MSB = 90° \Rightarrow m\measuredangle ASB = 150°$$

- En ΔASB : Teorema de cosenos

$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos 150°$$

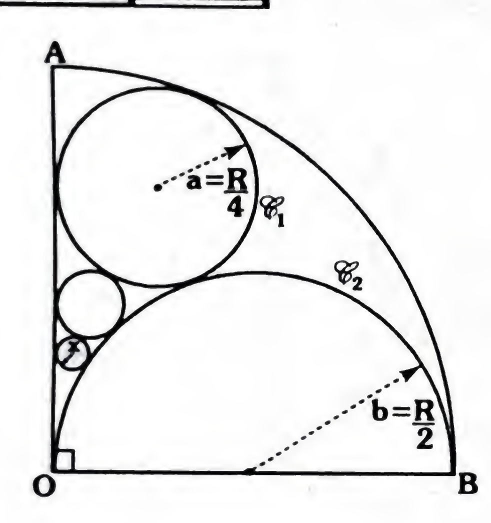
$$a^2 = 25 + 12\sqrt{3} \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$x = \sqrt{14,25 - 3\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 110



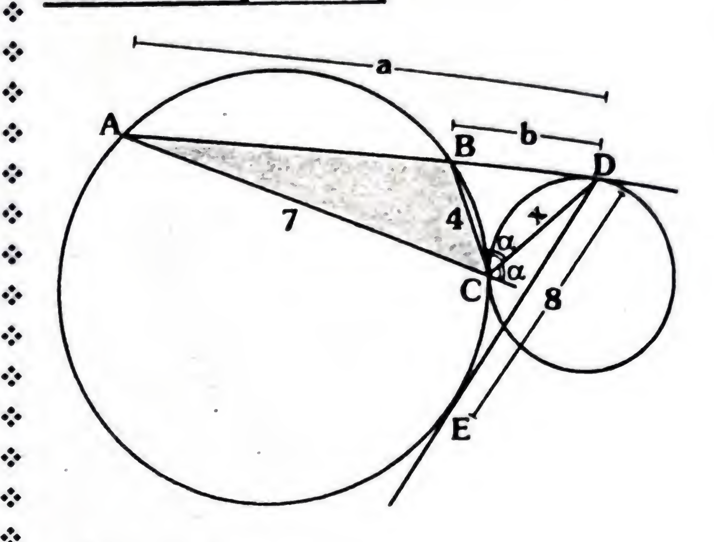
- Nos piden: x
- Por teorema (pág. 41): $a = \dfrac{R}{4}$
- Por teorema (pág. 66) para $n = 2$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore\ x = \frac{R}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 111



- Nos piden: x
- Sabemos que $\overline{CD}$ es bisectriz exterior para el ΔABC .
- Por teorema de la bisectriz exterior:

$$x^2 = ab - (7)(4) \quad \text{...(I)}$$

- Por teorema de la tangente:

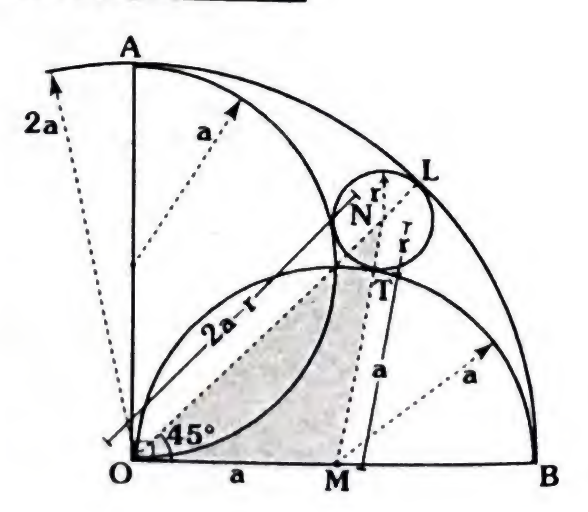
$$8^2 = ba \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II): $x^2 = 8^2 - (7)(4)$

$$\therefore\ x = 6$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 112



- Piden: T
- Sea $OA = 2a$, por dato:

$$OA = 5 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2a = 5 + 2\sqrt{2} \quad ... (I)$$

- Sabemos que O, N y L son colineales lo mismo que O, T y N.
- En ΔOMN por teorema de cosenos:

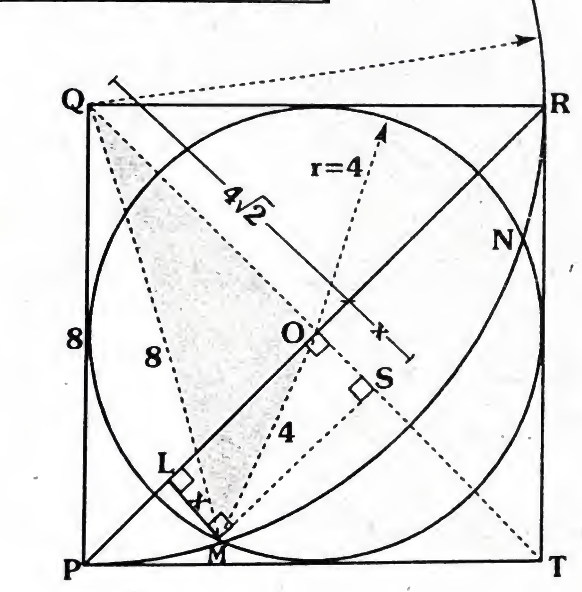
$$(a+r)^2 = (2a-r)^2 + a^2 - 2a(2a-r)\cos 45°$$

$$\Rightarrow r = \frac{2a}{17}(5 - 2\sqrt{2}) \quad ... (II)$$

- De (I) y (II): $\mathbf{r = 1}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 113



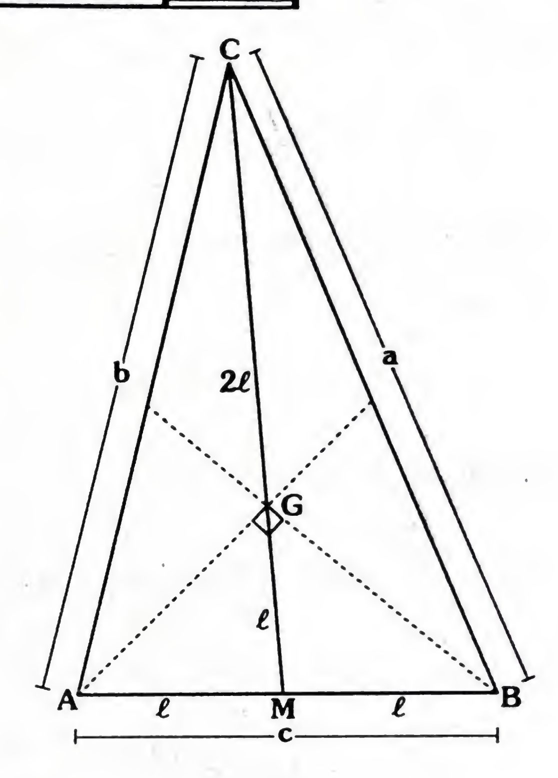
- Piden: x
- Como $r = 4 \Rightarrow PQ = B$ y $OQ = 4\sqrt{2}$
- MLOS es rectángulo $\Rightarrow OS = x$
- ΔMQO: teorema de Euclides:

$$8^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2(4\sqrt{2})x$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 114



Parte I

- Como G es baricentro $\Rightarrow CG = 2(GM)$ y en $\triangle AGB$: $AM = MB = MG$.
- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$a^2 + b^2 = 2(3\ell)^2 + \frac{(2\ell)^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 20\ell^2 = 5\underbrace{(2\ell)}_{c}^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}} = c$$

Parte II

- Usemos existencia:

$$c < a + b \quad ... (I)$$

- Por teorema:

$$\frac{|a-b|}{2} < 3\ell < \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|a-b|}{3} < \underbrace{2\ell}_{c} < \frac{a+b}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|a-b|}{3} < c < \frac{a+b}{3} \quad \ldots \text{(II)}$$

- Usemos el siguiente teorema $MA \leq MC$
- Para a y b:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

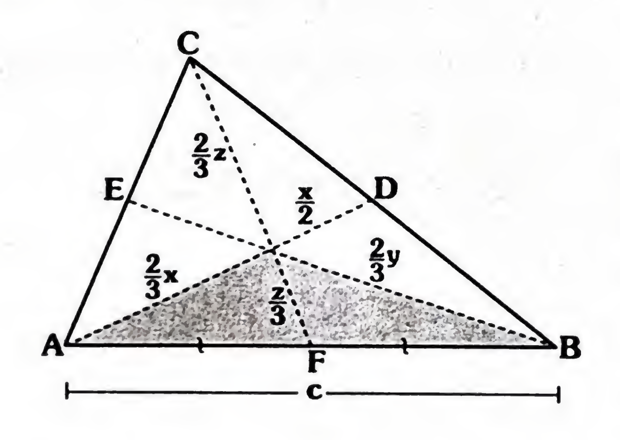
- Del resultado de la parte (I):

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{5c^2}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{10}(a+b) \leq c \ldots \text{(III)}$$

- De (I), (II) y (III):

$$\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{10}(a+b) \leq c < \frac{a+b}{3}}$$

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden "c" en función de "x", "y" y "z".
- Como G es baricentro:

$$AG = \frac{2}{3}x \;;\; BG = \frac{2}{3}y \;;\; FG = \frac{1}{3}z$$

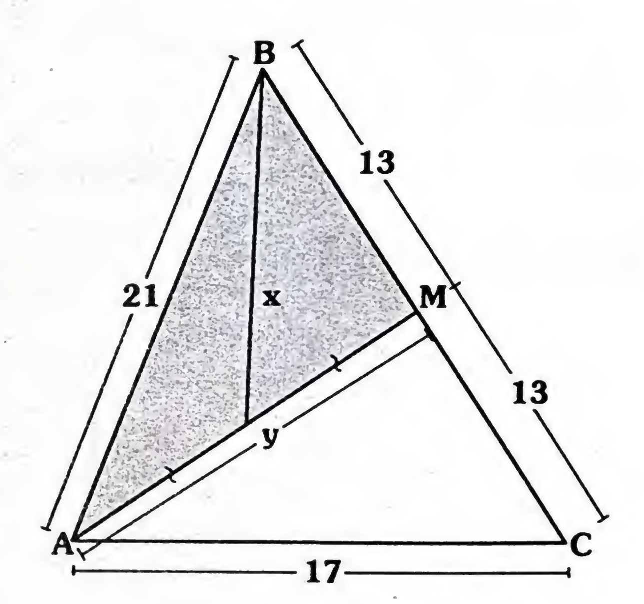
- En ΔAGB por teorema del cálculo de la mediana:

$$\left(\frac{2}{3}x\right) + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = 2\left(\frac{z}{3}\right)^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{c = \frac{2}{3}\sqrt{2(x^2+y^2)-z^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 116



- Nos piden: x
- Por teorema de la mediana:

$$\text{En } \Delta ABM: 21^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{y^2}{2} \quad \ldots \text{(I)}$$

$$\text{En } \Delta ABC: 21^2 + 17^2 = 2y^2 + \frac{26^2}{2}$$

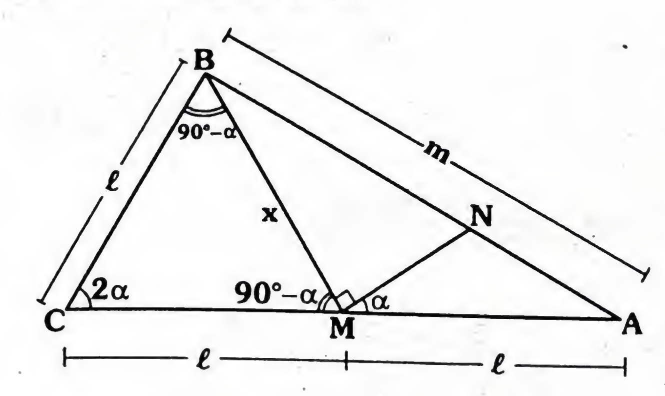
$$\Rightarrow y^2 = 196$$

- En (I): $21^2 + 13^2 = 2x^2 + \dfrac{196}{2}$

$$\therefore \; \mathbf{x = 16}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 117



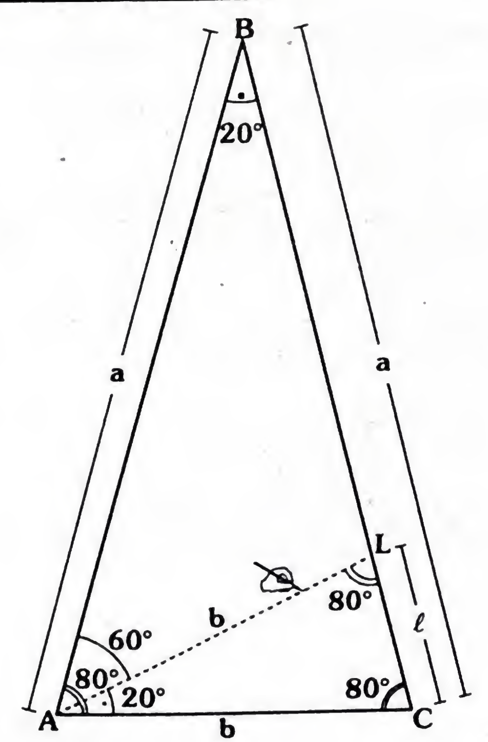
- Nos piden: x
- Dato: $m^2 - \ell^2 = k^2$
- ΔCBM : isósceles $\Rightarrow BC = CM = \ell$
- ΔABC , por teorema de la mediana

$$m^2 + \ell^2 = 2x^2 + \frac{(2\ell)^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2 - \ell^2}{2} = x^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\sqrt{2}}{2}k}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 118



- Nos piden un equivalente a: $a^3 + b^3$
- Se traza $\overline{AL}$ tal que $m\measuredangle CAL = 20°$
- Por teorema de semejanza:

$$b^2 = \ell a \ \Rightarrow \ \ell = \frac{b^2}{a}$$

- $BL = a - \ell = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$
- En ΔABL , teorema de cosenos:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$$

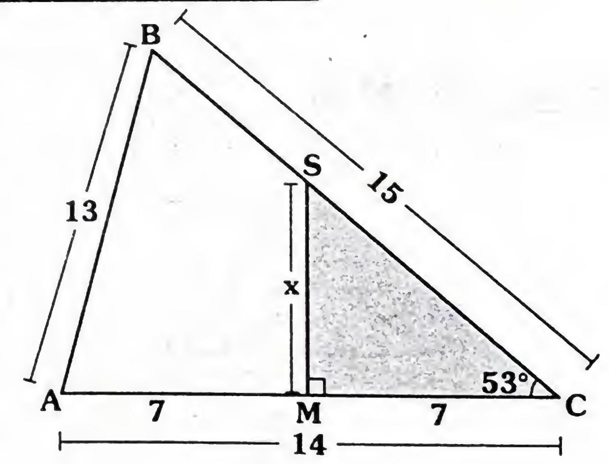
$$\cancel{a^4} + b^4 - 2a^2b^2 = \cancel{a^4} + a^2b^2 - a^3b$$

$$b^3 - 2a^2b = a^2b - a^3$$

$$\therefore \ \mathbf{a^3 + b^3 = 3a^2b}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 119

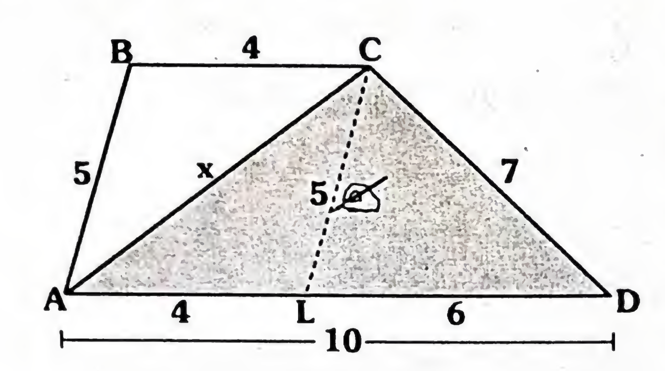


- Piden: x
- Por propiedad: $m\measuredangle ACB = 53°$
- $\triangle SMC$: notable de 53° $\Rightarrow \dfrac{x}{7} = \dfrac{4}{3}$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{28}{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 120



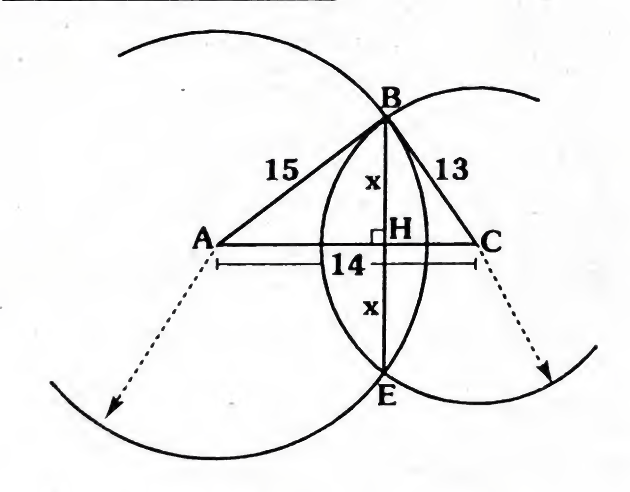
- Nos piden: x
- Se traza $\overline{CL} // \overline{AB} \Rightarrow ABL$ es un paralelogramo $\Rightarrow AL = 4$, $LC = 5$
- En ΔACD: Teorema de Stewart

$$x^2 \cdot 6 + 7^2(4) = 5^2(10) + (4)(6)(10)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 7}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 121



- Nos piden EB.
- Por teorema de circunferencia:

$$BH = HE \Rightarrow EB = 2x$$

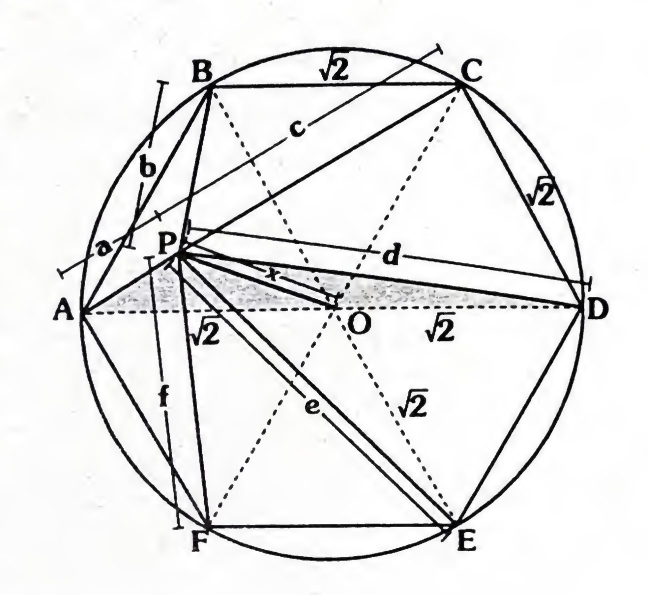
- Para el ΔABC, por teorema de Heron:

$$x = 12$$

$$\therefore \quad \mathbf{EB = 24}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 122



- Piden: x
- Dato: $a^2 + d^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 18$
- Usemos el teorema de la mediana:

$$\Delta APD: \; a^2 + d^2 = 2x^2 + \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} \quad \ldots (I)$$

$$\Delta FPC: \; c^2 + f^2 = 2x^2 + \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} \quad \ldots (II)$$

$$\Delta EPB: \; a^2 + e^2 = 2x + \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} \quad \ldots (III)$$

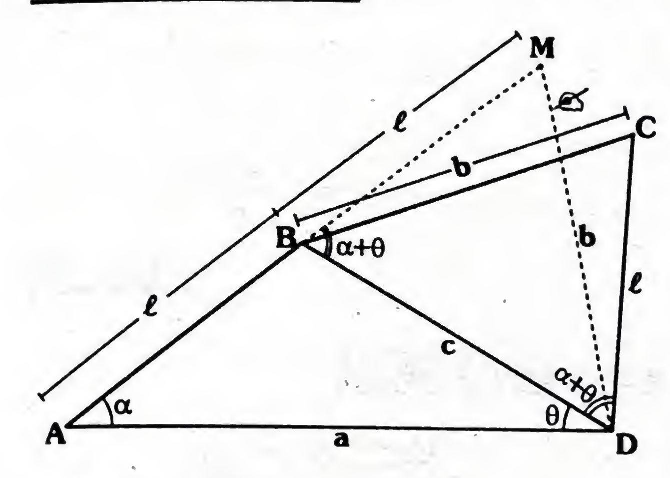
- Sumando (I), (II) y (III):

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}_{18} = 6x^2 + 12$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 123



- Piden: ℓ
- Dato: $a^2+b^2-c^2=128$
- Se prolonga $\overline{AB}$ tal que $AB=BM=\ell$
- $\Delta MBD \cong \Delta CDB(LAL) \Rightarrow MD=b$
- En ΔAMD, por teorema de la mediana:

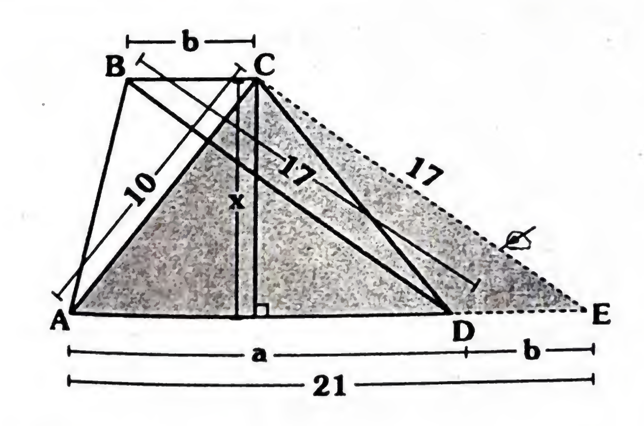
$$a^2+b^2=2c^2+\frac{(2\ell)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2+b^2-2c^2}_{128}=2\ell^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\ell=8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 124



- Nos piden: x
- Dato: la mediana mediana mide 10,5

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=10{,}5 \Rightarrow a+b=21$$

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta E tal que $DE=b \Rightarrow DBCE$ es paralelogramo

$$\Rightarrow CE=17$$

- En el ΔACE, usemos el teorema de Herón:

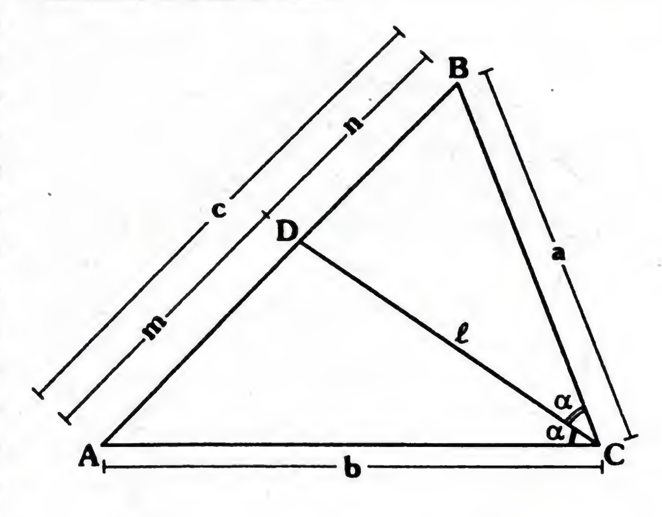
$$p=\frac{10+17+21}{2}=24$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{21}\sqrt{24(3)(7)(14)}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 125



- Por demostrar: $\ell=\dfrac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$
- Por teorema de la bisectriz (proporciones):

$$\frac{n}{m}=\frac{a}{b} \qquad \ldots(I)$$

- Como: $m + n = c$ ...(II)

- De (I) y (II): $m = \dfrac{bc}{a+b}$ y $n = \dfrac{ac}{a+b}$

- Por teorema del cálculo de la bisectriz:

$$\ell^2 = ab = mn$$

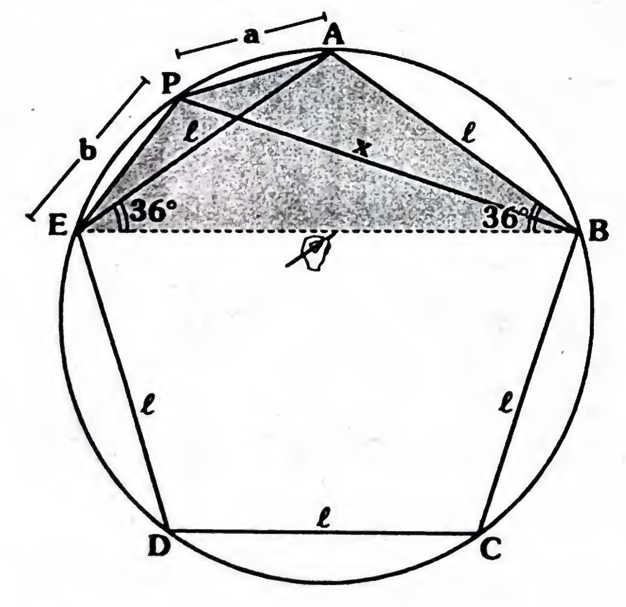
$$\Rightarrow \ell^2 = ab - \left(\frac{bc}{a+b}\right)\left(\frac{ac}{a+b}\right)$$

$$\ell^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right]$$

$$\ell^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\underbrace{(a+b+c)}_{2p}\underbrace{(a+b-c)}_{2p-2c}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\ell = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}}$$

RESOLUCIÓN Nº 126



- Piden: x

- En ΔEAB: $AE = AB = \ell$ y

$$EB = \ell\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

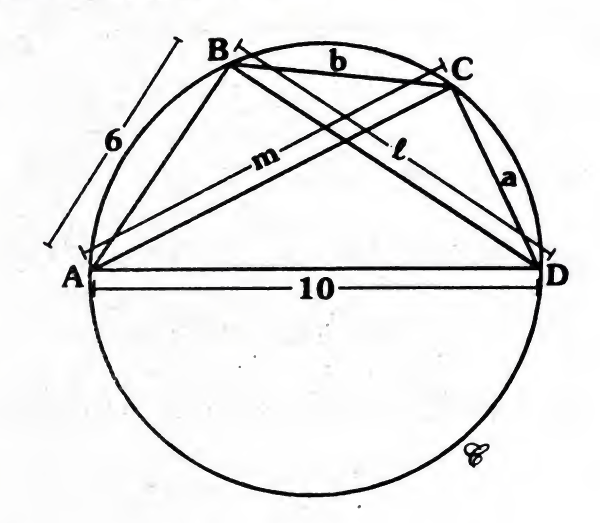
- En ⌂EPAB, por teorema de Ptolomeo.

$$x\ell = \ell b + a\ell\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = b + a\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 127



- Nos piden el radio de $\mathscr{C}$.

- Dato: $\dfrac{a}{20} + \dfrac{b}{12} = \dfrac{m}{15}$

$$\Rightarrow\quad 3a + 5b = 4m$$

- En ⌂ABCD, usemos el teorema de Ptolomeo:

$$\Rightarrow\quad \underbrace{6a + 10b} = m\ell$$

$$2\underbrace{(3a+5b)}_{4m} = m\ell$$

$$\Rightarrow\quad \ell = 8$$

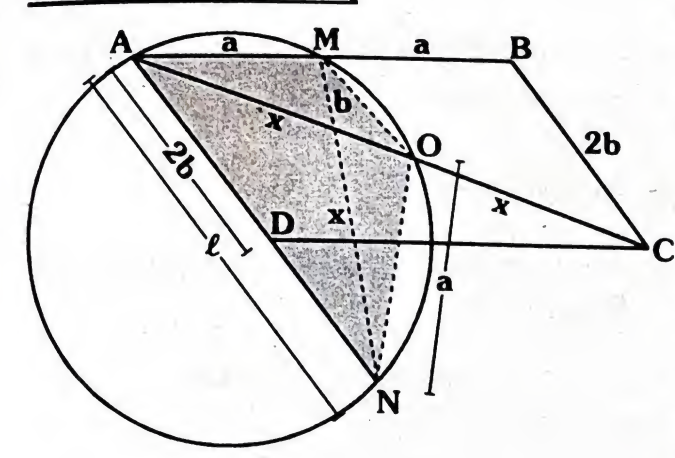
- Como $AB = 6$, $BD = 8$ y $AD = 10$

$\Rightarrow m\measuredangle ABD = 90° \Rightarrow \overline{AD}$ es diámetro

$\therefore$ **El radio de $\mathscr{C}$ es 5.**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 128



- Piden AC.
- Dato: $(AB)^2 + 2(AD)(AN) = 64$
- "O" es centro del paralelogramo.
- ΔABC, $\overline{OM}$ es base media $\Rightarrow BC = 2(OM)$
- Del dato: $(2a)^2 + 2(2b)\ell = 64$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b\ell = 16 \qquad \ldots (I)$$

- En ◻AMON, por teorema de Ptolomeo:

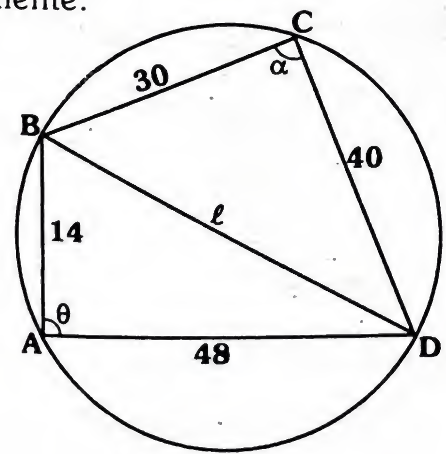
$$(x)(x) = \underbrace{a \cdot a + b\ell}_{16} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$\therefore \ \mathbf{AC = 8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 129

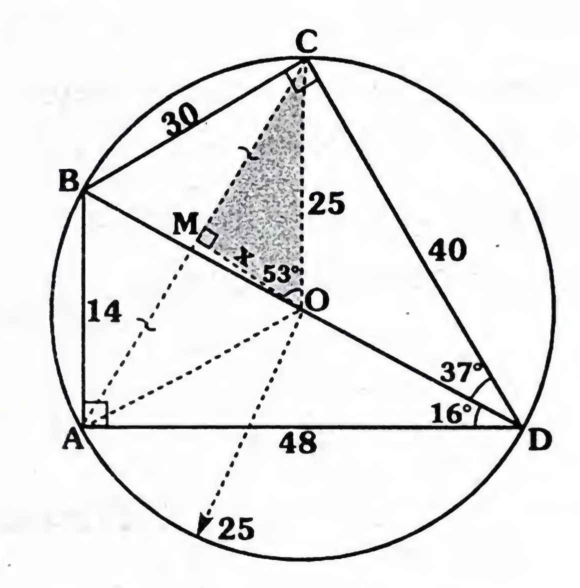
- Dados los valores, optemos por lo siguiente:



- Por teorema de cosenos, en los $\Delta_s ABD$ y BCD:

$$\left.\begin{array}{l} \ell^2 = 14^2 + 48^2 - 2(14)(48)\cos\theta \\ \ell^2 = 30^2 + 40^2 - 2(30)(40)\underbrace{\cos\alpha}_{-\cos\theta} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cos\theta = 0 \\ \Rightarrow \theta = 90^\circ \end{array}$$

- Es decir $\overline{BD}$ es diámetro, la figura queda asi:



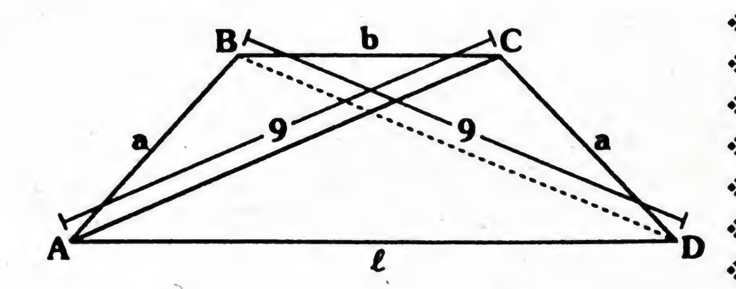
- O y M son puntos medios de las diagonales, pero como O es centro $\Rightarrow \overline{OM} \Rightarrow \overline{AC}$.
- ⊿OMC: notable de 53°

$$\therefore \ \mathbf{x = 15}$$

Clave C

Este problema también se puede resolver aplicando los teoremas de Ptolomeo, Viette y Euler en general.

RESOLUCIÓN Nº 130



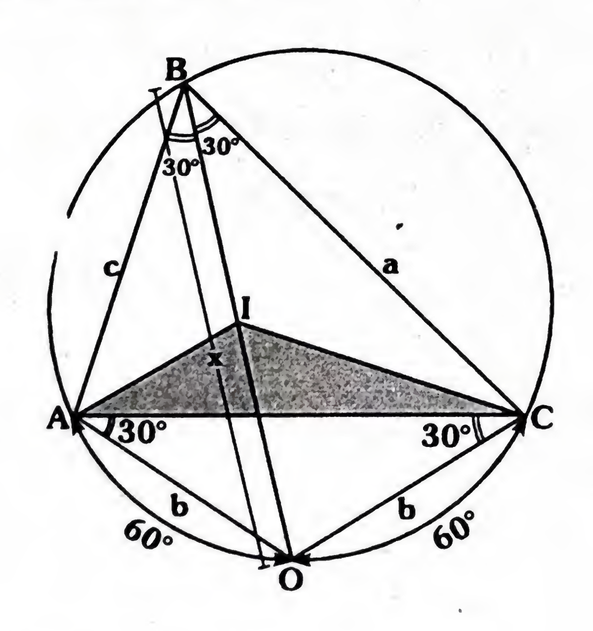
- Piden: a
- Dato: $b\ell = 72$
- Como ABCD es un trapecio isósceles $\Rightarrow AC = BD = 9$.
- $\square$ABCD es también inscriptible.
  $\Rightarrow$ por teorema de Ptolomeo:

$$a \cdot a + \underbrace{b\ell}_{72} = (9)(9)$$

$$\therefore \ \mathbf{a = 3}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 131



- Dato: $a + c = 18$
- Piden: OB
- Por propiedad $OA = OI = OC \Rightarrow$ O es circuncentro del ΔAIC.
- ΔAOC: isósceles y $AC = b\sqrt{3}$
- En $\square$ABCO inscrito, por teorema de Ptolomeo:

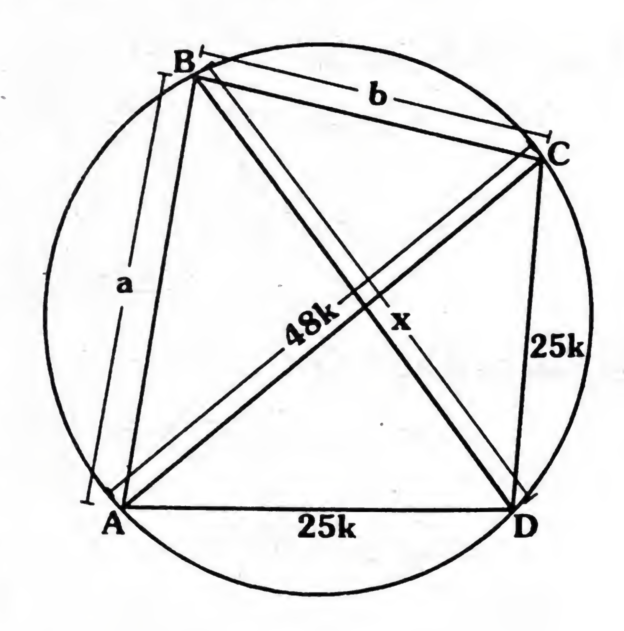
$$x\not{b}\sqrt{3} = a\not{b} + c\not{b}$$

$$x\sqrt{3} = \underbrace{a + c}_{18}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6\sqrt{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 132



- Piden: x
- Dato: $a + b = 64$
- Por teorema de Ptolomeo:

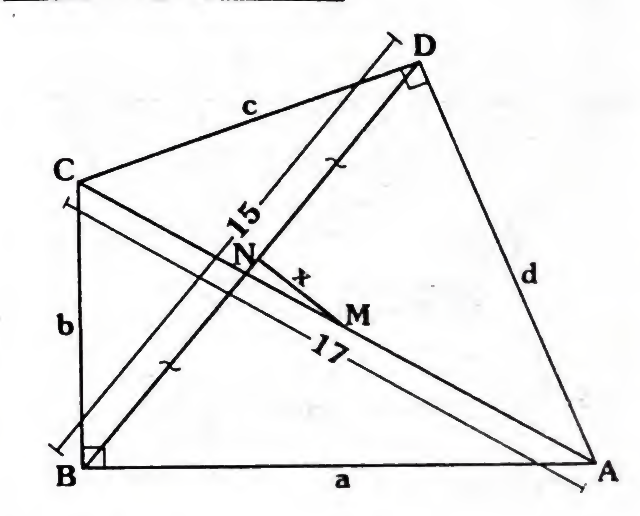
$$x(48k) = 25ka + 25kb$$

$$48x = 25\underbrace{(a+b)}_{64}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{100}{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 133



- Piden: x
- Por teorema de Euler:

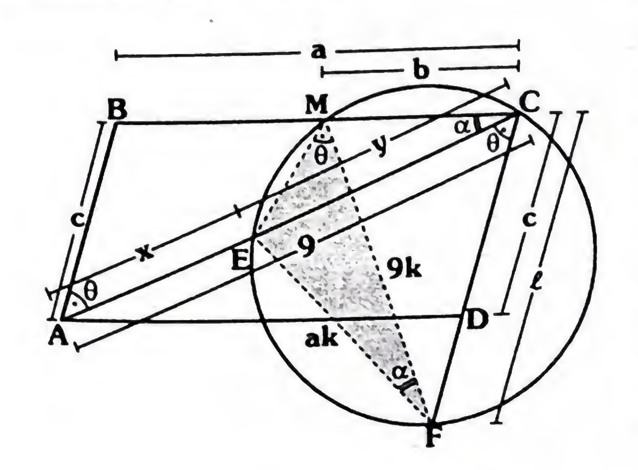
$$\underbrace{a^2+b^2}_{17^2} + \underbrace{c^2+d^2}_{17^2} = 15^2 + 17^2 + 4x^2$$

$$17^2 + \cancel{17^2} = 15^2 + \cancel{17^2} + 4x^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 134



- Nos piden: x
- Dato: $ab + c\ell = 36$
- Del gráfico: $x + y = 9$
- $\Delta ABC \sim \Delta MEF$

$\Rightarrow EM = ck$; $EF = ak$; y $MF = 9k$

- Por teorema de Ptolomeo:

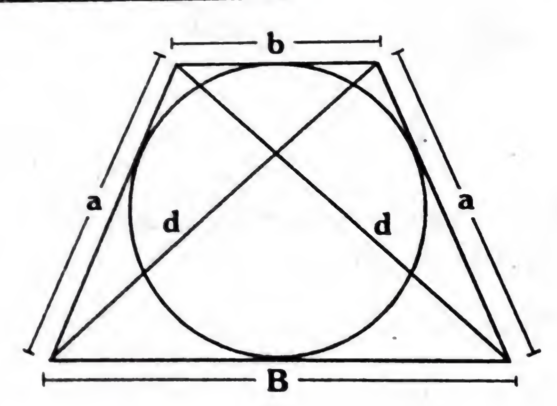
$$9ky = ck\ell + akb$$

$$\Rightarrow 9y = \underbrace{c\ell + ab}_{36} \Rightarrow y = 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 135



- Por demostrar:

$$B^2 + b^2 + 6Bd = 4d^2$$

- Por teorema de Ptolomeo:

$$d \cdot d = a \cdot a + Bd$$

$$d^2 = a^2 + Bd \qquad \ldots (I)$$

- Por teorema de Pitot:

$$a + a = B + b$$

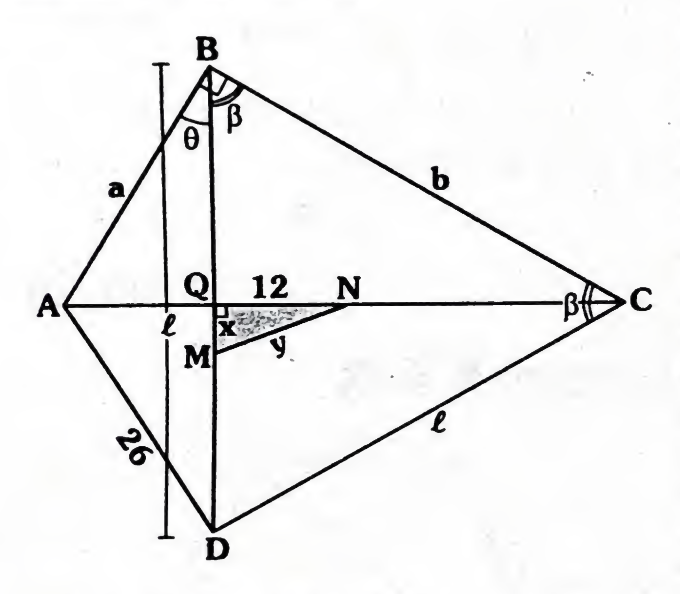
$$\Rightarrow a = \frac{B+b}{2}$$

- En (I):

$$d^2 = \left(\frac{B+b}{2}\right)^2 + Bb$$

$$\therefore \mathbf{4d^2 = B^2 + b^2 + 6Bb}$$

Resolución Nº 136



- En el gráfico, M y N son puntos medios de las diagonales.
- Piden: x
- En $\triangle$MQN: $x^2 + 12^2 = y^2$ ... (I)
- En $\square$ABCD, por teorema de Euler:

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{(AC)^2} + \ell^2 + 26^2 = (AC)^2 + \ell^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow y = 13$$

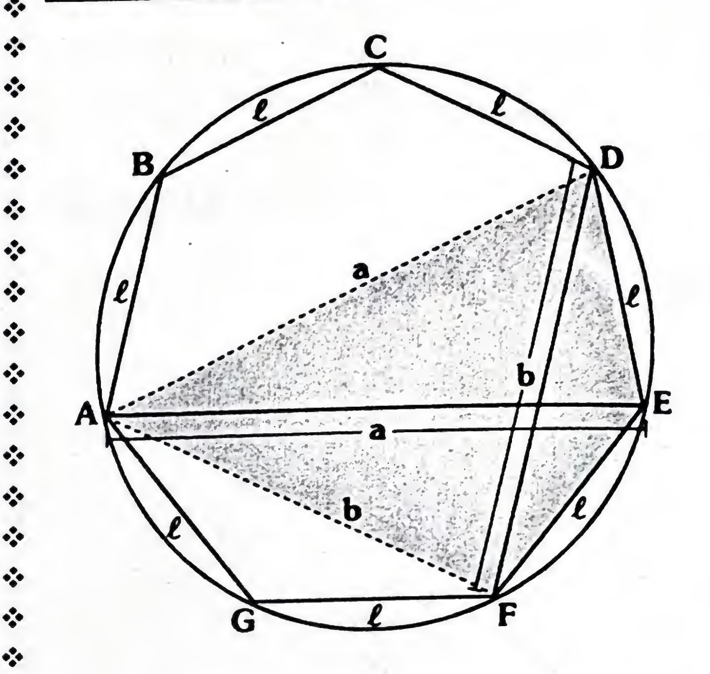
- En (I):

$$x^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 5}$$

Clave E

Resolución Nº 137



- ABCDEFG: heptágono regular
- Por demostrar:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\ell}$$

- Como ABCDEFG es regular:

$$\Rightarrow m\overset{\frown}{AGE} = m\overset{\frown}{ABD}$$

$$\text{Luego}: \quad AD = AE = a$$

- También: $m\overset{\frown}{AGF} = m\overset{\frown}{FED}$

$$\Rightarrow AF = DF = b$$

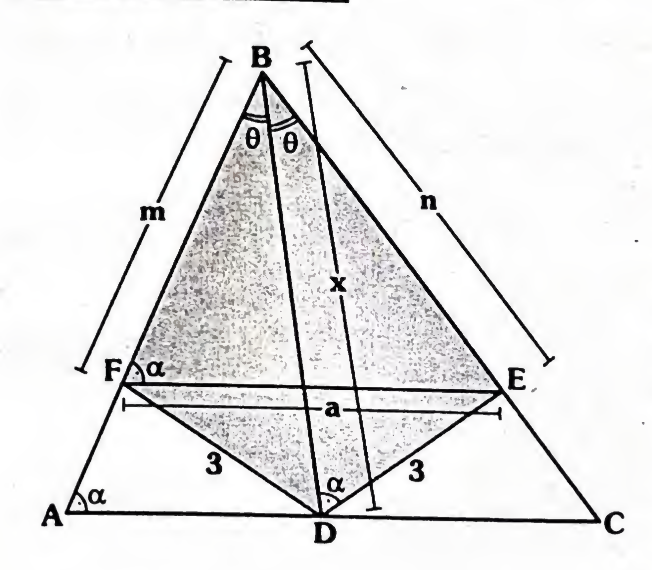
- $\square$AFED: teorema de Ptolomeo

$$a\ell + b\ell = ab$$

$$\ell(a + b) = ab$$

$$\therefore \mathbf{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\ell}}$$

RESOLUCIÓN Nº 138



- Piden: x
- Dato: $mn = 16$
- Como:

$$\overline{AC} // \overline{FE} \Rightarrow m\measuredangle BFE = \alpha$$

- $\triangle$FBED inscriptible

$$\Rightarrow FD = ED = 3$$

- Por teorema de Ptolomeo:

$$xa = 3m + 3n \qquad \text{... (I)}$$

- Por teorema de Viette:

$$\frac{x}{a} = \frac{mn + (3)(3)}{3m + 3n} \qquad \text{... (II)}$$

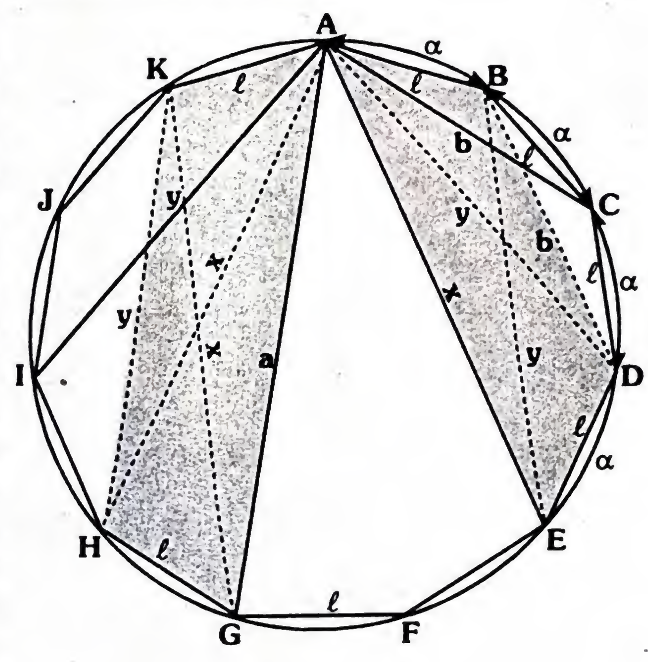
- Multiplicando (I) y (II):

$$x^2 = \underbrace{mn}_{16} + 9$$

$$\therefore \mathbf{x = 5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 139



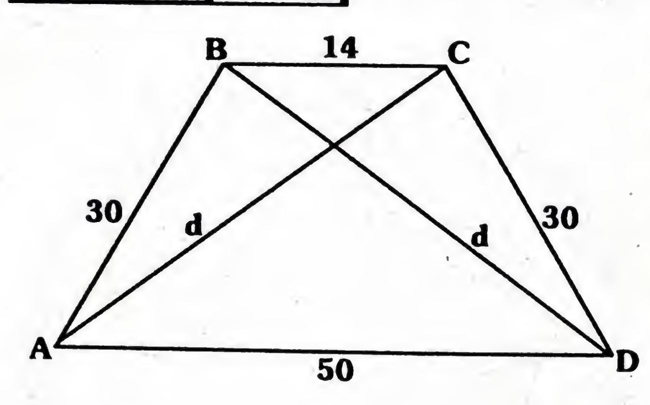
- Piden $x^2 - y^2$
- Dato: $ay - bx = 36$
- Aprovechemos la propiedad del polígono regular.
- Como:
  - $m\widehat{ABC} = m\widehat{BCD} \Rightarrow AC = BD = b$
  - $m\widehat{ABD} = m\widehat{BDE} = M\widehat{IKA} = m\widehat{HIK}$
    $\Rightarrow AI = HK = AD = BE = y$
  - $AE = AH = KG = x$
- Por teorema de Ptolomeo:
  - En $\triangle$HKAG: $x \cdot x = ay + \ell\ell$ ...(I)
  - En $\triangle$ABDE: $y \cdot y = bx + \ell\ell$ ...(II)
- Restando (I) y (II):

$$x^2 - y^2 = \underbrace{ay - bx}_{36}$$

$$\therefore \mathbf{x^2 - y^2 = 36}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 140



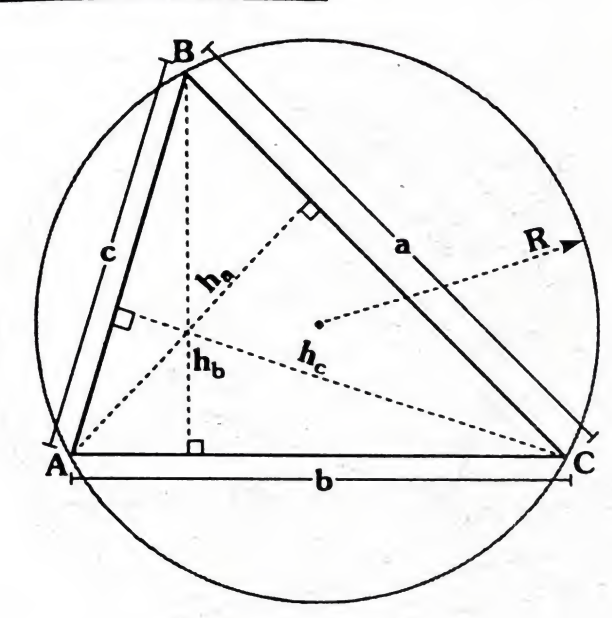
- Piden: d
- Como ABCD es un trapecio isósceles $\Rightarrow AB = CD$ y también es inscriptible, por teorema de Ptolomeo:

$$d \cdot d = (50)(14) + (30)(30)$$

$$\therefore\ \mathbf{d = 40}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 141



- Piden: $(h_a)(h_b)(h_c)$
- Datos: $abc = 4$ y $R = 2$
- Usemos el teorema del producto de lados:

$$ac = 2(h_b)R \quad \text{... (I)}$$

$$bc = 2(h_a)R \quad \text{... (II)}$$

$$ab = 2(h_c)R \quad \text{... (III)}$$

- Multiplicando (I), (II) y (III), tenemos:

$$(abc)^2 = 8(h_a)(h_b)(h_c)\cdot R^3$$

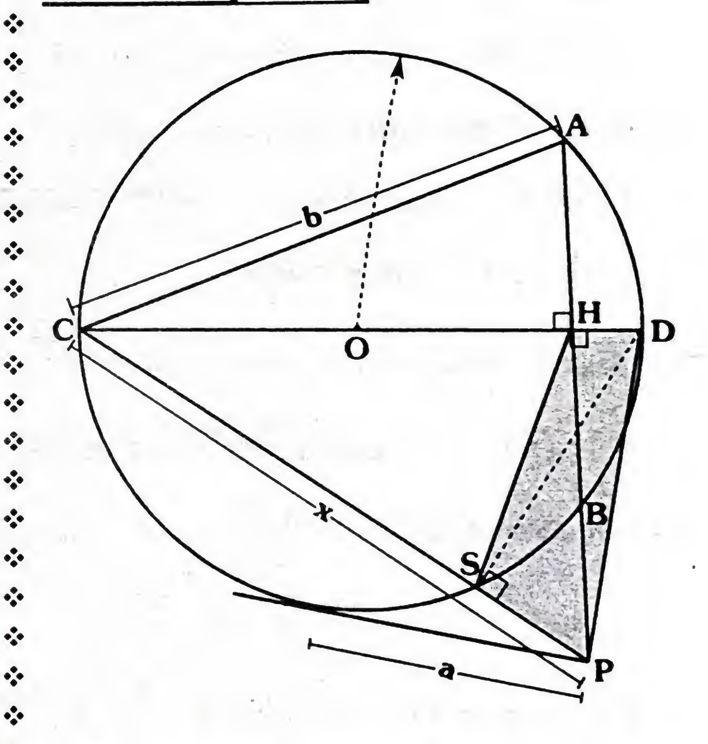
$$\Rightarrow \ (h_a)(h_b)(h_c) = \frac{(abc)^2}{8R^3}$$

- Reemplazando:

$$(h_a)(h_b)(h_c) = \frac{1}{4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 142



- Piden x en función de "a" y "b".
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (PS)x \quad \text{...(I)}$$

- ⌂SHDP: inscriptible, por teorema de la secante:

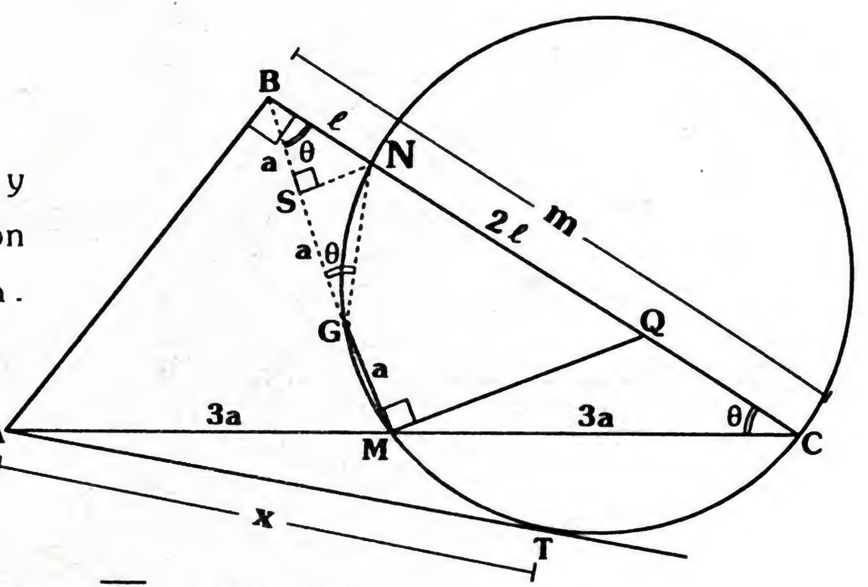
$$\underbrace{(CH)(CD)}_{b^2} = (CS).x \quad \text{... (II)}$$

- Sumando (I) y (II): $a^2+b^2=x\underbrace{(PS+CS)}_{x}$

$$\therefore\ \mathbf{x=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 143



- Piden: x
- Como "G" es baricentro y $AM=MC \Rightarrow$ B, G y M son colineales y $BG=2(GM)=2a$.
- Luego: $AM=MC=BM=3a$
- ◻MGNC inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle MCN=m\measuredangle NGB=\theta$
- ΔBNG: isósceles, se traza la altura $\overline{NS} \Rightarrow BS=SG=a$
- $\overline{NS}//\overline{QM}$, por teorema de Tales $\Rightarrow NQ=2(NB)$
- Del dato: $(NQ)(BC)=24$

$$2\ell m=24 \Rightarrow \ell m=12$$

- Por teorema de la tangente: $x^2=3a(6a)=3(6a^2)$ ... (I)
- Por teorema de la secante: $\underbrace{\ell m}_{}=(2a)(3a)$

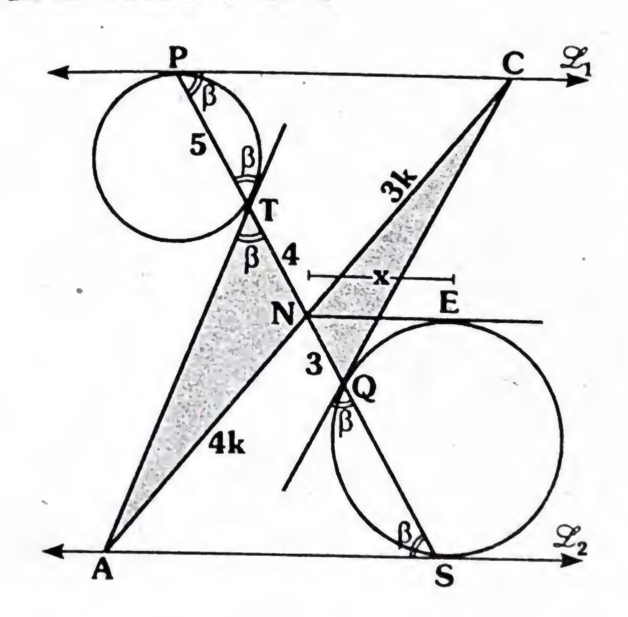
  $12=6a^2$
- De (I) y (II):

$$x^2=3(12)$$

$$\therefore\ \mathbf{x=6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 144



- Piden: x
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = 3(NS) \quad \text{... (I)}$$

- Al completar ángulos, notamos $\overline{AT} // \overline{QC}$, por teorema de Tales:

$$AN = 4k \quad y$$
$$NC = 3k$$

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, por teorema de Tales:

$$\frac{NS}{9} = \frac{4k}{3k}$$

$$\Rightarrow NS = 12$$

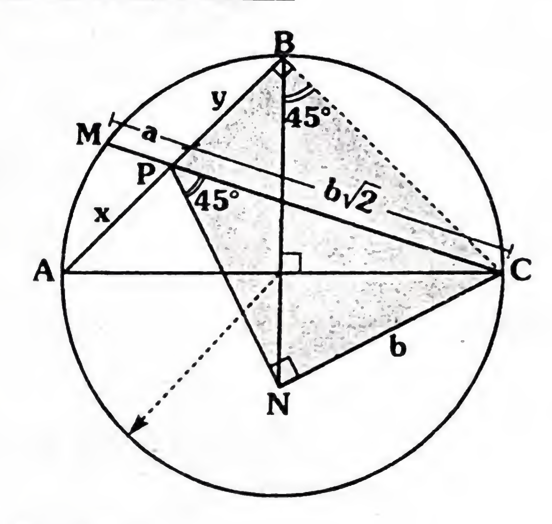
- En (I):

$$x^2 = 3(12)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 145

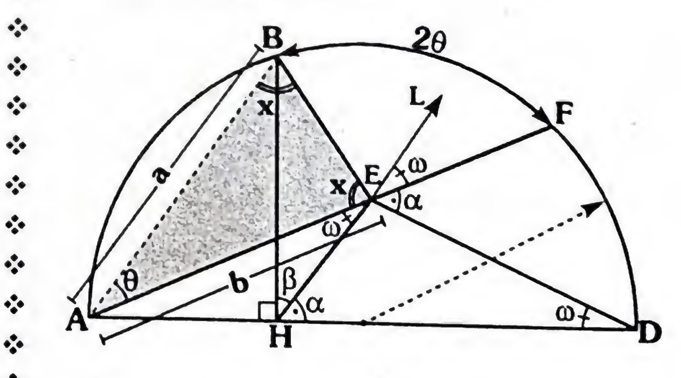


- Piden xy
- ⏢NPBC: inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle NPC = 45°$
- ◺NPC: notable de $45° \Rightarrow PC = b\sqrt{2}$
- Por teorema de las cuerdas:

$$\mathbf{xy = ab\sqrt{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 146



- Piden x
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle BAF = \theta$
- Como $\beta + \alpha = 90° \Rightarrow m\sphericalangle EHD = \alpha$
- En ΔHED, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle LED = \alpha + \omega \Rightarrow m\sphericalangle AEH = \omega$$

- Por teorema de semejanza:

$$b^2 = (AH)(AD) \quad \ldots (I)$$

- En la semicircunferencia:

$$a^2 = (AH)(AD) \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $a = b$

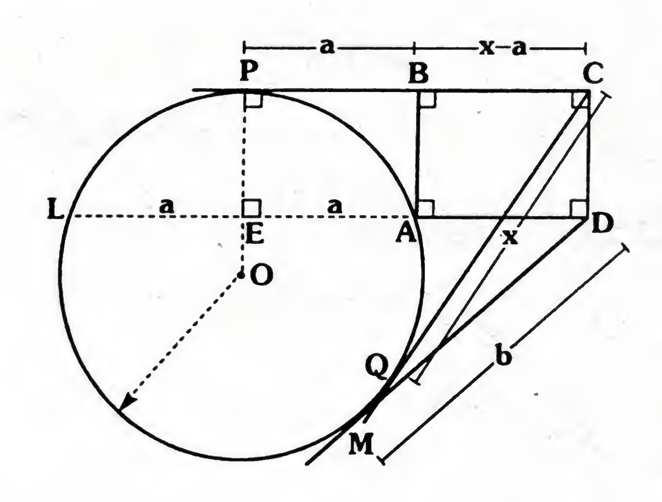
- ΔABE : isósceles

$$2x + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 147



- Nos piden: x

- Dato: $a^2 + b^2 = 18$

- Trazamos $\overline{OP}$ y se prolonga $\overline{DA}$, entonces tendremos EPBA es rectángulo.

$\Rightarrow PB = EA = a$ y en la circunferencia:

$LE = EA = a$

- Como:

$$CP = CQ = x \Rightarrow BC = AD = x - a$$

- Por teorema de la tangente:

$$b^2 = (x-a)(x+a)$$

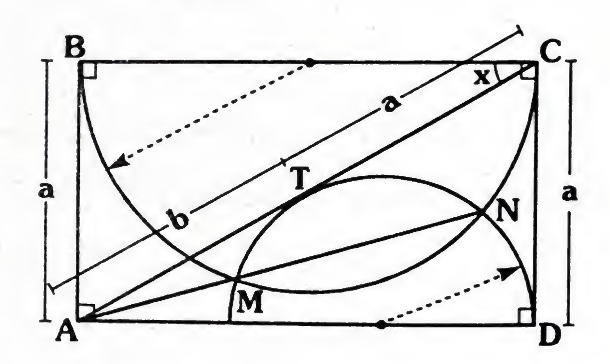
$$b^2 = x^2 - a^2$$

$$\underbrace{b^2 + a^2}_{18} = x^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 3\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 148



- Piden: x

- Por teorema de circunferencia:

$$CD = CT = a$$

- Por teorema de la tangente:

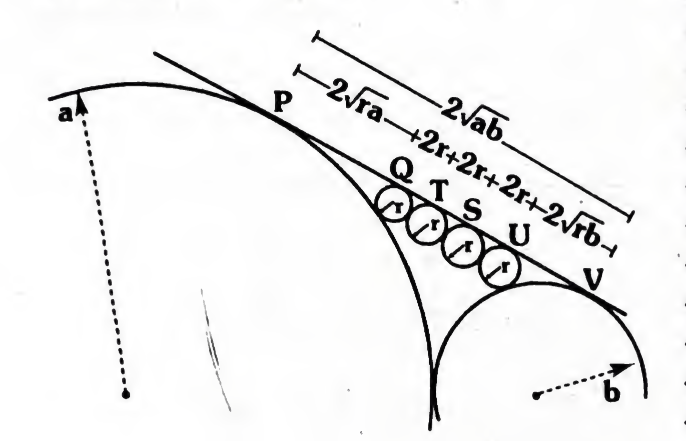
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (AM)(AN) \\ b^2 &= (AM)(AN) \end{aligned}\right\} a = b$$

- $\measuredangle ABC$: notable

$$\therefore \ \mathbf{x = 30^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 149



- Piden "r" en función de a y b
- Por teorema:

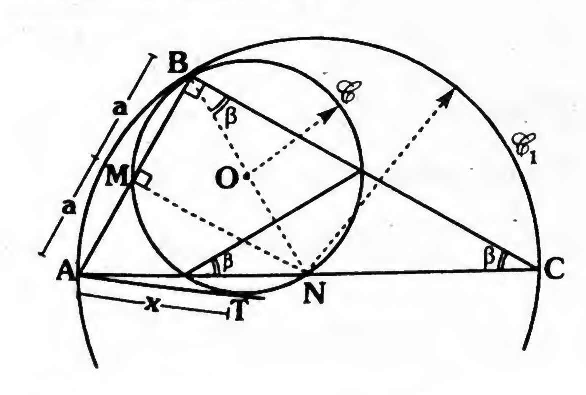
$$PV = 2\sqrt{ab} \ ; \ PQ = 2\sqrt{ra} \ ;$$
$$UV = 2\sqrt{rb} \ \text{ y } \ QU = 6r$$

$$\Rightarrow 6r + 2\sqrt{ra} + 2\sqrt{rb} = 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \mathbf{3r + \sqrt{r}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{ab}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 150



- Nos piden: x
- Por ángulo inscrito en $\mathscr{C}$, $m\measuredangle NBC = \beta$
- Para el ⊿ABC, $\overline{BN}$ es mediana luego, N es centro de $\mathscr{C}_1$.
- $\overline{NB}$ es diámetro de $\mathscr{C}$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle NMB = 90° \Rightarrow AM = MB = a$$

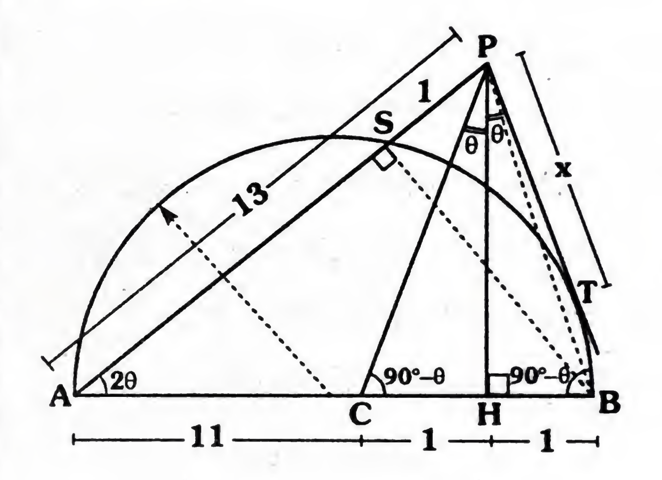
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = a(2a)$$

$$\therefore \mathbf{x = a\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 151



- Piden: x
- Como CH = HB y $\overline{PH} \perp \overline{CB} \Rightarrow \Delta CPB$ es isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABP = 90° - \theta$, luego el ΔABP es isósceles $\Rightarrow AP = AB = 13$
- Como:

$$AP = AB \Rightarrow SP = HB = 1$$

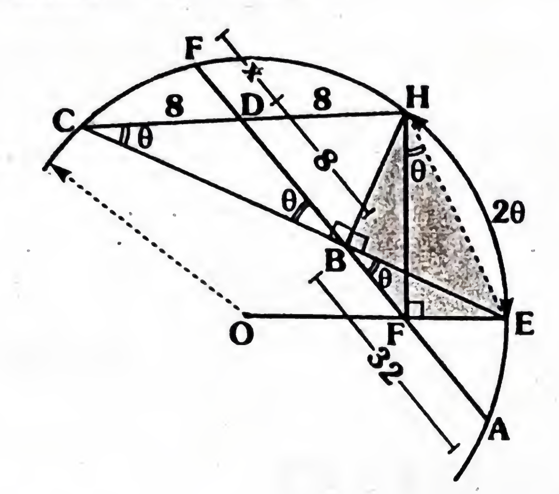
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (1)(13)$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{13}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 152



- Piden: x
- ⏢FBHE: inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle FBE = m\measuredangle FHE = \theta$

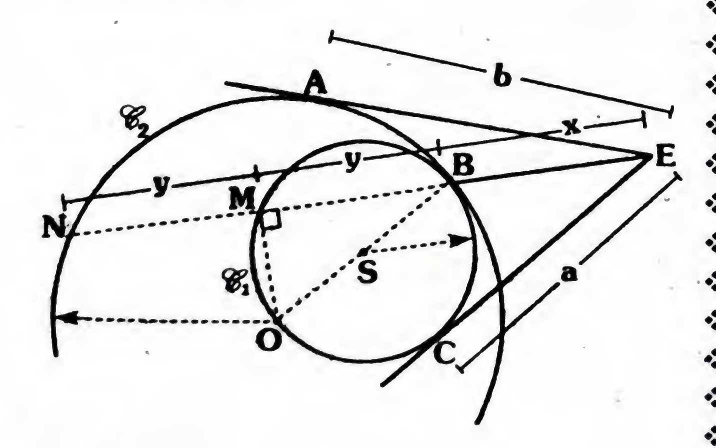
- Como: $m\measuredangle FHE = \theta \Rightarrow m\overset{\frown}{HE} = 2\theta$
- En ⊿CBH, $\overline{BD}$ es mediana relativa a $\overline{HC} \Rightarrow CD = DH = DB = 8$
- Por teorema de las cuerdas:

$$x(40) = (8)(8)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 8/5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 153



- Piden x en función a y b.
- O, S y B son colineales y al prolongar $\overline{EB}$ tendremos:

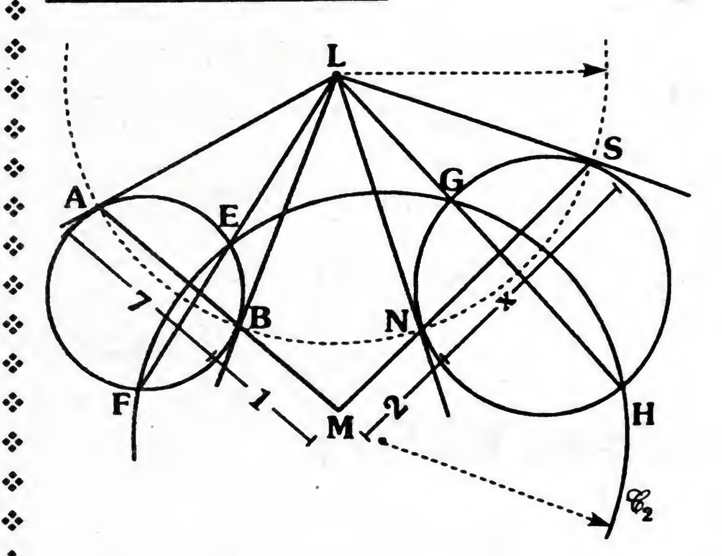
$$m\measuredangle OMB = 90° \Rightarrow NM = MB = y$$

- Por teorema de la tangente:
  - En $\mathscr{C}_1 : a^2 = x(x+y)$
  - En $\mathscr{C}_2 : b^2 = x(x+2y)$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{2a^2 - b^2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 154



- Piden: x
- Por teorema de la secante en $\mathscr{C}_2$:

$$\underbrace{(LE)(LF)}_{} = \underbrace{(LG)(GH)}_{}$$

$$(LA)^2 = (LS)^2$$

$$\Rightarrow\quad LA = LS$$

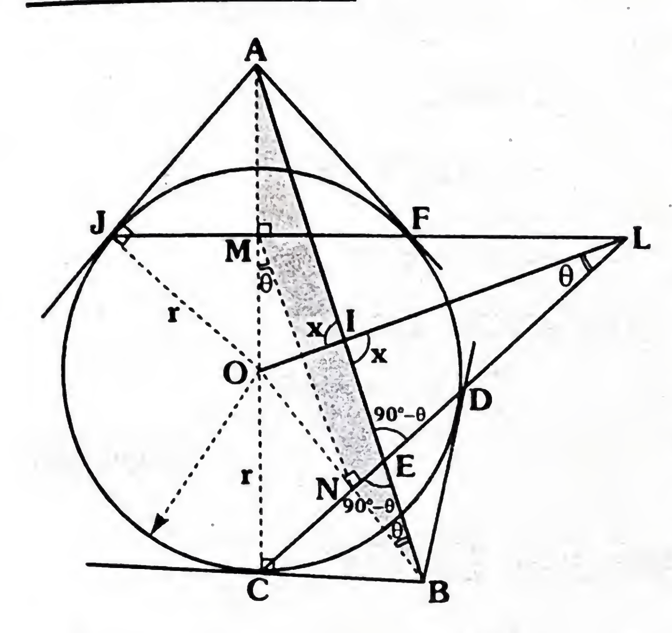
- Como LA=LB=LN=LS, entonces con centro en L se traza el arco de circunferencia que pasa por A, B, N y S.
- Por teorema de la secante:

$$(1)(8) = 2(x + 2)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 155



- Piden: x
- Por teorema de circunferencia:

$$\overline{OM} \perp \overline{JF} \quad y \quad \overline{OB} \perp \overline{DC}$$

- ⏢OMLN es inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle OMN = m\measuredangle OLN = \theta$$

- En ◺OJA y ◺OCB:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = (OM)(OA) \\ r^2 = (ON)(OB) \end{array}\right\} (OM)(OA) = (ON)(OA)$$

- Por recíproco del teorema de la secante:

$$(OM)(OA) = (ON)(OB)$$

$$\Rightarrow m\measuredangle NBA = \theta$$

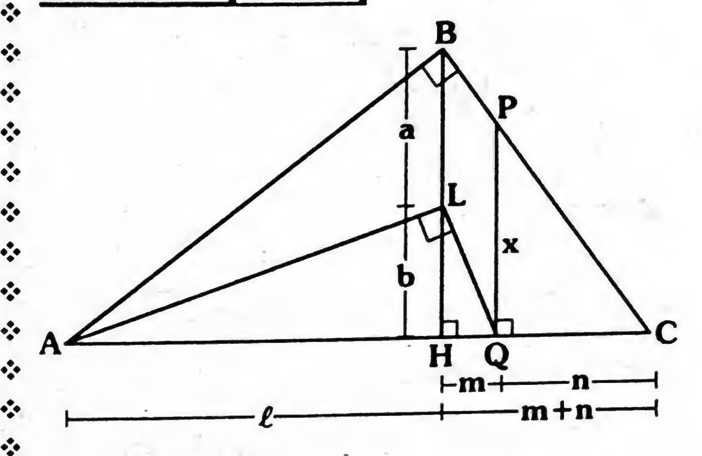
$$\Rightarrow m\measuredangle IEL = 90° - \theta$$

- En ◺EIL: $x + \theta + 90° - \theta = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 156



- Piden: x
- ◺PQC ∼ ◺BHC

$$\frac{x}{a+b} = \frac{n}{m+n} \qquad \ldots (I)$$

- En ◺ALQ: $b^2 = \ell m$ ... (II)
- En ◺ABC:

$$(a+b)^2 = \ell(m+n) \qquad \ldots (III)$$

- De (II) y (III):

$$\frac{b^2}{(a+b)^2} = \frac{m}{m+n} \qquad \ldots (IV)$$

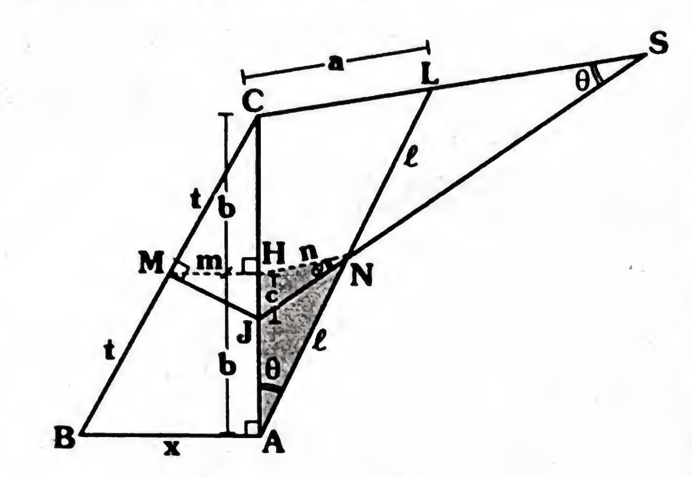
- Sumando (I) y (IV):

$$\frac{x}{a+b} + \frac{b^2}{(a+b)^2} = 1$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{a(a+2b)}{a+b}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 157



- En ⊿JMC, se traza la altura $\overline{MH}$.
- Por base media:
  - En ΔBAC: x = 2m y CH = HA = b
  - En ΔACL: a = 2n y $\overline{HN} // \overline{CL}$

  ⇒ m∢HNJ = m∢CSJ = θ

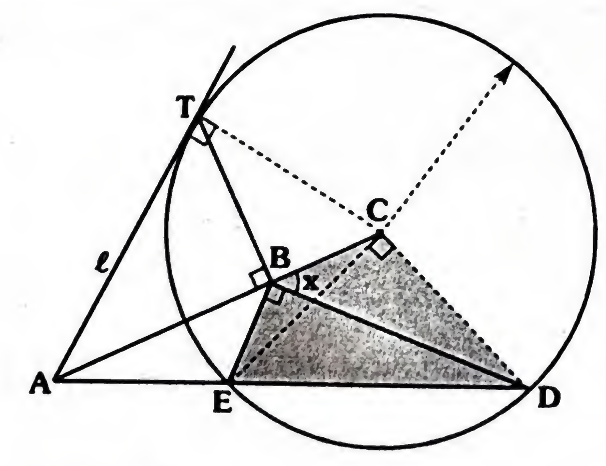
- En ΔAHN : $n^2 = cb$
- En ⊿JMC: $m^2 = cb$

  } m = n

∴ **x = a**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 158



- Piden: x
- En ⊿ATC: $\ell^2 = (AB)(AC)$ ... (I)
- Por teorema de la tangente:

  $\ell^2 = (AE)(AD)$ ... (II)

- De (I) y (II), tenemos:

  (AB)(AC) = (AE)(AD)

  ⇒ ⏢ EBCD es inscriptible

  ⇒ m∢ECD = 90°

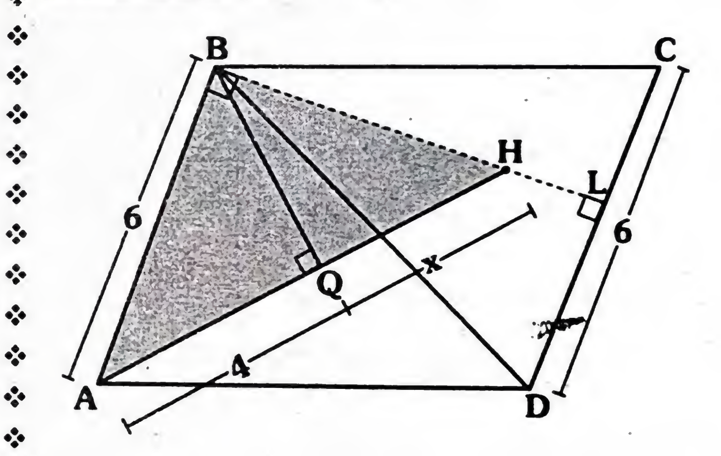
  ⇒ m∢CED = x

- En ⊿ECD: EC = CD

  ⇒ **x = 45°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 159



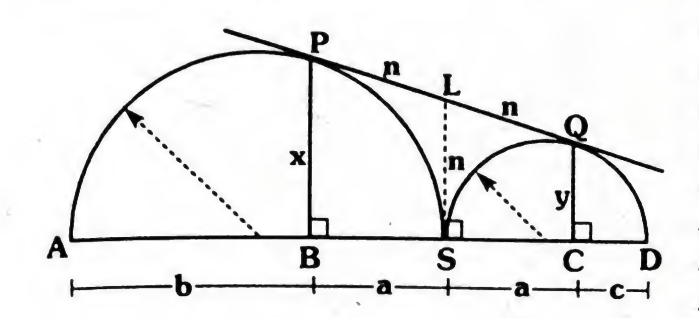
- Piden: x
- Como H es ortocentro entonces $\overline{BL}$ es altura, con ello m∢ABH = 90°.
- En ⊿ABH:

  $6^2 = 4(4 + x)$

  ∴ **x = 5**

Clave D

RESOLUCIÓN N° 160



- Piden $\frac{x}{y}$; Dato: $\frac{b}{c} = k$
- Se traza la tangente común en S, entonces : $LS = LP = LQ$.
- En ⊿ PBCQ, por base media (LS) entonces : $BS = SC = a$
- Por teorema en la semicircunferencia:

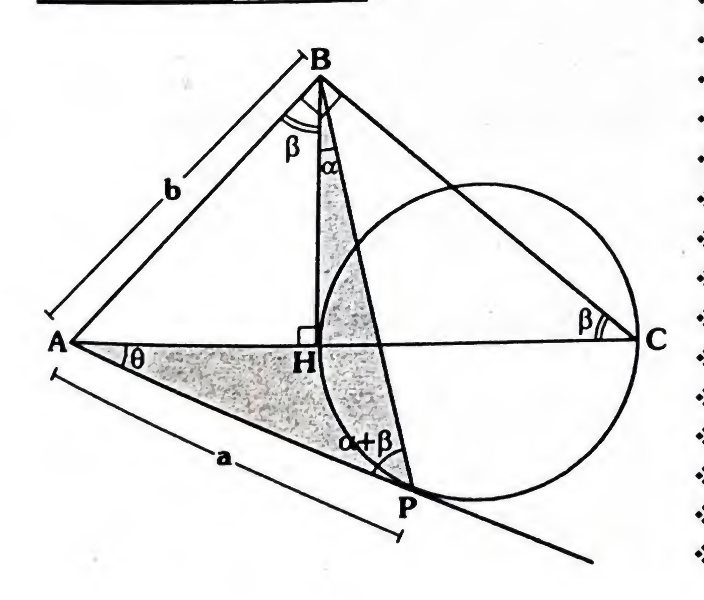
$$x^2 = ab$$

$$y^2 = ac$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{b}{c} \qquad \therefore \ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{k}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 161



- Piden la relación entre α, β y θ.
- En ⊿ABC:

$$b^2 = (AH)(AC) \qquad \ldots (I)$$

- En la circunferencia por teorema de la tangente:

$$a^2 = (AH)(AC) \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $a = b$

$$\Rightarrow \Delta PAB \text{ es isósceles}$$

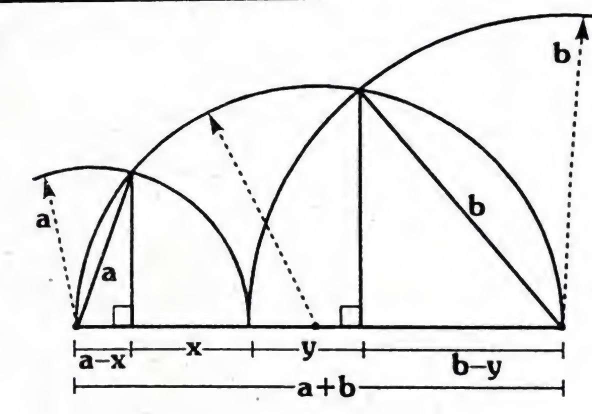
$$\Rightarrow m\sphericalangle APB = \alpha + \beta$$

- En ⊿APBH:

$$\mathbf{2\alpha + \beta + \theta = 90^o}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 162



- Piden $\frac{x}{y}$
- Por teorema en la semicircunferencia:

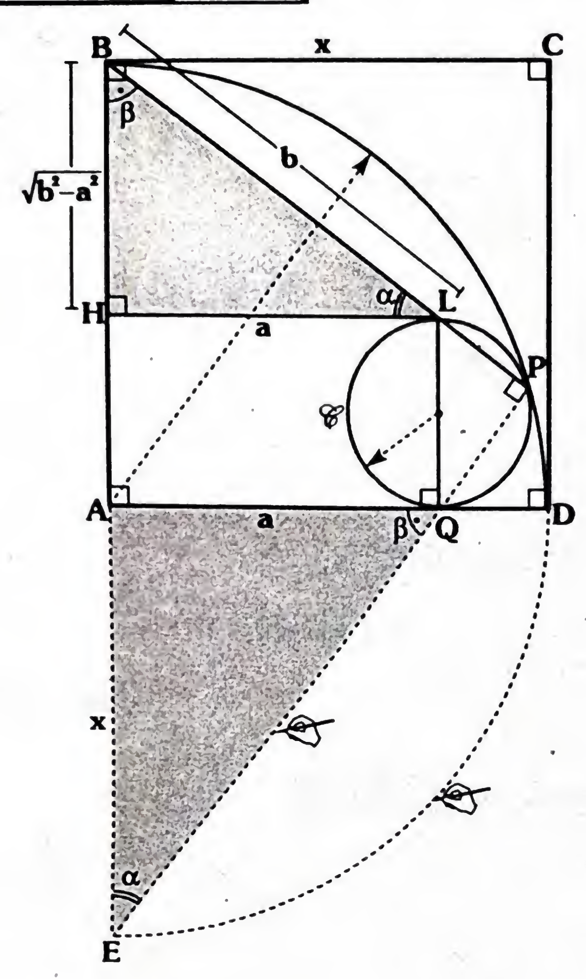
$$a^2 = (a - x)(a + b) \Rightarrow x = \frac{ab}{a + b}$$

$$b^2 = (b - y)(a + b) \Rightarrow y = \frac{ab}{a + b}$$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{1}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 163

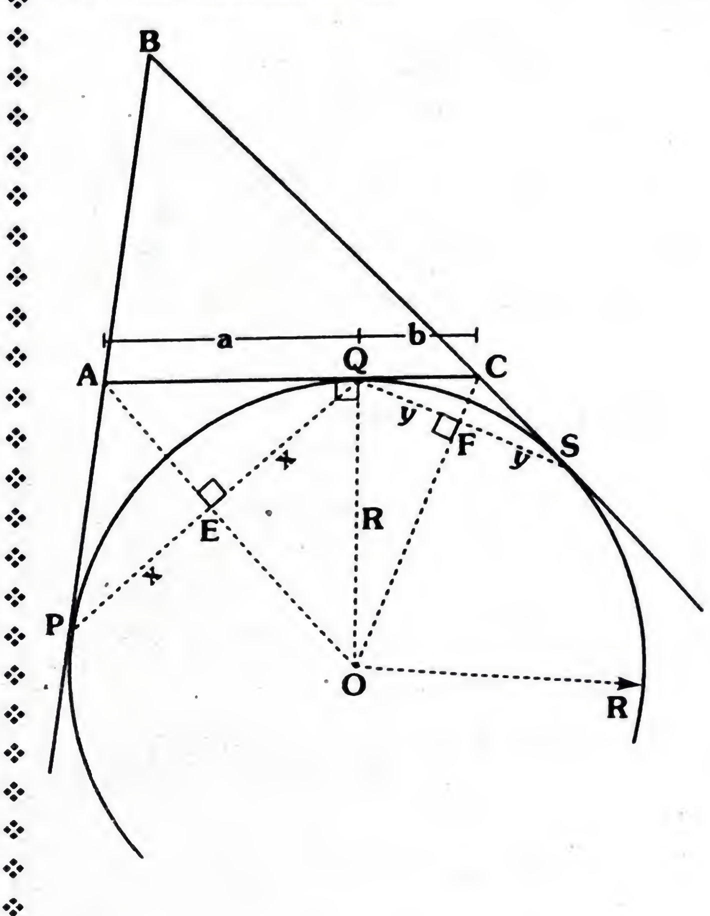


- Nos piden: x
- Se completa la circunferencia, por propiedad al prolongar $\overline{PQ}$ llega a E.
- Con ello $m\measuredangle BPE = 90° \Rightarrow \overline{LQ}$ es diámetro de $\mathscr{C}$.
- Se traza $\overline{LH} \perp \overline{EB}$
- En ⊿LHB: $HB = \sqrt{b^2 - a^2}$
- ⊿EAQ ~ ⊿LHB: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

$$\therefore\ \mathbf{x = \dfrac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 164



- Piden x
- Dato: $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = k\left[\dfrac{1}{(PQ)^2} - \dfrac{1}{(QS)^2}\right]$
- Por teorema en la circunferencia: $\overline{AO} \perp \overline{PQ}$, $\overline{OC} \perp \overline{QS}$, $PE = EQ$ y $QF = FS$
- $PQ = 2x$ y $QS = 2y$, del dato:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{k}{4}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right] \quad \ldots \text{(I)}$$

- En ⊿AQO y ⊿QFC:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \ldots \text{(II)}$$

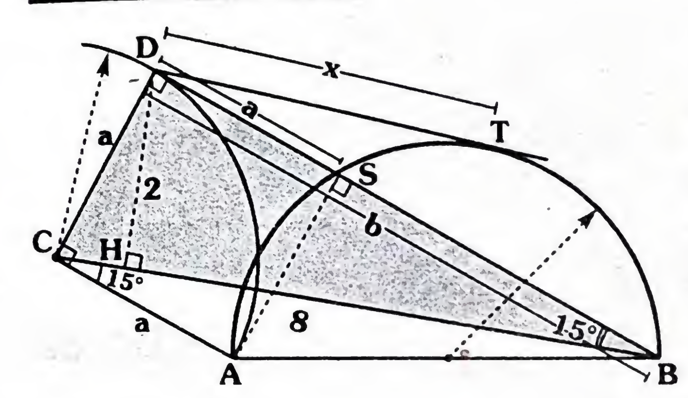
- De (I) y (II), tenemos:

$$\frac{k}{4}=1$$

$$\therefore\ \mathbf{k=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 165



- Nos piden: x
- Se traza $\overline{AS}$ $\Rightarrow$ mASB = 90°

$\Rightarrow$ CDSA : cuadrado

- Por teorema de la tangente:

$$x^2=ab \qquad \text{... (I)}$$

- En ⊿CDB, por teorema:

$$BC=4(DH)\ \Rightarrow\ DH=2$$

- Por teorema:

$$ab=8(2)$$

$$ab=16$$

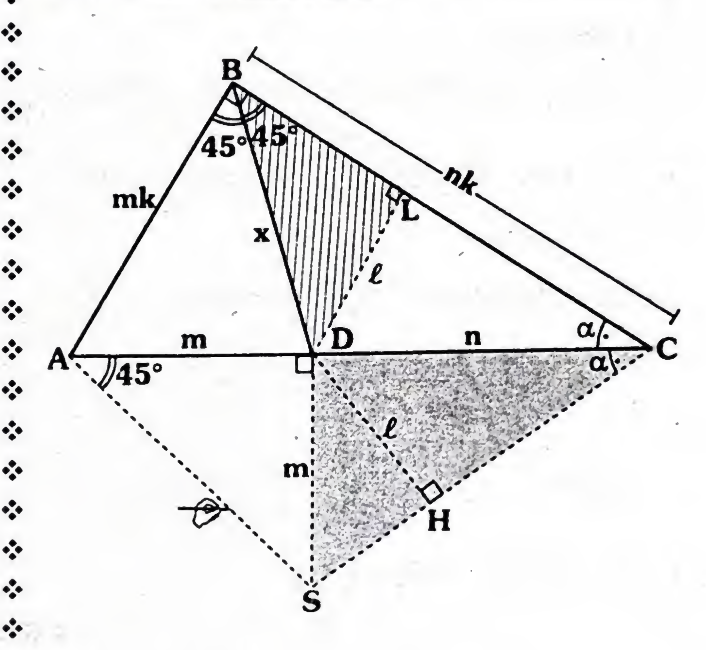
- Por (I):

$$x^2=16$$

$$\therefore\ \mathbf{x=4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 166



- Nos piden x
- El dato se puede escribir asi:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \qquad \text{... (I)}$$

- Se traza $\overline{AS}$ tal que $\overline{SD}\perp\overline{AC}$ y m∢SAD = 45°.
- Los ⊿ABC y ⊿SDC son semejantes

$\Rightarrow$ m∢ACB = m∢DCS = α

- En el ⊿SDC:

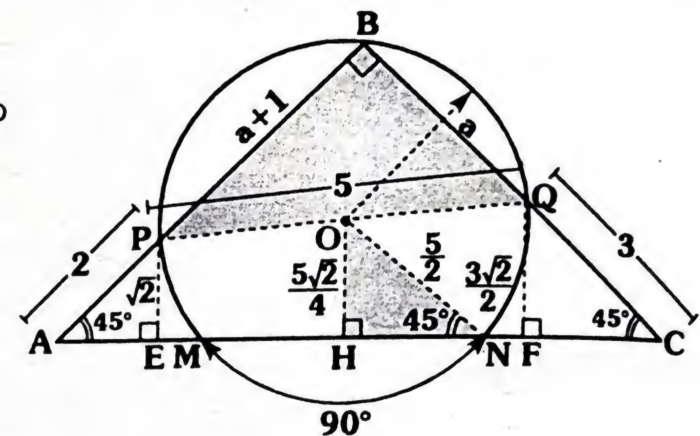
$$\frac{1}{\ell^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II): $\ell=\sqrt{2}$
- Por teorema de la bisectriz $DL=\sqrt{2}$.
- ⊿DLB: notable de 45°

$$\therefore\ \mathbf{x=2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 167



- Piden AC
- Como m∢PBQ = 90° ⇒ $\overline{PQ}$ es diámetro
- Se traza $\overline{PE}$, $\overline{OH}$ y $\overline{QF}$ perpendiculares a $\overline{AC}$.
- En el trapecio EPQF, por base media:

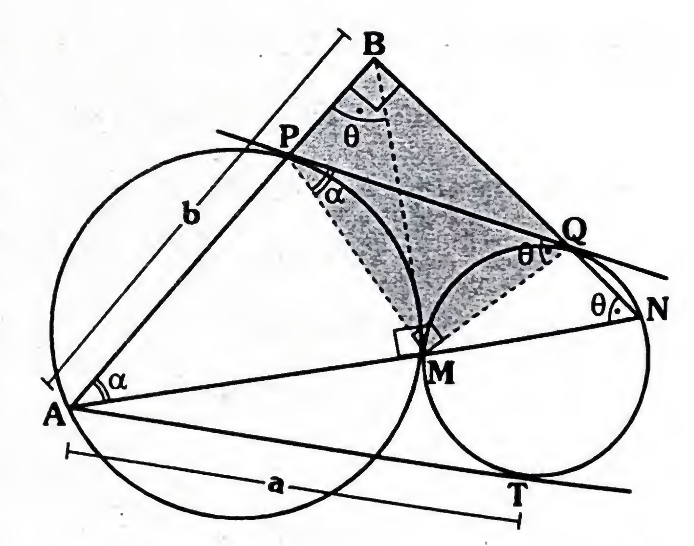
$$OH = \frac{PE + QF}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

- ⊿OHN: $ON = \frac{5}{2} \Rightarrow PQ = 5$
- ⊿PBQ: $a^2 + (a+1)^2 = 5^2 \Rightarrow a = 3$
- En ⊿ABC: AB = 6

$$\therefore\ \mathbf{AC = 6\sqrt{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 168



- Nos piden: $\frac{b}{a}$
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = (AM)(AN) \qquad \ldots \text{(I)}$$

- Por teorema en la circunferencia:

  –m∢PMQ = 90°

  –m∢PAM = m∢MPQ = α y

  m∢QNM = m∢MQP = θ

- Como α + θ = 90° ⇒ m∢ABC = 90°, luego el ⌂MPBQ: inscriptible ⇒ m∢PBM = θ entonces para el ⊿ABN, $\overline{BM}$ es altura.
- En ⊿ABN: $b^2 = (AM)(AN)$ ... (II)
- De (I) y (II): a = b

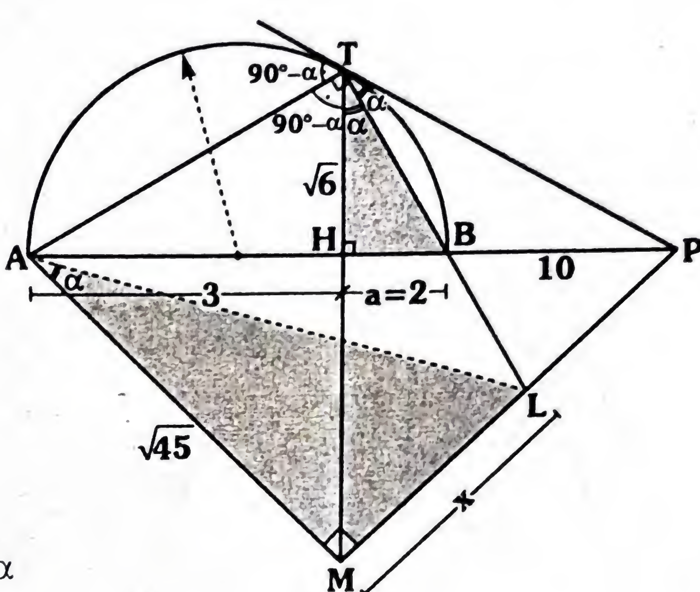
$$\therefore\ \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

Clave B

Resolución N° 169

- Piden: x
- Por teorema A, H, B y P forman cuaterna armónica:

$$\Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{13+a}{10} \Rightarrow a = 2$$



- En ⊿ATB:

$$(TH)^2 = (2)(3) \Rightarrow TH = \sqrt{6}$$

- En ⊿MAP:

$$(AM)^2 = (3)(15) \Rightarrow AM = \sqrt{45}$$

- ⏢ATLM: inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle MAL = \alpha$
- ⊿AML ~ ⊿THB $\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{30}}$$

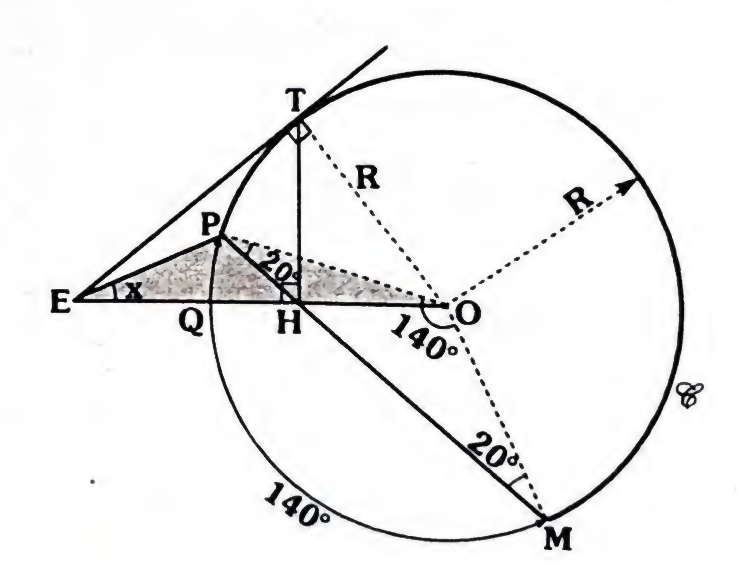
Clave D

Resolución N° 170

- Nos piden: x
- En ⊿ETO: $R^2 = (OH)(EO)$ ... (I)
- ΔMOP : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MPO = 20°$
- Como $R^2 = (OH)(EO)$, en el ΔEPO, por teorema de semejanza:

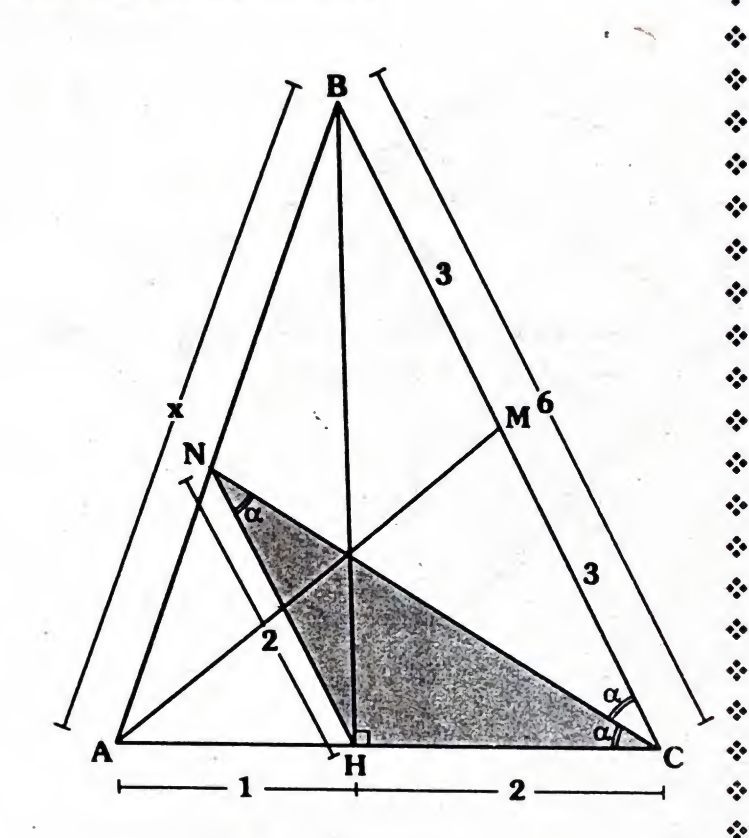
$$m\measuredangle OPH = m\measuredangle PEO$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 171



- Nos piden: x
- Por teorema de Ceva : como $\overline{AM}$ es mediana, entonces $\overline{HN} // \overline{CB}$.
- ΔHNC : isósceles

$$\Rightarrow \quad NH = HC = 2$$

- $\Delta AHN \sim \Delta ACB$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow BC = 6$$

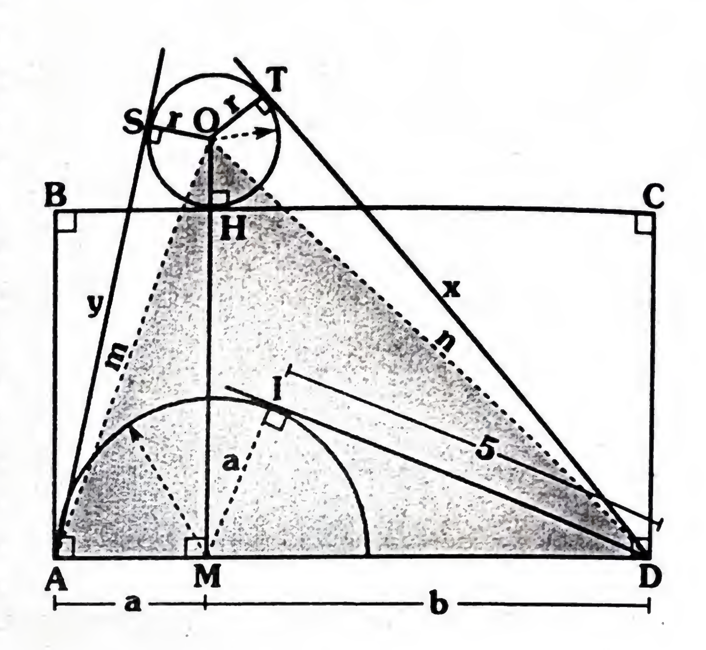
- Por teorema de las proyecciones:

$$x^2 - 6^2 = 1^2 - 2^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{33}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 172



- Piden : $x^2 - y^2$
- Dato: $ID = 5$
- En ΔAOD , por teorema de las proyecciones.

$$n^2 - m^2 = b^2 - a^2 \qquad \text{... (I)}$$

- En ⊿OTD, ⊿ASO y ⊿MID, tenemos:

$$n^2 = x^2 + r^2 \quad ;$$

$$m^2 = y^2 + r^2 \quad ;$$

$$b^2 - a^2 = 5^2$$

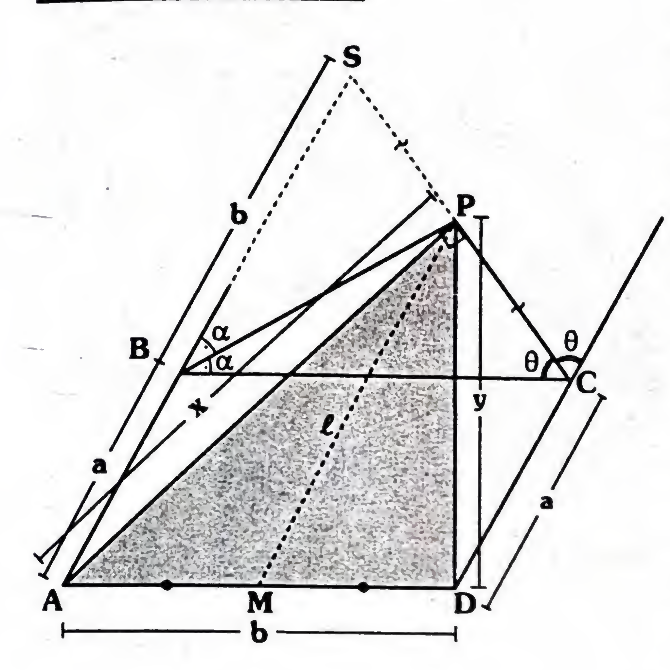
- Reemplazando en (I):

$$(x^2 + r^2) - (y^2 + r^2) = 25$$

$$\therefore \quad \mathbf{x^2 - y^2 = 25}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 173



- Piden: x^2+y^2
- Dato: $2a^2+b^2=10$ y $ab=3$
- Como $2\alpha+2\theta=180° \Rightarrow \alpha+\theta=90°$, entonces al prolongar $\overline{CP}$ y $\overline{AB}$ hasta que se corten en S, tendremos ΔBSC es isósceles

$$\Rightarrow BS=BC=b \quad y$$
$$CP=PS$$

- En el trapecio ASCD, se traza la base media

$$\overline{PM} \Rightarrow PM=\ell=\frac{2a+b}{2}$$

- En ΔAPD, por teorema de la mediana:

$$x^2+y^2=2\ell^2+\frac{b^2}{2}$$

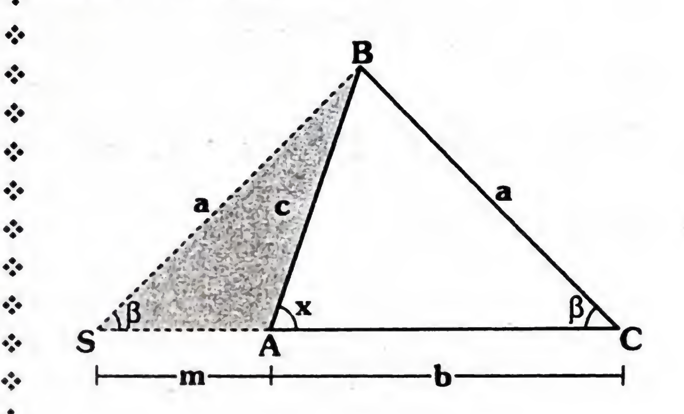
$$\Rightarrow x^2+y^2=2\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{2}$$

$$x^2+y^2=\underbrace{2a^2+b^2}_{10}+2\underbrace{ab}_{3}$$

$$\therefore \mathbf{x^2+y^2=16}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 174



- Piden: x
- Dato: $a^2-c^2=cb$
- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta S, tal que:

$$m\measuredangle BSC=m\measuredangle BCA=\beta$$
$$\Rightarrow \quad SB=a$$

- En ΔSBC, que es isósceles usemos el teorema de Stewart

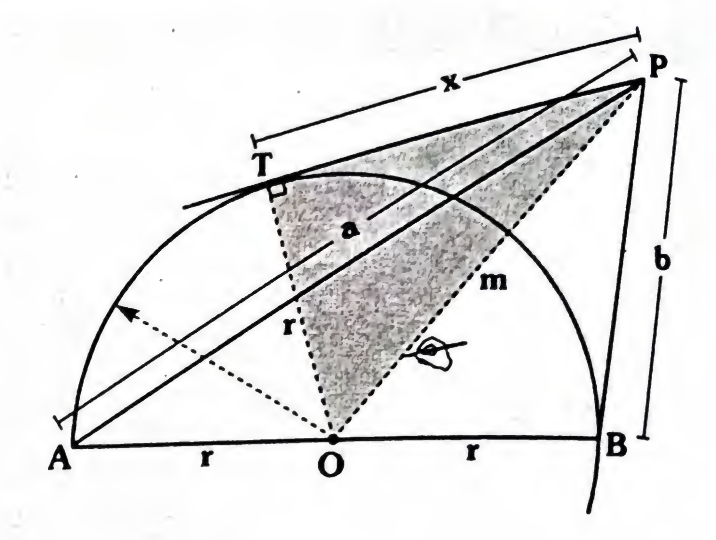
$$\underbrace{a^2-c^2}_{cb}=mb$$
$$\Rightarrow \quad m=c$$

$\Rightarrow$ ΔSBA es isóseles $\Rightarrow m\measuredangle ABS=\beta$

$$\therefore \mathbf{x=2\beta}$$

Clave C

Resolución Nº 175



- Piden x
- Dato: $a^2+b^2-4r^2=8$
- En ⊿OTP: $x^2=m^2-r^2$ ... (I)
- En $\triangle$APB, $\overline{OP}$ es mediana, por teorema;

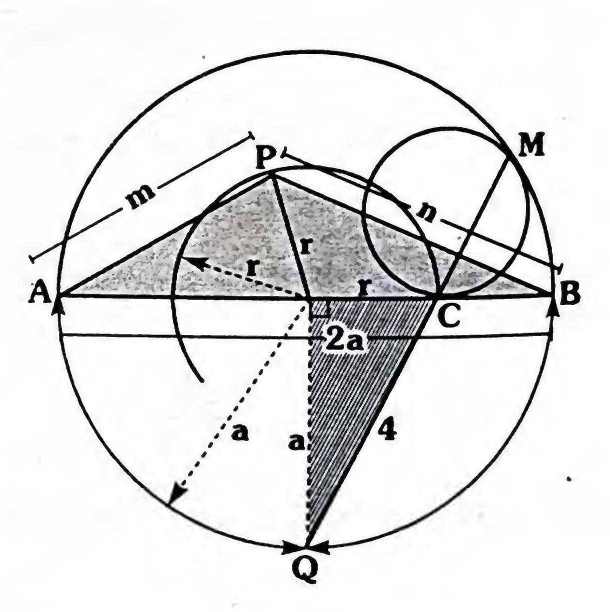
$$a^2+b^2=2m^2+\frac{(2r)^2}{2} \qquad \text{... (II)}$$

- Del dato y (II): $2m^2+2r^2-4r^2=8 \Rightarrow m^2-r^2=4$
- En (I): $x^2=4$

$$\therefore\ \mathbf{x=2}$$

Clave B

Resolución Nº 176



- Piden: m^2+n^2
- Por teorema de circunferencia:

$$m\widehat{AQ}=m\widehat{QB}=90°$$

- En $\triangle$APB, teorema de la mediana:

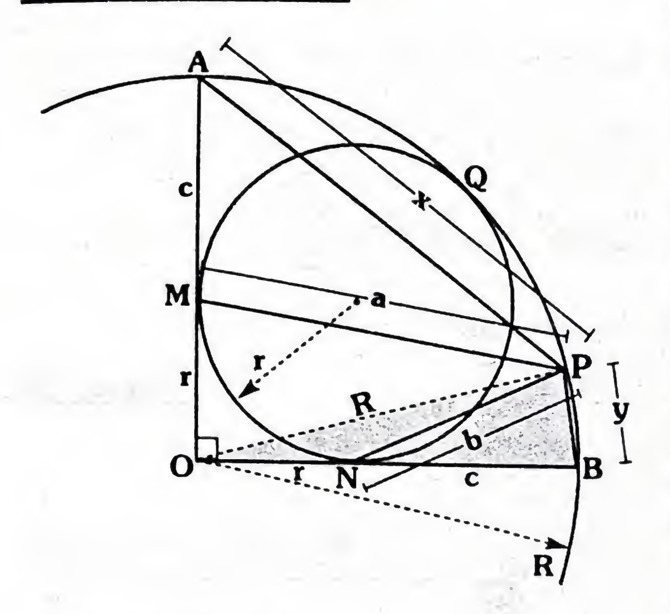
$$m^2+n^2=2r^2+\frac{(2a)^2}{2}=2(r^2+a^2) \qquad \text{... (I)}$$

- En ⊿QOC: $a^2+r^2=16$
- En (I): $m^2+n^2=2(16)$

$$\therefore\ \mathbf{m^2+n^2=32}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 177



- Piden: $x^2 - y^2$
- Dato: $a^2 - b^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$
- Del gráfico: $R = r + c$; por teorema del circunferencia:

$$R = r(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow \quad c = r\sqrt{2}$$

- Por teorema de Stewart:

– $\Delta AOP : R^2c + x^2r = a^2R + crR \quad \ldots \text{(I)}$

– $\Delta BOP : R^2c + y^2r = b^2R + crR \quad \ldots \text{(II)}$

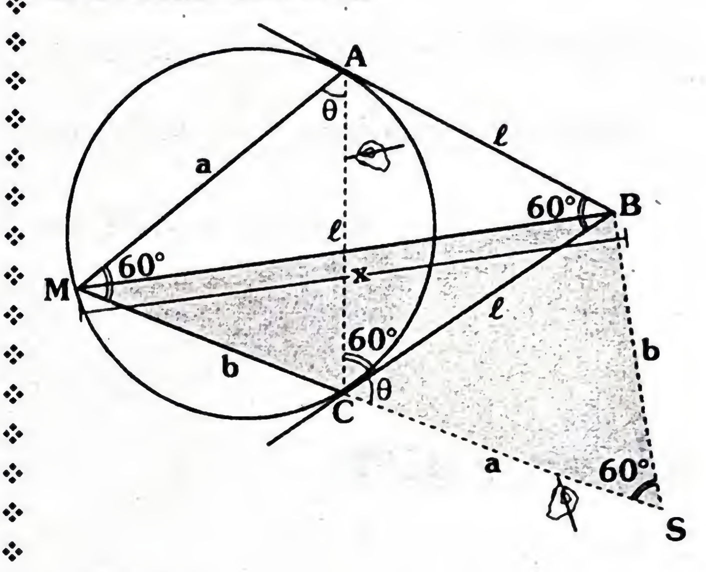
- Restando (I) y (II):

$$r(x^2 - y^2) = \underbrace{R}_{r(\sqrt{2}+1)} \underbrace{(a^2 - b^2)}_{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$\therefore \ \mathbf{x^2 - y^2 = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 178



- Piden: x
- ΔABC equilátero.
- Prolongamos $\overline{MC}$ tal que $CS = a$

$\Rightarrow \quad \Delta AMC \cong \Delta CSB$ (LAL)

$\Rightarrow \quad BS = b$ y $m\sphericalangle CSB = 60°$

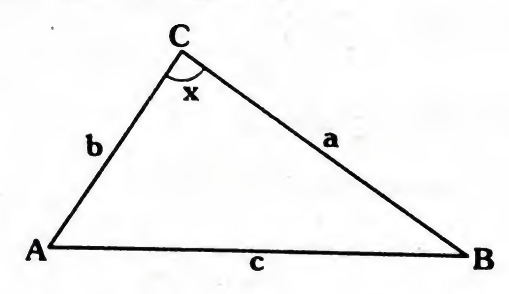
- En ΔMSB por teorema de cosenos:

$$x^2 = (a + b)^2 + b^2 - 2b(a + b)\cos 60°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 179



- Dato: $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$

$x > 90°$

- Piden: x
- Por teorema de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x \Rightarrow 2ab\cos x = a^2 + b^2 - c^2$
- Elevando al cuadrado: $4a^2b^2\cos^2 x = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2$
- Usando el dato, nos queda: $4\cancel{a^2b^2}\cos^2 x = 2\cancel{a^2b^2} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Como "x" es "obtuso": $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{x = 135^\circ}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 180

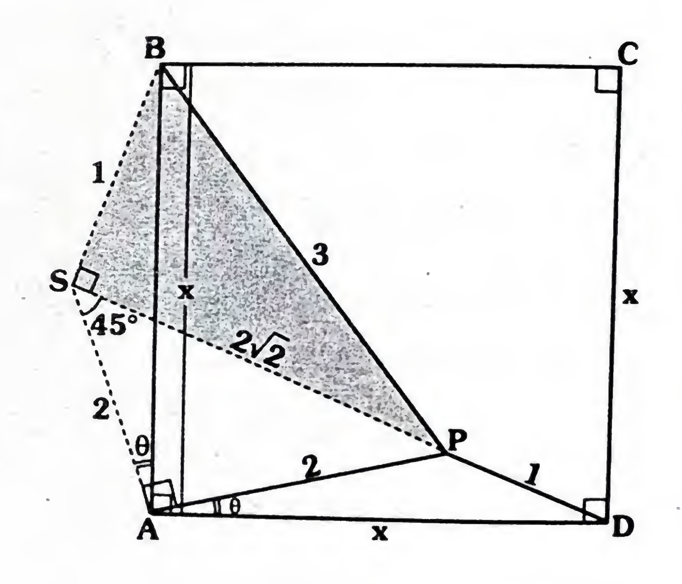
- Piden: x
- Se traza $\overline{AS}$ tal que $\overline{SA} \perp \overline{AP}$

  y $AS = AP \Rightarrow \Delta DAP \cong \Delta BAS \Rightarrow SB = 1$
- Como $(BP)^2 = (SB)^2 + (SP)^2$

  $\Rightarrow m\measuredangle BSP = 90^\circ$
- En ΔASB, por teorema de cosenos:

  $x^2 = 2^2 + 1^2 - 2(2)(1)\cdot\cos 135^\circ$

  $\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}$



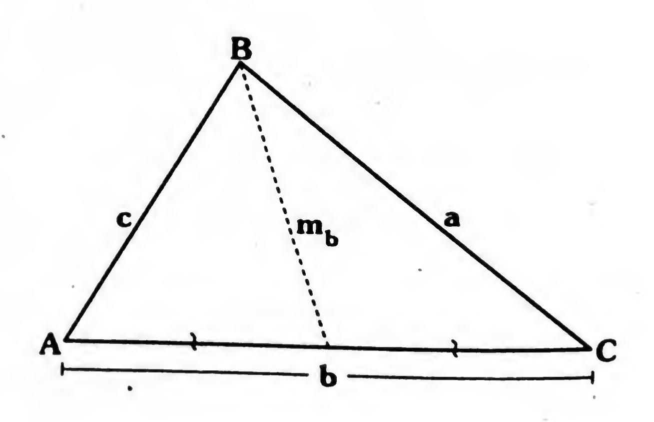
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 181

- Nos piden: $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{(m_a)^4 + (m_b)^4 + (m_c)^4}$
- Analicemos para m_b.
- Por teorema de la mediana:

  $a^2 + c^2 = 2(m_b)^2 + \dfrac{b^2}{2}$

  $\Rightarrow\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4(m_b)^2$



- Elevando al cuadrado: $4a^4 + 4c^4 + b^4 + 4a^2c^2 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2 = 16(m_b)^4$
- Análogamente para (m_c) y (m_a): $4b^4 + 4c^4 + a^4 + 4b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2 = 16(m_a)^4$

$$4a^4 + 4b^4 + c^4 + 4a^2b^2 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 = 16(m_c)^4$$

- Sumando las tres expresiones: $9(a^4 + b^4 + c^4) = 16(m_a^4 + m_b^4 + m_6^4)$

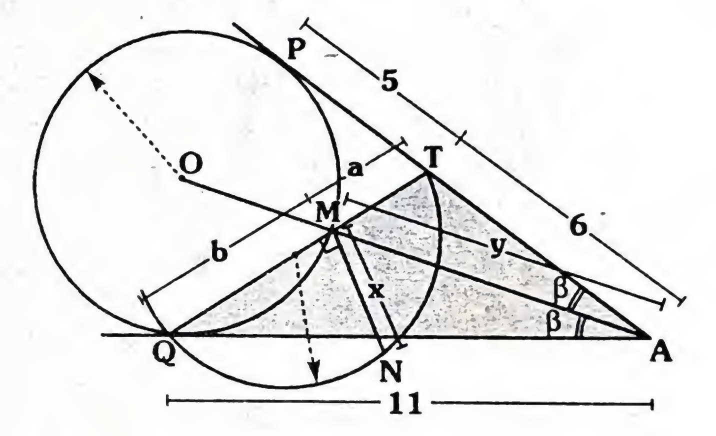
$$\therefore \ \frac{\mathbf{a^4 + b^4 + c^4}}{\mathbf{m_a^4 + m_b^4 + m_c^4}} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 182

- Nos piden $x^2 + y^2$
- Por teoremas de circunferencia: $\overrightarrow{AO}$ es bisectriz del $\measuredangle QAP$ y $AQ = AP$
- En ΔAQT, por teorema del cálculo de la bisectriz:

$$y^2 = (11)(6) - ab \qquad \ldots \text{(I)}$$



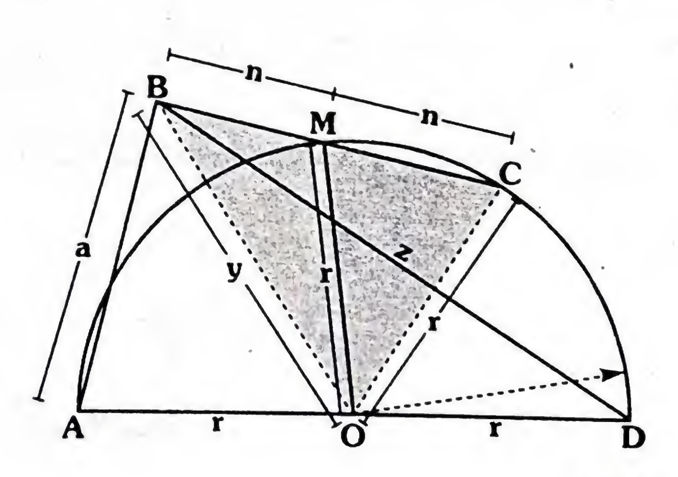
- En la semicircunferencia: $x^2 = ab$ ...(II)
- De (I) y (II): $\mathbf{x^2 + y^2 = 66}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 183

- Piden: r
- Dato: $a^2 + z^2 - 4n^2 = 36$
- Notemos que en los triángulos BOC y ABD, $\overline{OM}$ y $\overline{BO}$ son medianas.
- Luego, por teorema del cálculo de la mediana:

$$\Delta BOC: \ y^2 + r^2 = 2r^2 + 2n^2 \qquad \ldots \text{(I)}$$



$\Delta ABD: \ a^2 + z^2 = 2y^2 + 2r^2 \qquad \ldots (II)$

- Sumando de la siguiente forma $2(I)+(II)$:

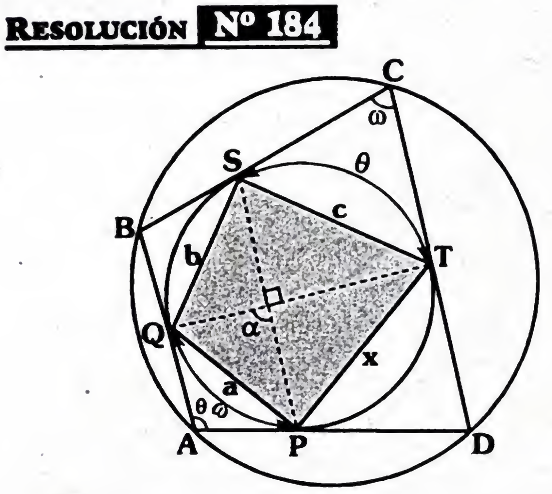
$$a^2 + z^2 = 4r^2 + 4n^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 + z^2 - 4n^2}_{36} = 4r^2$$

$$\therefore \ \mathbf{r = 3}$$

Clave E

Resolución Nº 184



- Nos piden: x
- En ⏢ABCD: $\omega + \theta = 180°$
- Por teorema de circunferencia:

$$m\overset{\frown}{PQ} = \omega \quad y \quad m\overset{\frown}{ST} = \theta$$

- Por ∢ interior:

$$\alpha = \frac{\omega + \theta}{2} = 90°$$

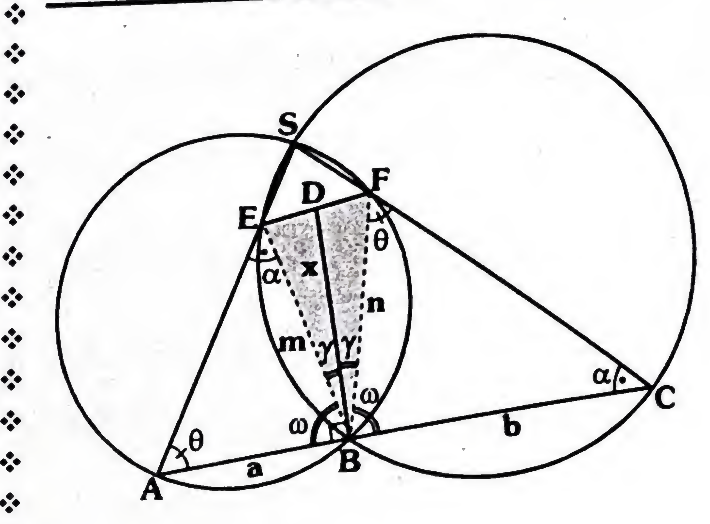
- Por teorema de Arquímedes en ⏢PQST:

$$x^2 + b^2 = a^2 + c^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}$$

Clave B

Resolución Nº 185



- Piden: x
- Dato: $ab - (ED)(DF) = k$
- Al completar ángulos en ⏢BESC y ⏢ASFB, los cuales son inscritos

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle BFC$$

$$m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle BEA$$

- $\overline{BD}$ es bisectriz interior del ΔBEF :
- $\Delta AEB \sim \Delta FCB$:

$$\frac{a}{n} = \frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow ab = mn$$

- Por teorema:

$$x^2 = \underbrace{mn}_{ab} - (ED)(OF)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{k}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 186

- Nos piden LC
- Dato: $m + n = \ell$
- Trazamos la mediana PR en el triángulo SPC $\Rightarrow$ SR = RC = RP = a
- En el ΔSLC , $\overline{RQ}$ es base media

$$\Rightarrow LC = 2x \qquad ...(I)$$

- En $\triangle$SPC: $SP = 2a\,sen\alpha$
- Como el $\square$QPRS resulta ser inscriptible, por el teorema de Ptolomeo:

$$x(2\not{a}\,sen\alpha) = \not{a}m + \not{a}n$$

$$2x sen\alpha = m + n = \ell \Rightarrow 2x = \ell \csc\alpha$$

$$\therefore \; \mathbf{LC = \ell csc\alpha}$$

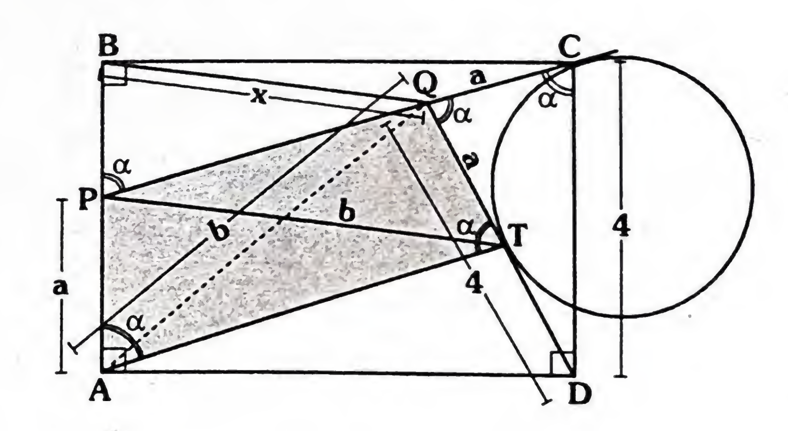
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 187

- Nos piden: x
- Dato: $a^2 + b^2 = 41$
- ΔDQC : isósceles $\Rightarrow$ DQ = CD = 4
- $\square$APQT: trapecio isósceles

$\Rightarrow$ PT = AQ = b y QT = a

- Por teorema de Marlen:

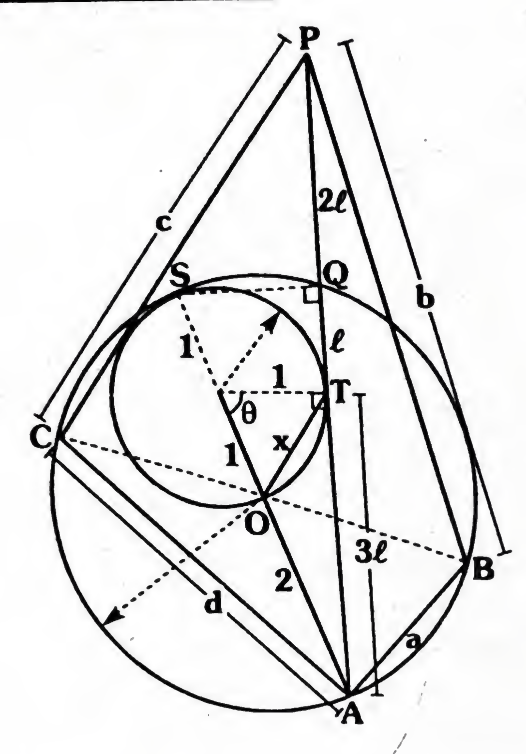


$$x^2 + 4^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{41}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 188



- Nos piden: $a^2+b^2+c^2+d^2$
- En $\triangle$ABPC, podemos usar el teorema Euler, pero nos faltaría hallar AP, BC y OT.
- $BC=4$, por ser diámetro
- $AP=2(AT)$, en el $\measuredangle$ATE:

$$AT=2\sqrt{2} \Rightarrow AP=4\sqrt{2}$$

- Pero OT; en el ΔEOT , usemos teoremas de cosenos:

$$x^2=1^2+1^2-2(1)(1)\underbrace{\cos\theta}_{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^2=\frac{4}{3}$$

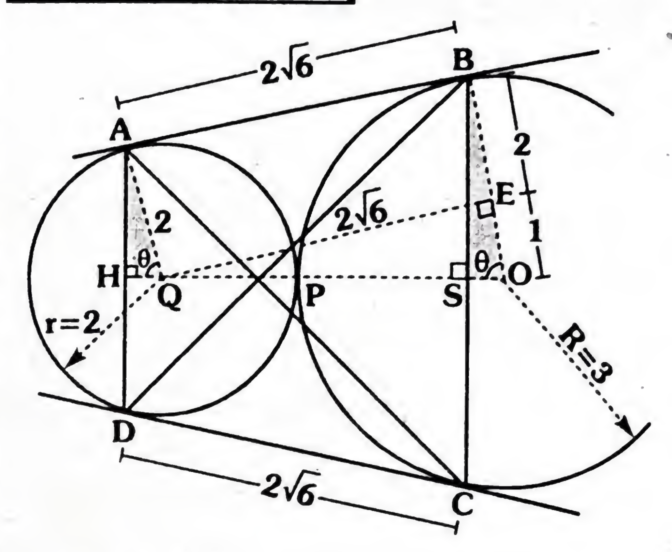
- En $\triangle$ABPC:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(4)^2+(4\sqrt{2})^2+4\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{160}{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 189



- Piden: AC
- Notamos que ABCD es un trapecio isósceles, para hallar AC, usemos el teorema de Ptolomeo, pero nos faltaría los lados.
- Por teorema de circunferencias tangentes:

$$CD=AB=2\sqrt{Rr}=2\sqrt{6}$$

- $\measuredangle QEO \sim \measuredangle BSO \sim \measuredangle AHQ$

$$*\ \frac{HA}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow HA=\frac{4}{5}\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{8}{5}\sqrt{6}$$

$$*\ \frac{SB}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow SB=\frac{6}{5}\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{12}{5}\sqrt{6}$$

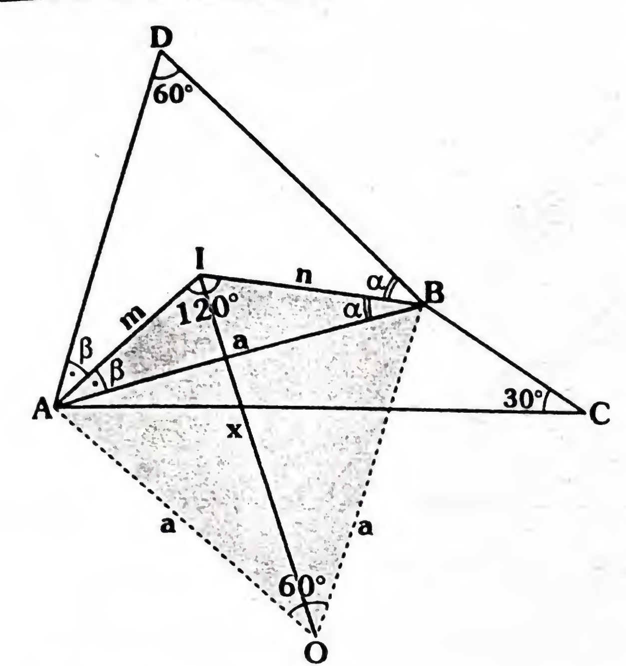
- Por teorema de Ptolomeo:

$$\underbrace{(AC)(BD)}_{(AC)^2}=(2\sqrt{6})(2\sqrt{6})+\left(\frac{8}{5}\sqrt{6}\right)\left(\frac{12}{5}\sqrt{6}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{AC=\frac{14}{5}\sqrt{6}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 190

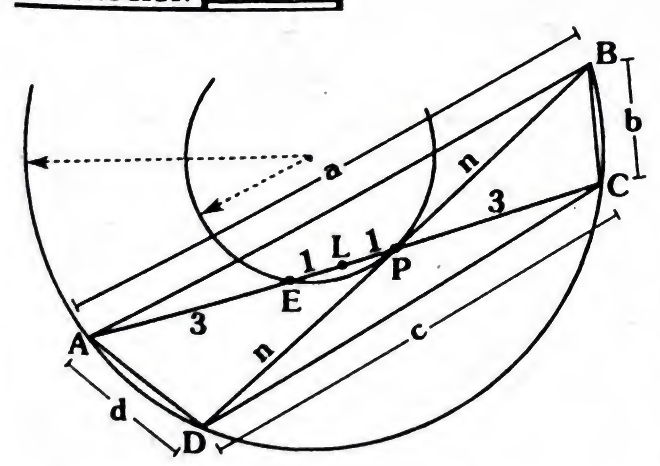


- Nos piden: x
- Como O es circuncentro del ΔABC $\Rightarrow m\measuredangle AOB = 60°$ y como $AO = OB$, ΔAOB es equilátero.
- En el ΔADB, como I es el incentro $\Rightarrow m\measuredangle AIB = 120°$.
- Luego ⏢AIBO es inscriptible, por teorema de Chadú:

$$\mathbf{x = m + n}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 191



- Nos piden: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- Por teorema de la cuerdas:

$$n \cdot n = 3(5) \Rightarrow n^2 = 15$$

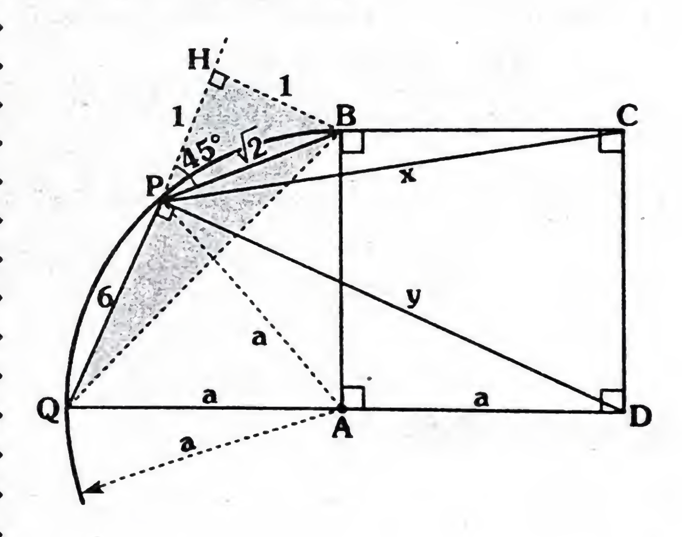
- Para el ⏢ABCD, L y P son puntos medios de las diagonales, por teorema de Euler:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \underbrace{(2n)^2}_{60} + \underbrace{(8)^2}_{64} + \underbrace{4(LP)^2}_{4}$$

$$\therefore\ \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 128}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 192



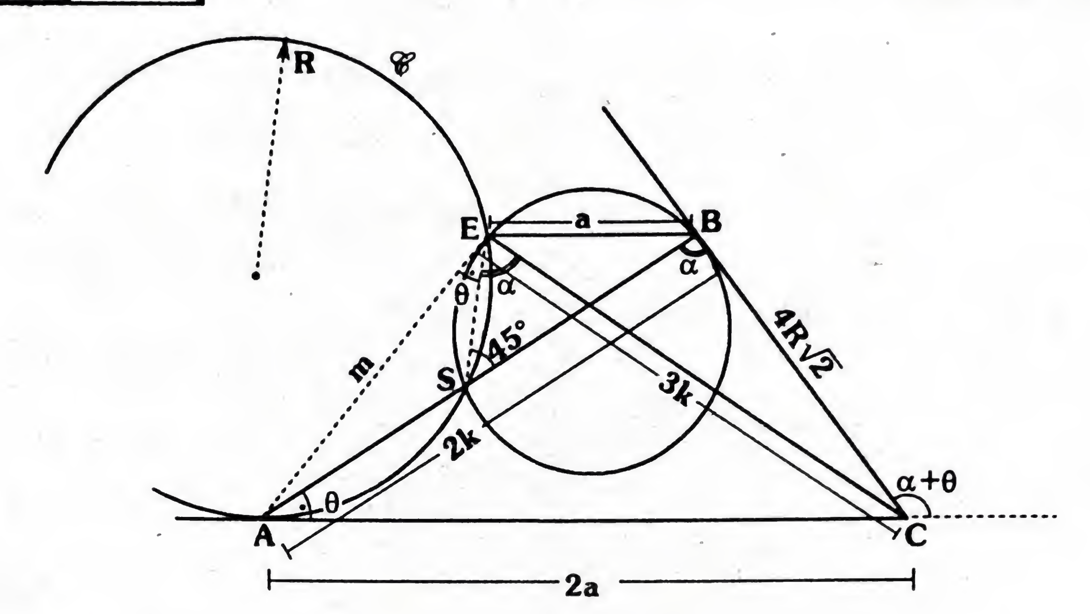
- Piden: x
- En ⊿QHB: $\underbrace{QB}_{a\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = 5$
- En ⊿QPD: $y = 8$
- En ABCD, usemos el teorema de Marlen:

$$x^2 + a^2 = (\sqrt{2})^2 + y^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{41}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 193



- Nos piden $m\widehat{EB}$
- Usemos el teorema de Viette (ya que el ⏢AEBC es inscriptible):

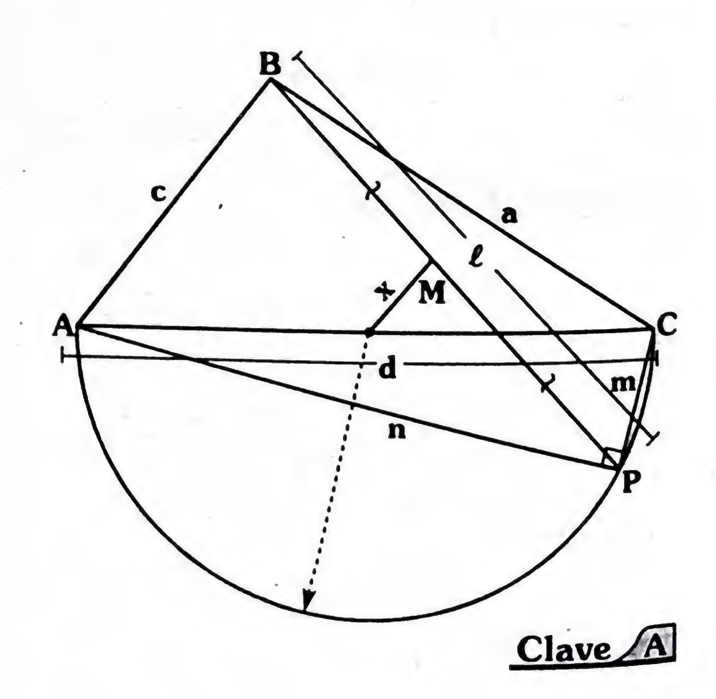
$$\frac{2\cancel{k}}{3\cancel{k}}=\frac{2\cancel{a}m+\cancel{a}\cdot 4R\sqrt{2}}{\cancel{a}m+2\cancel{a}(4R\sqrt{2})} \Rightarrow 2m+16R\sqrt{2}=6m+12R\sqrt{2} \Rightarrow R\sqrt{2}=m$$

- Luego en $\mathscr{C}$: $m\widehat{AE}=90°$ $\Rightarrow m\sphericalangle ESB=45°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{EB}=90°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 194



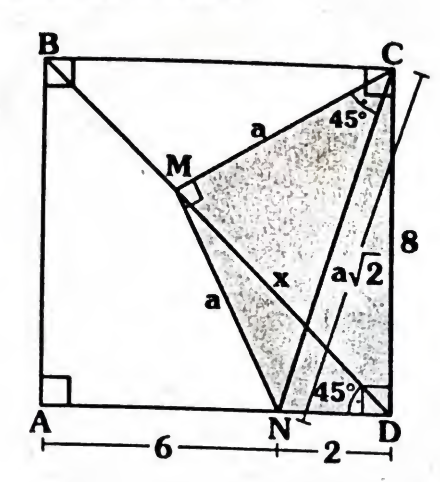
- Piden: x
- Por teorema de Euler:

$$a^2+c^2+\underbrace{m^2+n^2}_{d^2}=d^2+\ell^2+4x^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{\sqrt{a^2+c^2-\ell^2}}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 195



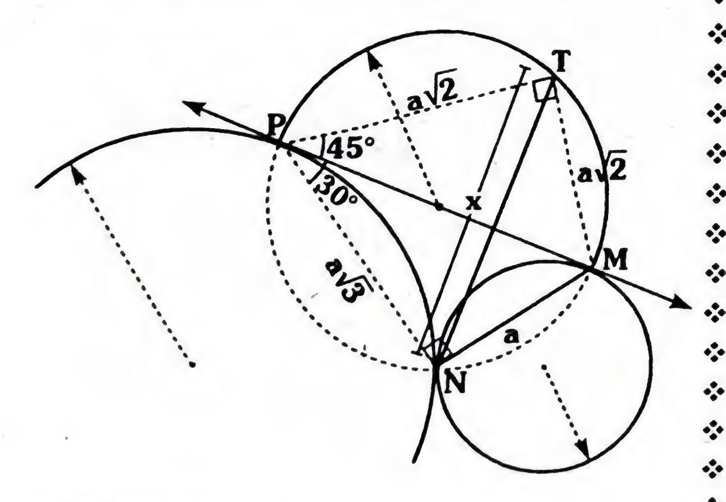
- Piden MD
- Sea MD=x
- Notemos que el ⌂NMCD es inscriptible
  $\Rightarrow m\sphericalangle NMC = 90°$
- ⊿NMC: notable de 45°
- En ⌂NMCD, por teorema de Ptolomeo

$$x\,a\sqrt{2} = 8a + 2a$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 5\sqrt{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 196



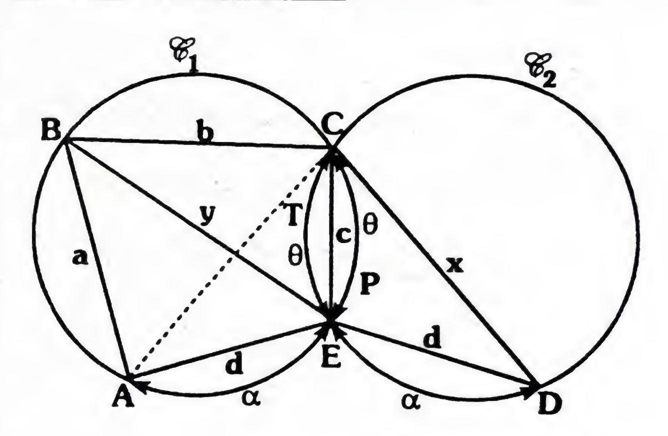
- Piden: x
- Por teorema: $m\sphericalangle PNM = 90°$
- ⌂PTMN: inscriptible
- ⊿PNM: notable de 30°
- ⊿PTM: notable de 45°
- Por teorema de Ptolomeo:

$$(2a)x = a(a\sqrt{2}) + (a\sqrt{2})(a\sqrt{3})$$

$$\therefore\ \mathbf{x = a\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 197

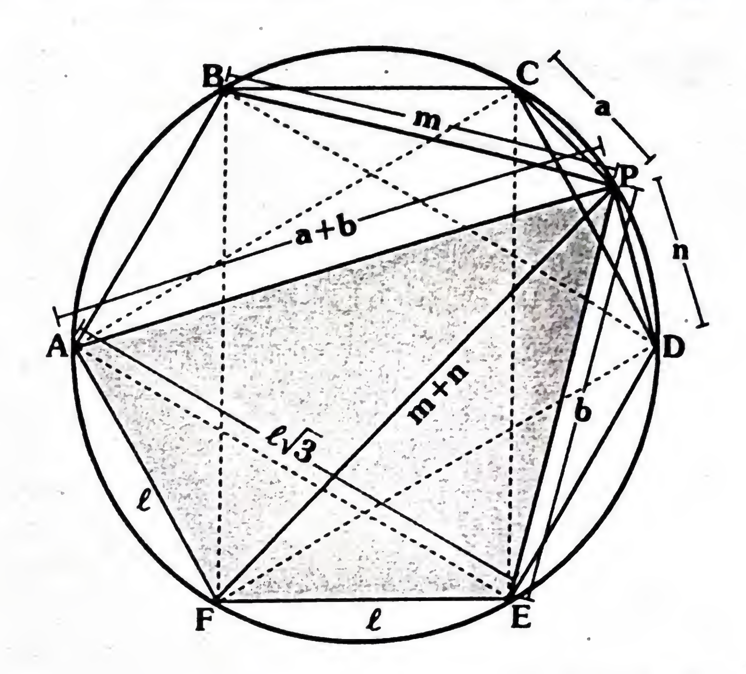


- Piden: xy
- Como $m\overset{\frown}{CTE} = m\overset{\frown}{CPE}$ $\Rightarrow$ $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$
- Como $m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{ED}$ $\Rightarrow$ AE=ED
- También: AC=CD=x
- En ⌂ABCE, por teorema de Viette:

$$\mathbf{\frac{x}{y} = \frac{bc + ad}{ab + cd}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 198



- Nos piden: $\dfrac{a+2b}{m+n}$
- Notemos que los Δ_sACE y BDF son equiláteros, por teorema de Chadú:

$$DA = a + b$$

$$DF = m + n$$

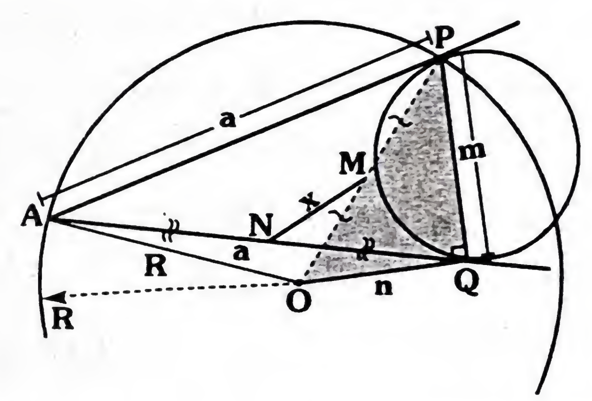
- En el ⌂ADEF: inscriptible

$$(a+b)\not{\ell} + \not{\ell}b = (m+n)\not{\ell}\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a+2b}}{\mathbf{m+n}} = \sqrt{\mathbf{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 199



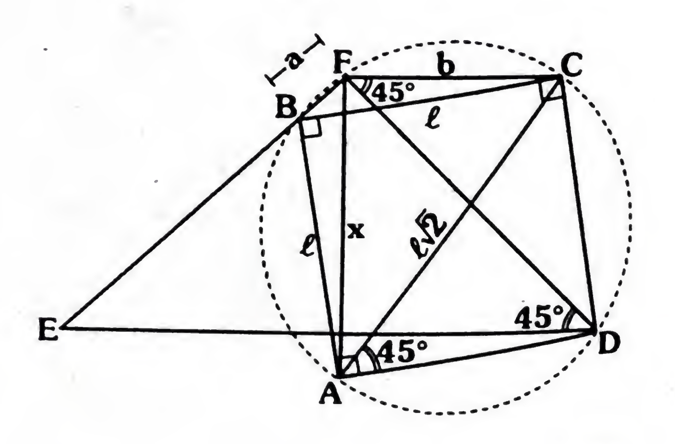
- Nos piden: x
- Consideremos que en el ⊿OQP: $n^2 + m^2 = R^2$
- En ⌂APQO, por teorema de Euler:

$$a^2 + \underbrace{m^2 + n^2}_{R^2} + R^2 = a^2 + R^2 + 4x^2$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{R}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 200



- Nos piden: x
- Dato: $a\sqrt{2} + b = 8$
- ⌂AFCD: inscriptible ⇒ A, B, F, C y D son concíclicos
- En ⌂ABFC, teorema de Ptolomeo:

$$x\ell = a\ell\sqrt{2} + b\ell$$

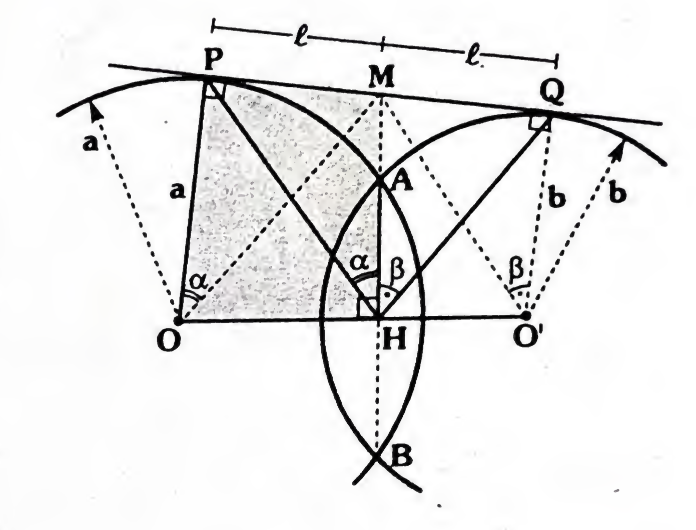
$$x = \underbrace{a\sqrt{2} + b}_{8} \qquad \therefore \mathbf{x = 8}$$

Clave C

Resolución Nº 201

- Piden $\dfrac{tg\alpha}{tg\beta}$
- Como referencia, al completar parte de las circunferencias, notemos que $\overline{AB}$ es la cuerda común $\Rightarrow PM = MQ$.
- ⏢OPMH y ⏢HMQO' : inscriptibles
- ⊿OPM : $tg\alpha = \dfrac{\ell}{a}$
- ⊿O'QM : $tg\beta = \dfrac{\ell}{b}$

$$\left.\begin{matrix} tg\alpha = \dfrac{\ell}{a} \\ tg\beta = \dfrac{\ell}{b} \end{matrix}\right\} \dfrac{tg\alpha}{tg\beta} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$



Clave B

Resolución Nº 202

- Piden x
- En ⊿MOC: $MC = a\sqrt{3}$
- Por teorema de la tangente:

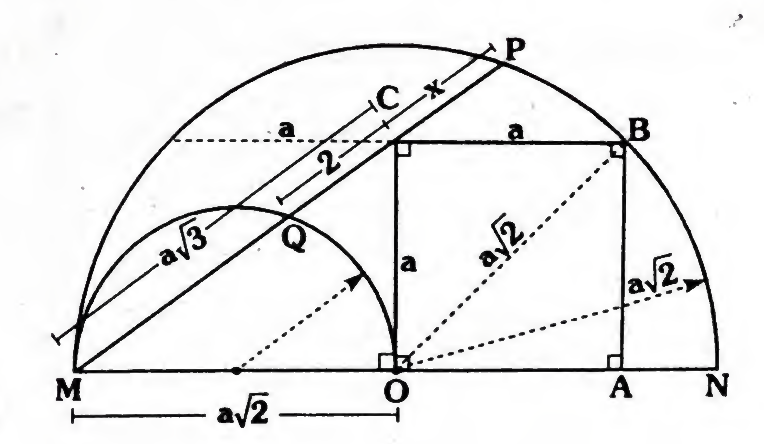
$$a^2 = 2(a\sqrt{3}) \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \quad \dots \text{(I)}$$

- Por teorema de las cuerdas:

$$a \cdot a = x(a\sqrt{3}) \Rightarrow a = x\sqrt{3} \quad \dots \text{(II)}$$

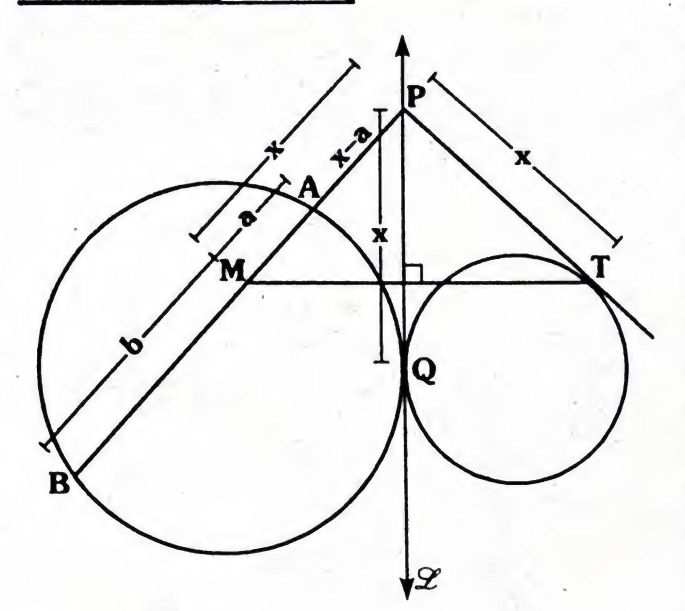
- De (I) y (II):

$$\mathbf{x = 2}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 203



- Piden: x
- Dato: $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{8}$
- Por teorema de la mediatriz:

$$PT = PM = x$$

- Por teorema de circunferencia:

$$PQ = PM = x$$

- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (x-a)(x+b)$$

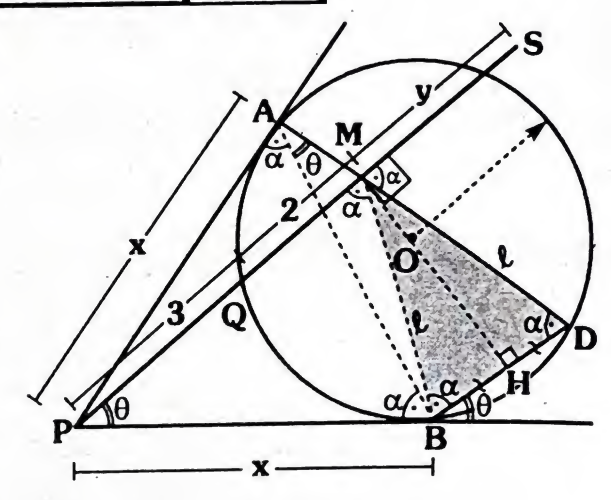
$$\Rightarrow ab = x(b-a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\underbrace{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}_{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 204



- Piden x
- Notemos primero que el ⌂PAMB es inscriptible, entonces: $m\measuredangle PMB = \alpha$
- ΔBMD : isósceles al trazar la altura $\overline{MH}$, se cumple $BH = HD$, entonces dicha altura contiene al centro

$$\Rightarrow\ \overline{OM} \perp QS\ \Rightarrow\ QM = MS = 2$$

- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = 3(7)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{21}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 205

- Piden m∢NAP
- Por teorema de la tangente:

$$\left.\begin{array}{l}(AP)^2 = \ell(2\ell)\\ (SM)^2 = \ell(2\ell)\end{array}\right\} AP = SM$$

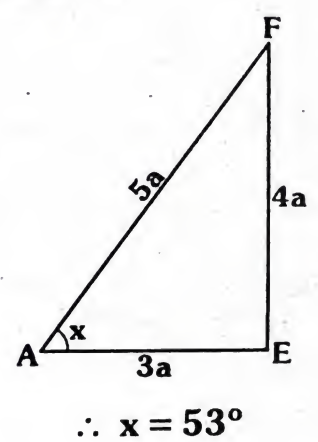
- Por teorema de circunferencia:

$$ES = EP = FM = FN = a$$

- Para $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, A es centro de homotecia(*) directa $\Rightarrow \overline{QB} // \overline{MN}$
- Por teoema de Tales:

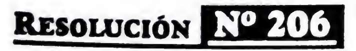
$$\frac{b}{2a+b} = \frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow b = 2a$$

- En el ΔAEF:

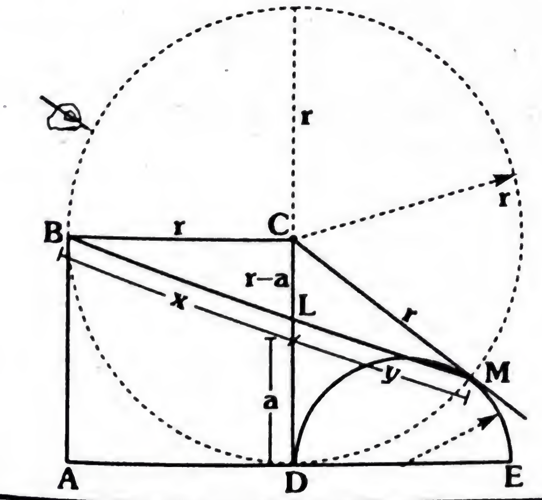


$\therefore$ **x = 53°**

Clave D



RESOLUCIÓN Nº 206



- Piden: xy
- Dato: $2ar - a^2 = k$
- Como CB = CD = CM, con centro en C y radio CD se traza la circunferencia.
- Por teorema de las cuerdas:

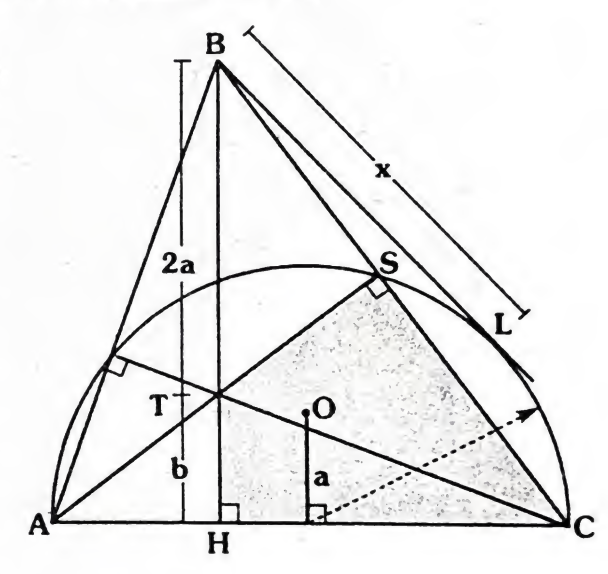
$$xy = a(2r - a)$$

$$xy = \underbrace{2ar - a^2}_{k}$$

$$\therefore\ \mathbf{xy = \sqrt{k}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 207



- Piden: x
- Sea O circuncentro del ΔABC, por dato OQ = a .
- Como T es ortocentro del:

$$\Delta ABC \Rightarrow TB = 2a$$

- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (BS)(BC) \qquad \ldots (I)$$

- En ⏢HTSC, por teorema de la secante

$$(BS)(SC) = 2a(2a + b) \qquad \ldots (II)$$

(*) Sobre el tema de Homotecia, ver algunas nociones en la publicación de Puntos Notables (pág. 170)

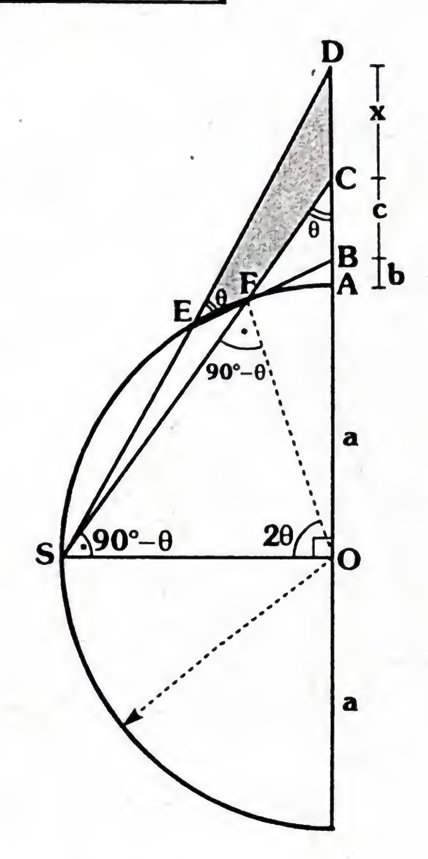
- De (I) y (II):

$$x^2 = 2a(2a+b)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{2a(2a+b)}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 208



- Nos piden x en función de a, b y c.
- Sea:

$m\measuredangle SOF = 2\theta \Rightarrow m\measuredangle SCO = \theta$ y

$m\measuredangle DEF = \theta$

- Luego el ⌂EDCF es inscriptible.
- Por teorema de la secante:

$(c)(c+x) = (BF)(BE)$ ... (I)

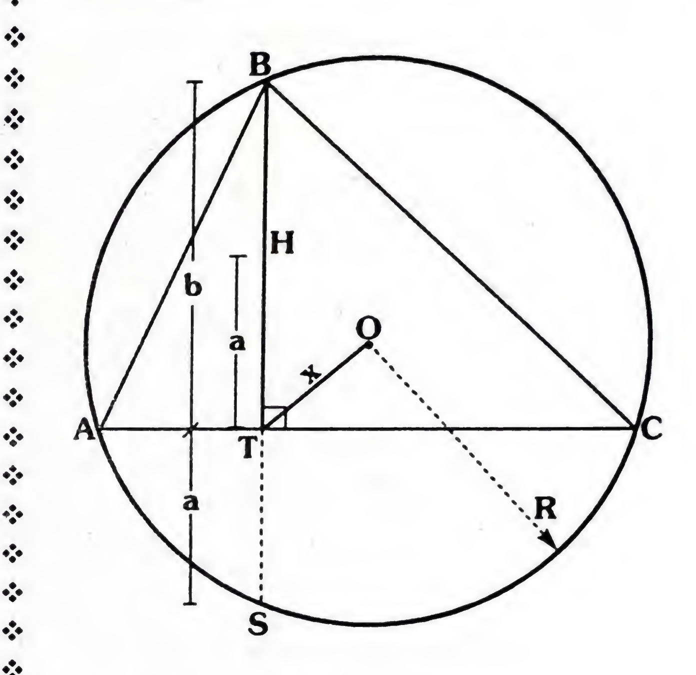
$(BF)(BE) = b(b+2a)$ ... (II)

- De (I) y (II):

$$\mathbf{x = \frac{2ab + b^2 - c^2}{c}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 209



- Nos piden: x
- Dato: $ab = k$
- Por teorema de puntos notables:

$$HT = TS = a$$

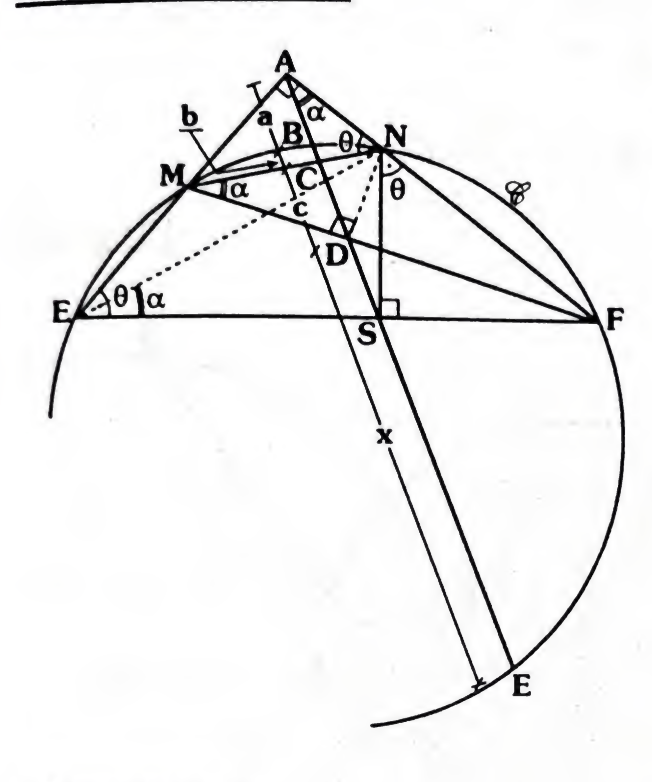
- Por la observación dada en el teorema de las cuerdas :

$$R^2 - x^2 = \underbrace{ab}_{k}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{R^2 - k}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 210



- Nos piden: x
- Notemos que el ⌂ESNA es inscriptible

$$\Rightarrow m\sphericalangle NEF = m\sphericalangle SAN = \alpha$$

- ⌂EMNF: inscrito $\Rightarrow m\sphericalangle NMF = \alpha$
- ⌂MAND: inscriptible, por teorema de las cuerdas:

$$(a + b)c = (MC)(CN) \qquad \dots (I)$$

- En $\mathscr{C}$, por teorema de las cuerdas:

$$(MC)(CN) = b(c + x) \qquad \dots (II)$$

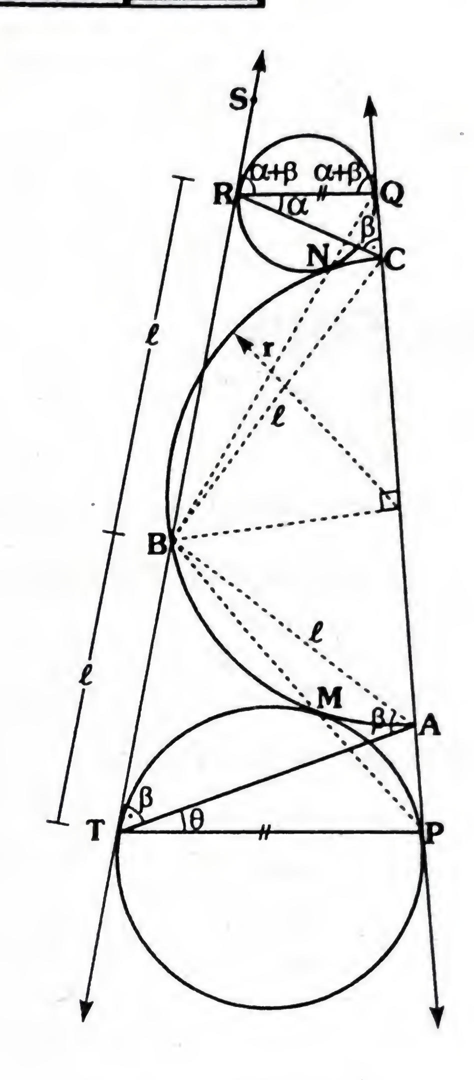
- De (I) y (II):

$$(a + b)c = b(c + x)$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{ac}{b}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 211



- Piden $\dfrac{\theta}{\alpha}$
- Por teorema (ver pág. 45)

$$BC = BR = r\sqrt{2}$$

$$BA = BT = r\sqrt{2}$$

- ⌂TRCA: inscriptible

$$\Rightarrow m\sphericalangle ATR = m\sphericalangle RCQ = \beta$$

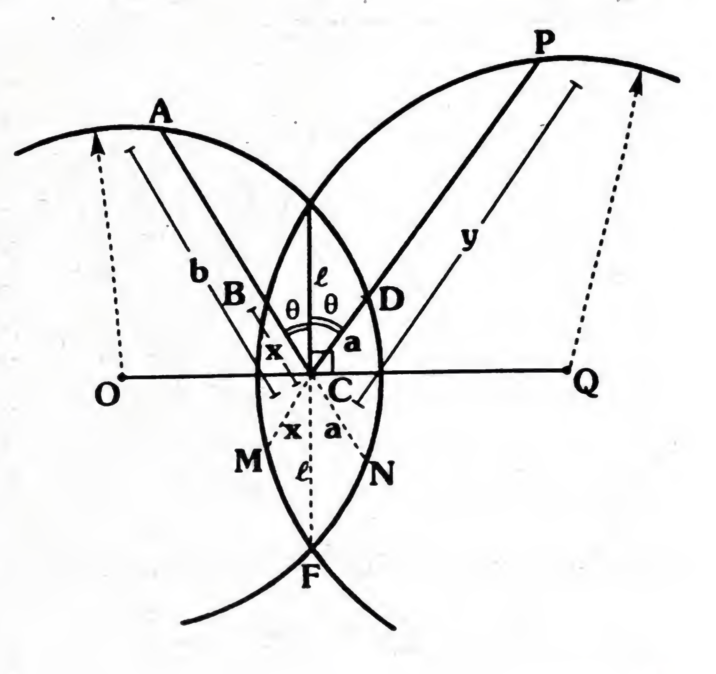
- ΔTBA : isósceles
- ⌂TRQP: trapecio isósceles

$$\Rightarrow \underbrace{m\measuredangle SRQ}_{\alpha+\not\beta} = \underbrace{m\measuredangle RTP}_{\not\beta+\theta}$$

$$\alpha + \not\beta = \not\beta + \theta \Rightarrow \frac{\theta}{\alpha} = 1$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 212



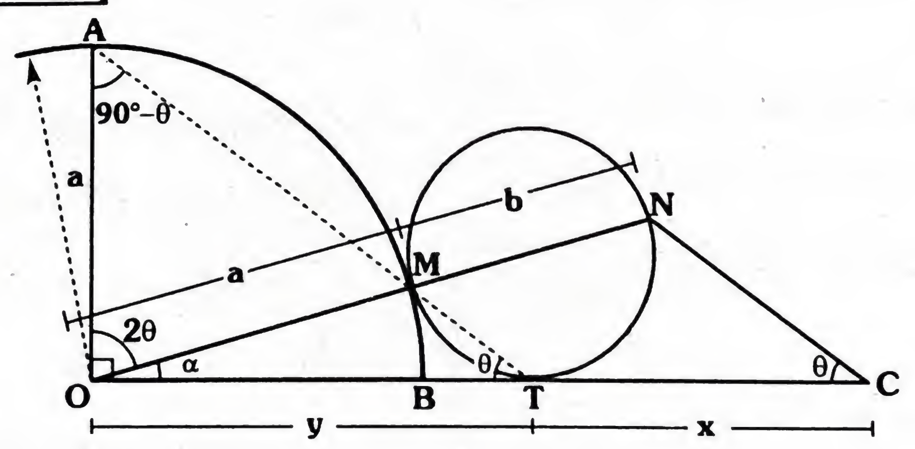
- Piden: $\frac{ba}{xy}$
- Completamos los arcos de circunferencia, notemos que $\overline{OQ} \perp \overline{EF}$ entonces E, C y F son colineales.
- Por simetría $BC = CM$ y $CD = CN$.
- Por teorema de las cuerdas:

$$ab = \ell^2 \Rightarrow xy = \ell^2$$

$$\therefore \frac{ab}{xy} = 1$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 213



- Piden: x
- Por teorema de circunferencia A, M y T son colineales

$$\Rightarrow m\measuredangle OTA = \theta \text{ y } m\measuredangle AOM = 2\theta$$

- Del dato: $m\measuredangle NCO = \theta \Rightarrow \overline{MT} \,//\, \overline{NC}$

- Por teorema de la tangente:

$$y^2 = a(a+b)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{a(a+b)}$$

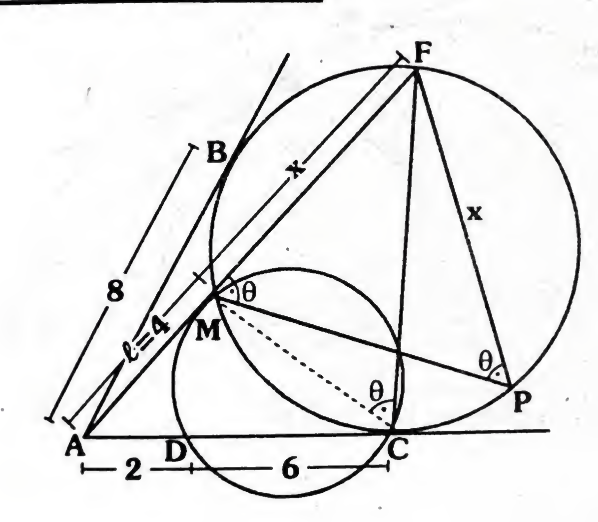
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \mathbf{x = b\sqrt{\frac{a+b}{a}}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 214



- Piden: x
- ΔMFP : isósceles $\Rightarrow MF = PF = x$
- Como: $AB = AC \Rightarrow AD = 2$
- Por teorema de la tangente:

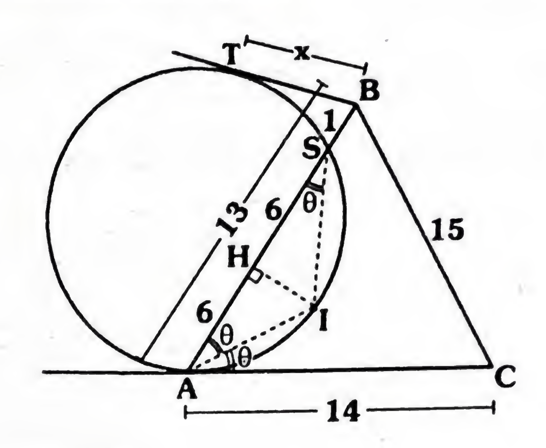
$$\ell^2 = 2(8) \Rightarrow \ell = 4$$

$$8^2 = 4(4+x)$$

$$\therefore \mathbf{x = 12}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 215



- Piden: x
- Como I es incentro, al trazar

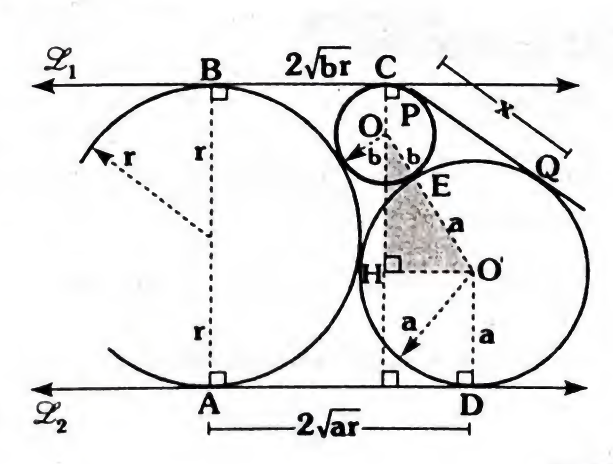
$$\overline{IH} \perp \overline{AB} \Rightarrow AH = p - BC$$

- $p = \dfrac{13+14+15}{12} \Rightarrow AH = 6$
- ΔAIS : isósceles $\Rightarrow AS = 12$
- Como: $AB = 13 \Rightarrow SB = 1$
- Teorema de la tangente: $x^2 = 1(13)$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{13}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 216



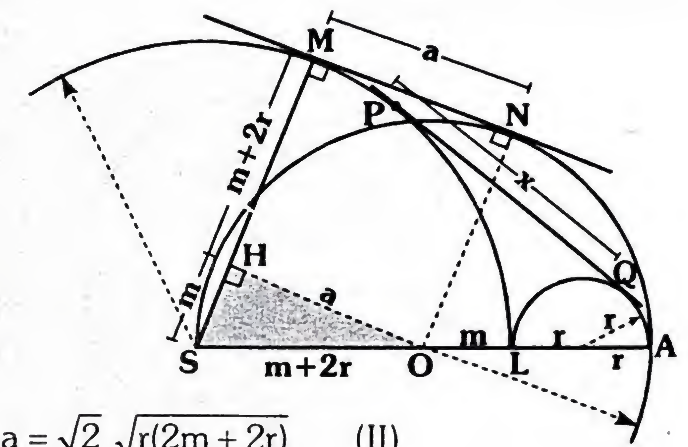
- Por demostrar: $x = r$
- Por teorema: $x = 2\sqrt{ab}$; $BC = 2\sqrt{br}$ y $AD = 2\sqrt{ar}$
- En ⊿ OHO': $OH = 2r - a - b \Rightarrow O'H = 2\sqrt{ar} - 2\sqrt{br}$
- En ⊿ OHO': $(a+b)^2 = [2r-(a+b)]^2 + \left[2\sqrt{r}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\right]^2$

$$\cancel{(a+b)^2} = 4r^2 + \cancel{(a+b)^2} - 4r(a+b) + 4r(a+b-2\sqrt{ab})$$

$$0 = 4r(r - 2\sqrt{ab}) \Rightarrow r = 2\sqrt{ab} \text{ y como } x = 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore \mathbf{x = r}$$

RESOLUCIÓN Nº 217

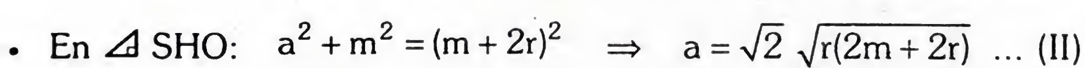


- Piden x en función de "a"
- Sea $OL = m \Rightarrow OA = m + 2r$

$SL = 2m + 2r$

- Por teorema para los menores arcos:

$$x = 2\sqrt{r(2m+2r)} \qquad \ldots \text{(I)}$$

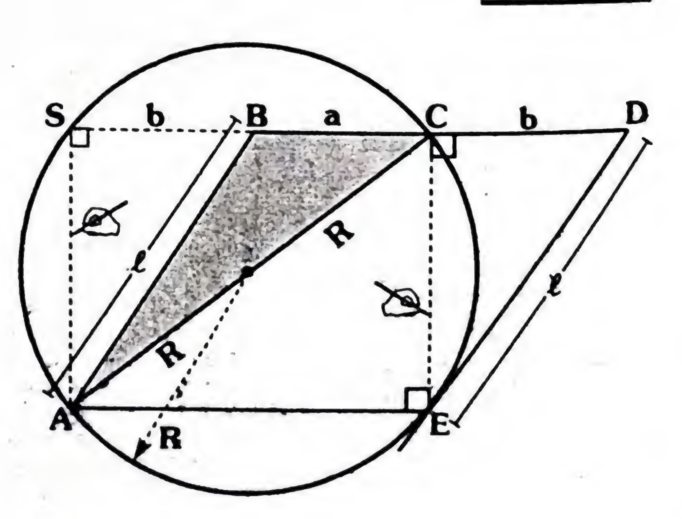


- En ⊿ SHO: $a^2 + m^2 = (m+2r)^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}\,\sqrt{r(2m+2r)}$ ... (II)
- De (I) y (II) $\dfrac{x}{a} = \sqrt{2}$

$$\therefore \mathbf{x = a\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 218



- Piden R
- Prolonguemos $\overline{DB}$ hasta que corte a la circunferencia en S.
- ⊿ASB ≅ ⊿ECD entonces $SB = b$
- Por teorema de la tangente:

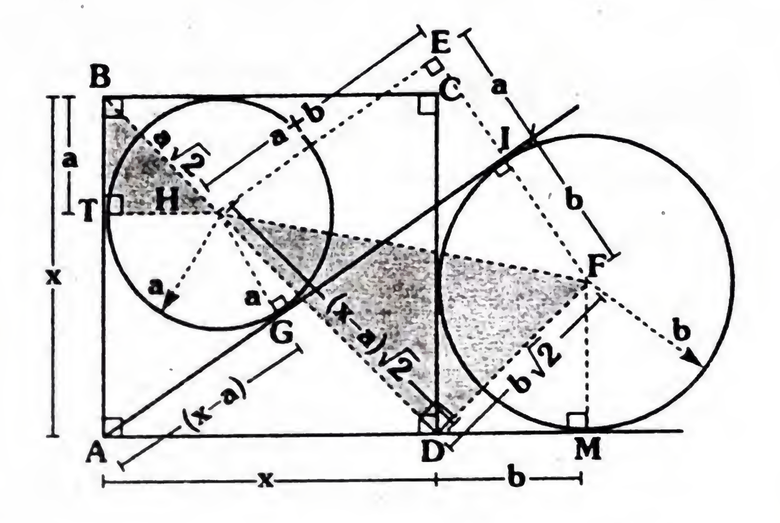
$$\ell^2 = b(2b+a) \qquad \ldots \text{(I)}$$

- En ΔABC por teorema de las proyecciones: $(2R)^2 - \ell^2 = (a+b)^2 - b^2$ ... (II)

- De (I) y (II): $$R = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)(a+2b)}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 219



- Piden x
- Por teorema sobre segmentos tangentes:

$$AM = AI = x + b$$
$$AT = AG = x - a$$
$$\Rightarrow IG = a + b$$

- ⊿HEF: notable de 45°

$$\Rightarrow HF = (a+b)\sqrt{2}$$

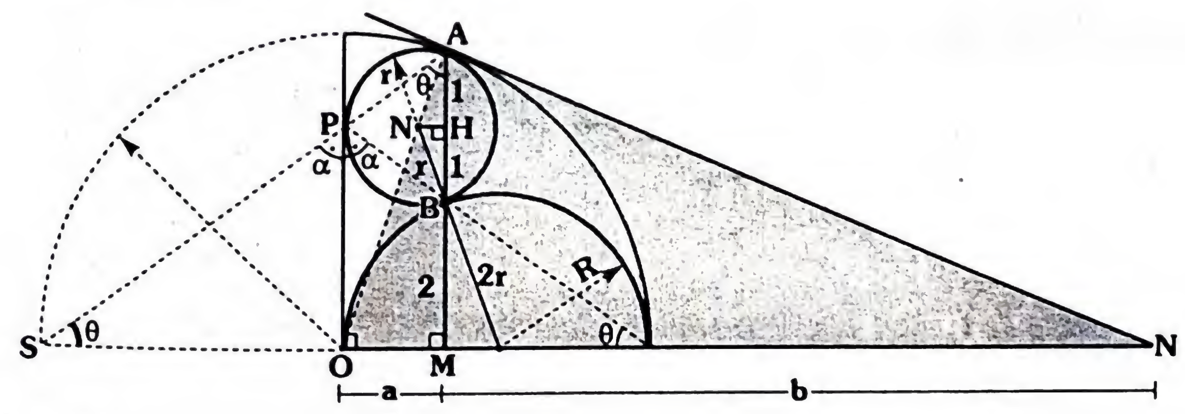
- En ⊿HDF: teorema de Pitágoras (como todos los lados tienen en común: $\sqrt{2}$)

$$\Rightarrow (x-a)^2 + b^2 = (a+b)^2$$

$$\therefore \; x = \sqrt{a(a+2b)} + a$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 220



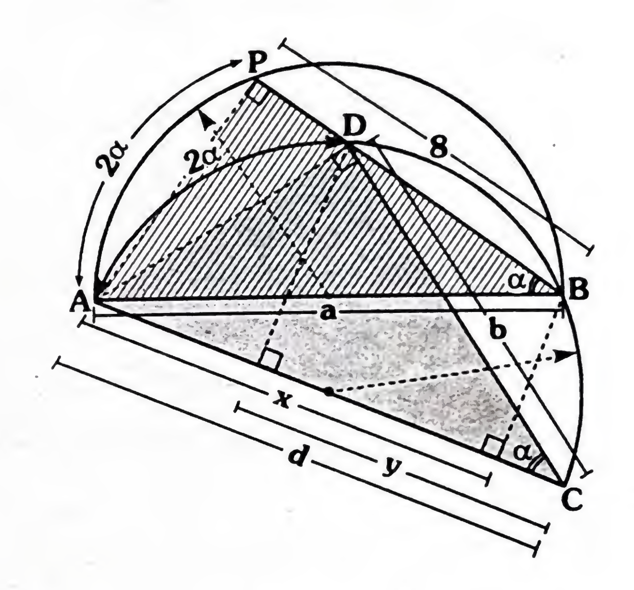
- Piden: ab
- Se completa la semicircunferencia, por teorema: A, P y son colineales.
- Como $\alpha + \theta = 90°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle SMA = \alpha$

- Por teorema (pág. 41) , se cumple: $R = 2r$
- Por teorema de Tales: $BM = 2 \Rightarrow AM = 4$
- En ⊿OAN: $4^2 = ab$

$\therefore$ **ab = 16**

Clave D

Resolución Nº 221



- Piden $x \cdot y$
- En las semicircunferencias:

$a^2 = xd$ ... (I)

$b^2 = yd$ ... (II)

- De (I) y (II):

$$\frac{a^2 \cdot b^2}{d^2} = x \cdot y \quad \text{... (I)}$$

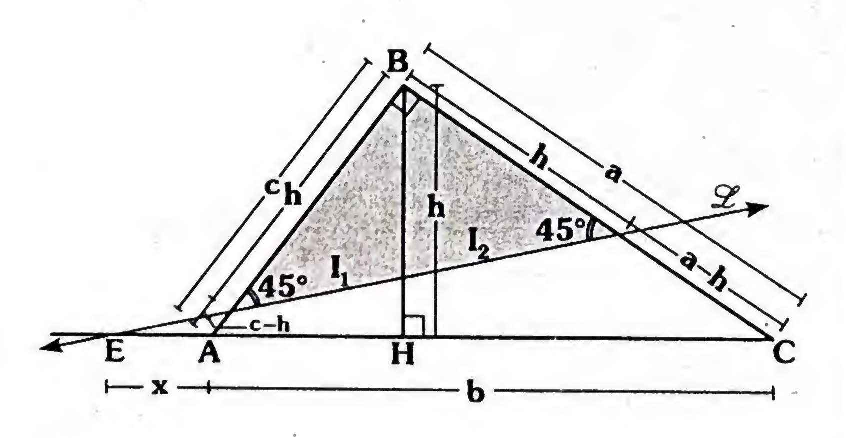
- ⊿APB ∼ ⊿ADC: $\frac{a}{8} = \frac{d}{b} \rightarrow \frac{ab}{d} = 8$ ... (II)

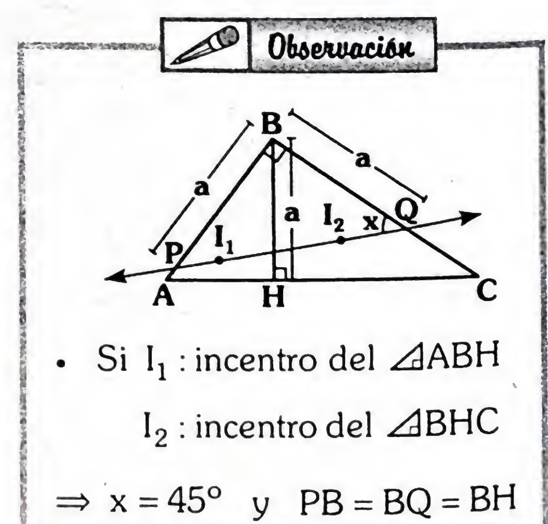
- Reemplazando (II) en (I): $x \cdot y = 8^2$

$\therefore$ **x · y = 64**

Clave B

Resolución Nº 222





- Si I_1 : incentro del ⊿ABH

I_2 : incentro del ⊿BHC

$\Rightarrow x = 45°$ y $PB = BQ = BH$

- Piden: x
- $\triangle$ABC: Teorema de Menelao

$$\not{h}(c-h)(x+b)=\not{h}(a-h)x$$

$$(c-h)x+(c-h)b=(a-h)x$$

$$x=\frac{(c-h)b}{a-c} \quad \dots (I)$$

- Además $\triangle$ABC: relaciones métricas en $\triangle$:

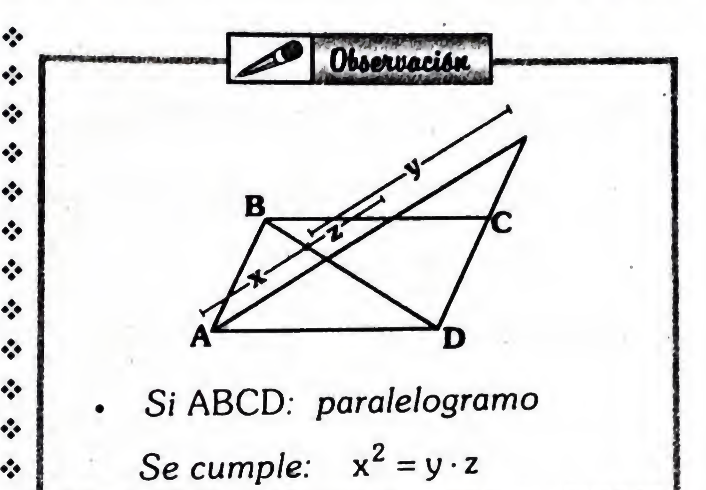
$$ac=bh \Rightarrow h=\frac{ac}{b} \quad \dots (II)$$

- Reemplazando (II) en (I):

$$x=\frac{b}{a-c}\left(c-\frac{ac}{b}\right)$$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{c(b-a)}{a-c}}$$

Clave D



- *Si ABCD: paralelogramo*

Se cumple: $x^2=y\cdot z$

- En el problema:

$$a^2=bc \quad \dots (I)$$

$$\triangle MNL: \ m^2=bc \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $a=m$

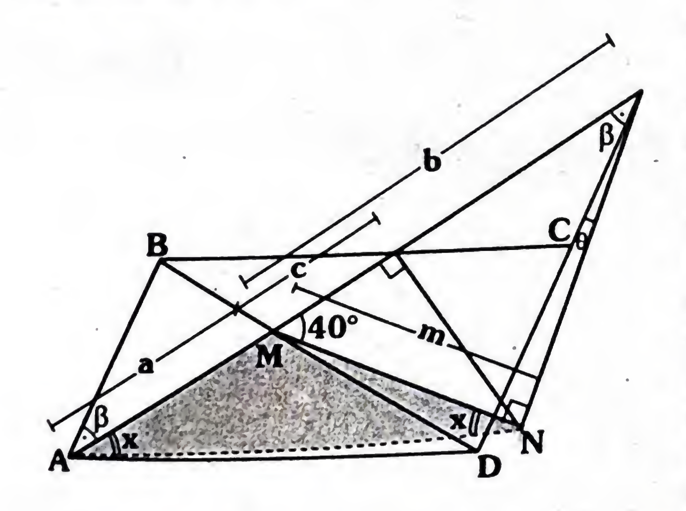
ΔAMN : isósceles (AM = AN)

$$\Rightarrow \ 2x=40°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=20°}$$

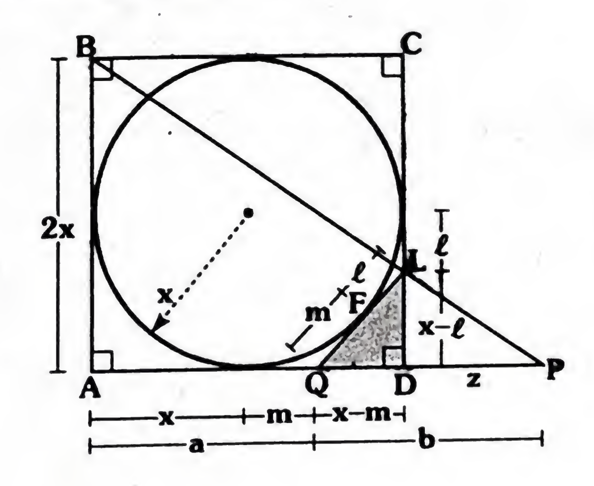
Clave C

Resolución Nº 223



- Piden: x
- Dato: $\beta+\theta=50°$

Resolución Nº 224



- Nos piden: $\frac{a}{b}$

- En el gráfico: $a = x + m$
- En $\triangle$QDL: Por teorema de Pitágoras:

$$(m + \ell)^2 = (x - m)^2 + (x - \ell)^2$$

$$\Rightarrow m\ell + mx + \ell x = x^2 \qquad \ldots (I)$$

- $\triangle$LDP ~ $\triangle$BAP:

$$\frac{z}{x - \ell} = \frac{z + 2x}{2x}$$

$$\Rightarrow zx = 2x^2 - \ell z - 2\ell x \qquad \ldots (II)$$

- (II) en (I):

$$zx = 2(m\ell + mx + \ell x) - \ell z - 2\ell x$$

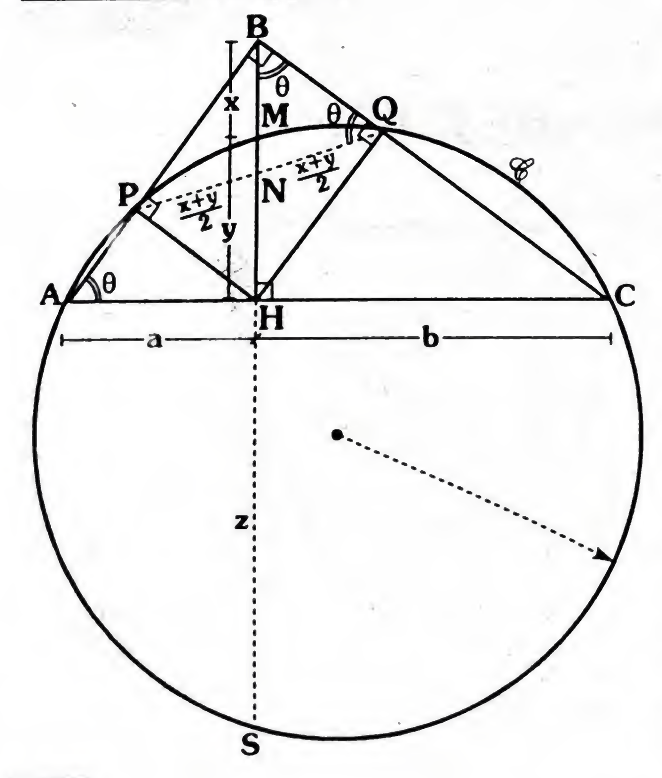
$$\Rightarrow z(\cancel{x + \ell}) = 2m(\cancel{x + \ell})$$

$$\Rightarrow z = 2m \Rightarrow b = x + m$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 225



- Piden: $\frac{x}{y}$
- Completando ángulos:

$$m\measuredangle PAH = m\measuredangle BQP = \theta \Rightarrow \square APQC$$

es inscriptible $\Rightarrow \mathscr{C}$ pasa por C.

- PBQH es rectángulo:

$$\Rightarrow PN = NQ = NB = \frac{x + y}{2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{y - x}{2}$$

- En $\triangle$ABC: $(x + y)^2 = ab$
- Teorema de las cuerdas: $ab = yz$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = yz \Rightarrow \frac{(x + y)^2}{y} = z$$

- Para $\overline{PQ}$ y $\overline{MS}$:

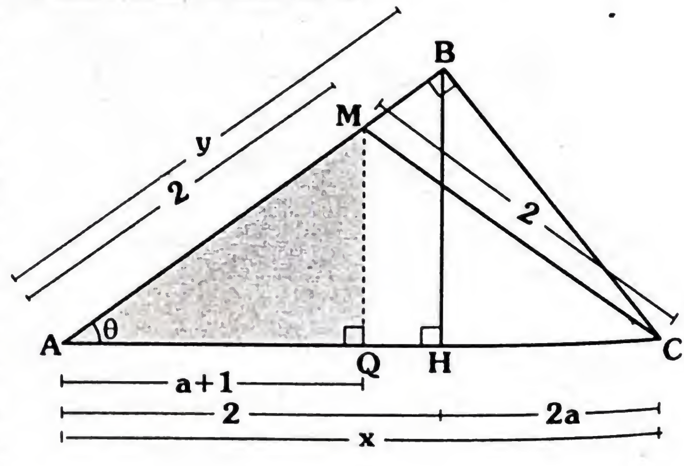
$$\left(\frac{x + y}{2}\right)\left(\frac{x + y}{2}\right) = \left(\frac{y - x}{2}\right)\left(\frac{x + y}{2}\right)\left(\frac{x + y}{2} + z\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{(y - x)}{2}\left(\frac{x + y}{2} + \frac{(x + y)^2}{y}\right)$$

$$\therefore \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 226



- Piden x.
- Sea $HC = 2a \Rightarrow x = 2(a+1)$
- ΔAMC: isósceles, entonces al trazar la altura MQ se tiene: $AQ = QC = a + 1 = \frac{x}{2}$
- En ⊿ABC: $y^2 = 2x$
- ⊿AQM ~ ⊿ABC:

$$\frac{\overset{\boxed{\frac{x}{2}}}{\boxed{a+1}}}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow x^4 = 16 \cdot \underbrace{y^2}_{2x}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2\sqrt[3]{4}}$$

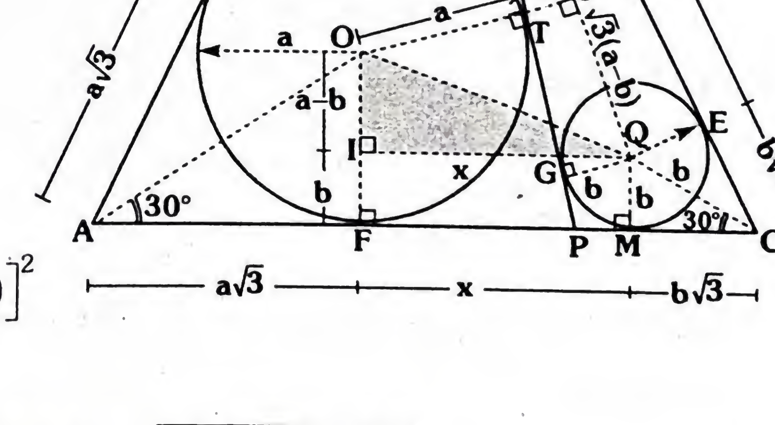
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 227

- Nos piden: AC.
- ⊿AFO y ⊿QMC: notable de 30°

$\Rightarrow \quad AF = a\sqrt{3}$ y

$MC = b\sqrt{3}$



- $AC = a\sqrt{3} + b\sqrt{3} + x \quad \ldots \text{(I)}$
- $BJ = BT = x + b\sqrt{3}$ y

$BE = BS = x + a\sqrt{3}$

$\Rightarrow GT = SQ = a\sqrt{3} - b\sqrt{3}$

- En ⊿OIQ y ⊿OSQ:

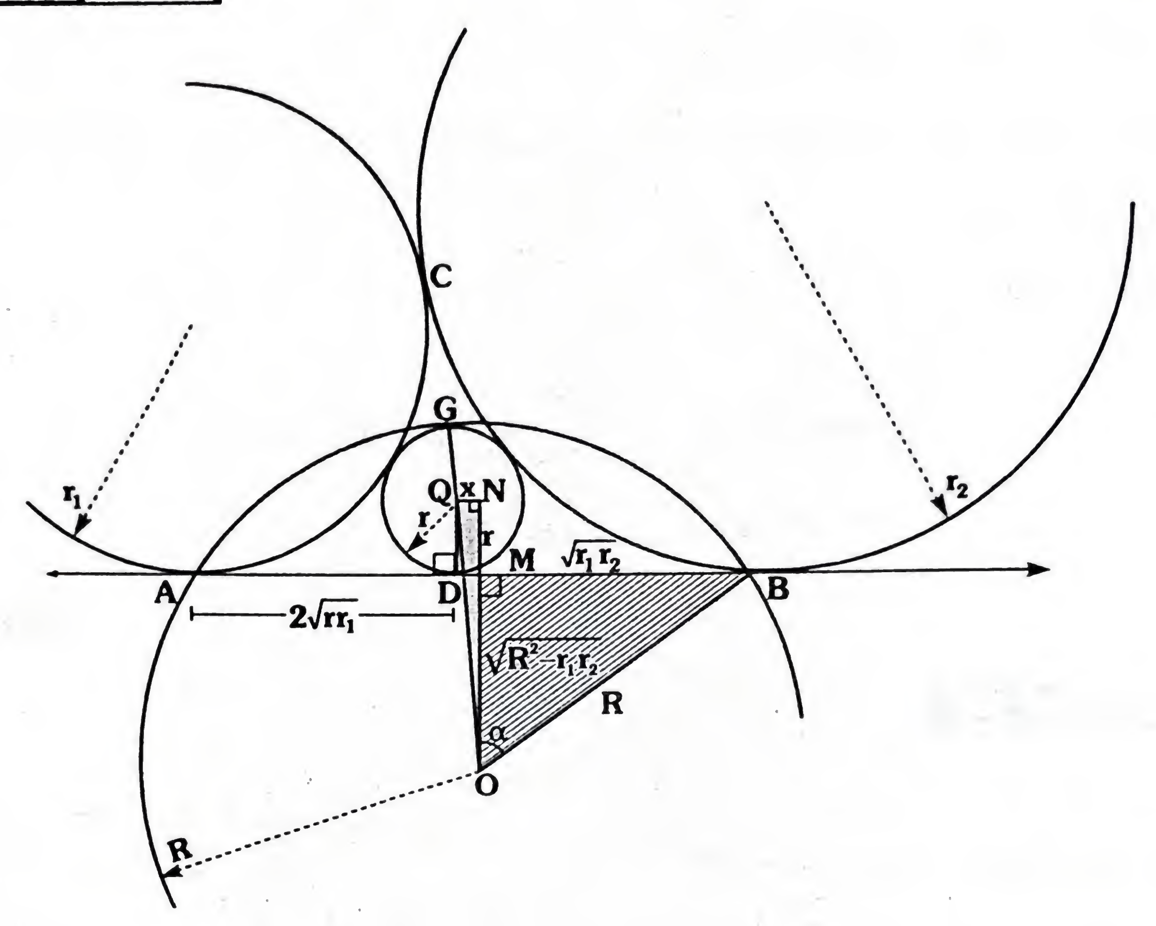
$$x^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2 + \left[\sqrt{3}(a-b)\right]^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3(a^2+b^2) - 2ab}$$

$$\therefore \mathbf{AC = \sqrt{3}(a+b) + \sqrt{3(a^2+b^2) - 2ab}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 228



- Nos piden: $m\overset{\frown}{AB}$
- Si trazamos desde O la perpendicular $\overline{OM}$ a $\overline{AB}$, por teorema de circunferencia $m\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$ y $AM = MB$.
- Por teorema: $AB = 2\sqrt{r_1 r_2} \Rightarrow AM = MB = \sqrt{r_1 r_2}$

  $AD = 2\sqrt{r r_1}$
- O, Q y C colineales.
- En ⊿OMB: $OM = \sqrt{R^2 - r_1 r_2}$
- $DM = x = \sqrt{r_1 r_2} - 2\sqrt{r r_1}$
- En ⊿QNO: teorema de Pitágoras: $(R-r)^2 = (\sqrt{r_1 r_2} - 2\sqrt{r r_1})^2 + (\sqrt{R^2 - r_1 r_2} + r)^2$
- Simplificando:

$$2r_1\sqrt{r_2 r} - Rr - 2r_1 r = r\sqrt{R^2 - r_1 r_2} \Rightarrow \frac{2r_1\sqrt{r_2}}{\sqrt{r}} - R - 2\sqrt{r_1} = \sqrt{R^2 - r_1 r_2} \quad \ldots (I)$$

- Pero: $\dfrac{1}{\sqrt{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$

- En (I):

$$2r_1\sqrt{r_2}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)-R-2r_1=\sqrt{R^2-r_1r_2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{r_1r_2}=R+\sqrt{R^2-r_1r_2}$$

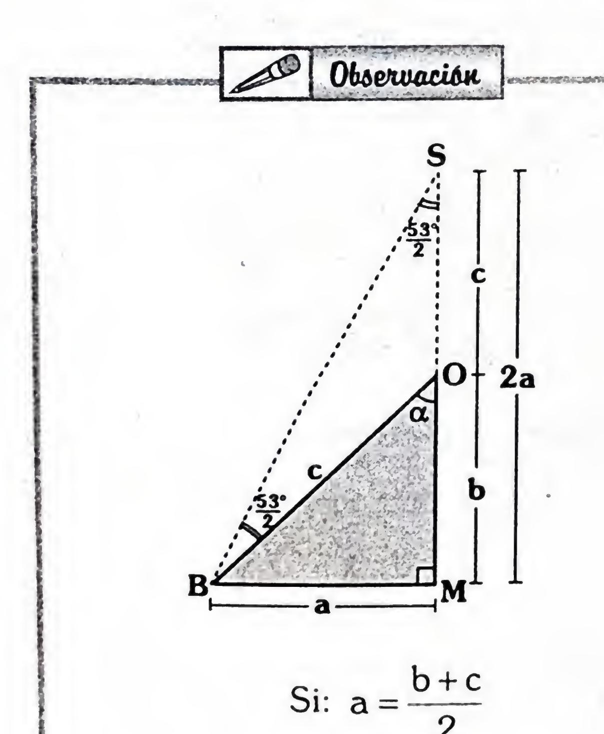
- En el ⊿OMB, tenemos:

$$MB=\frac{(OM)+(OB)}{2}$$

- Es decir los lados del ⊿OMB forman una P.A $\Rightarrow \alpha=53°$ (*ver observación*)

$$\therefore\ \mathbf{m\overset{\frown}{AB}=106°}$$

Clave B

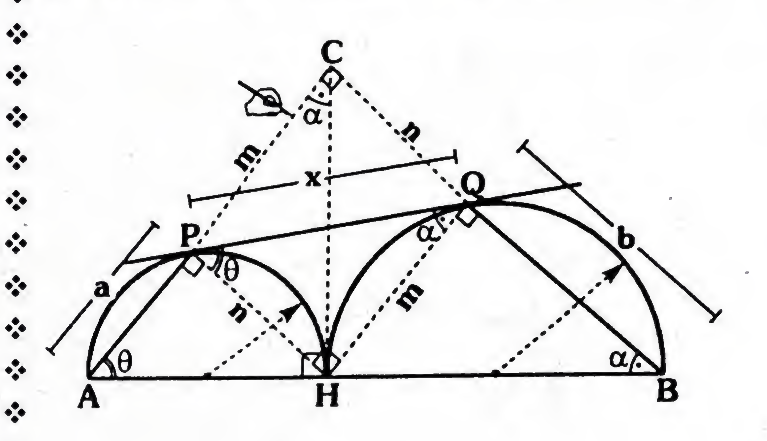


Si: $a=\dfrac{b+c}{2}$

$\Rightarrow$ ⊿DMC: notable de 53°/2

$\therefore\ \alpha=53°$

RESOLUCIÓN Nº 229



- Piden x.
- Por teorema:

$$m\measuredangle PHQ=90°$$

- En ⊿PHQ:

$$x^2=m^2+n^2 \qquad \text{... (I)}$$

- Se prolonga:

$$\overline{AP}\ \text{ y }\ \overline{BQ}\Rightarrow m\measuredangle ACB=90°$$

- PCQH: rectángulo $\Rightarrow m\measuredangle AHC=90°$

- En el ⊿AHC y ⊿CHB:

$$\left.\begin{array}{l}n^2=am\\ m^2=bn\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}n=\sqrt[3]{a^2b}\quad \text{y}\\ m=\sqrt[3]{b^2a}\end{array}$$

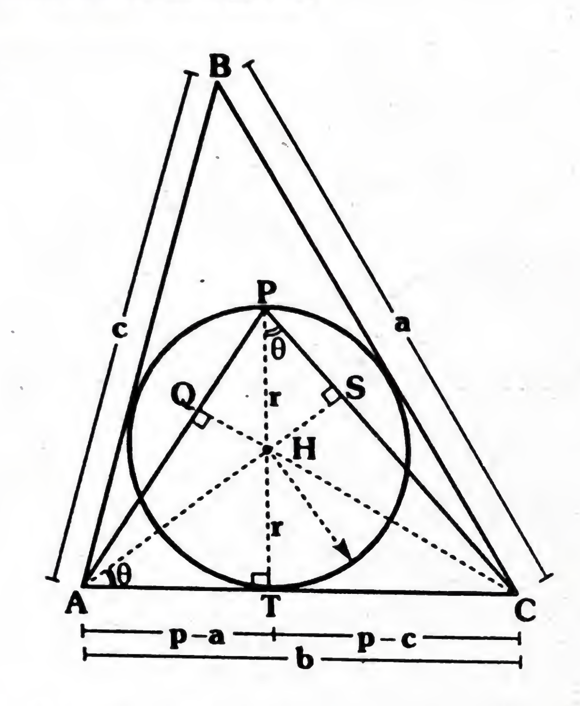
- En (I):

$$x^2=(\sqrt[3]{a^2b})^2+(\sqrt[3]{b^2a})^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x=(ab)^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 230



- Piden b en función de "a" y "c".
- Como H es ortocentro del ΔAPC

$\Rightarrow \overline{AS}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{PT}$ son alturas.

- $\triangle ATH \sim \triangle PTC$:

$$\frac{r}{p-c}=\frac{p-a}{2r} \Rightarrow 2r^2=(p-a)(p-c)$$

- Usemos el siguiente resultado:

$$pr=\sqrt{p\underbrace{(p-a)(p-c)}_{2r^2}(p-b)}$$

$$\Rightarrow p^2\cancel{r^2}=p\cdot 2\cancel{r^2}(p-b)$$

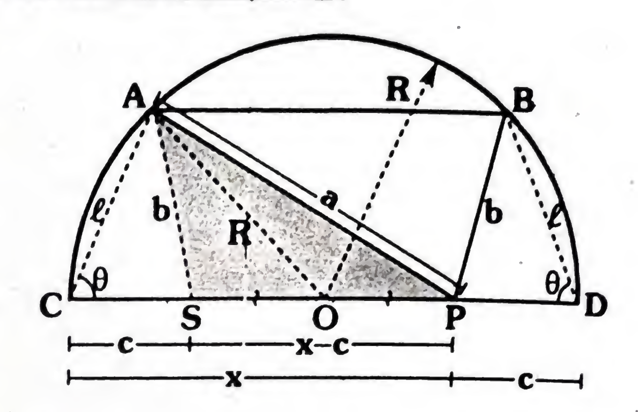
$$\Rightarrow p=2(p-b)$$

$$2b=p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{b=\frac{a+c}{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 231



- Piden x.
- Notemos que CABD es un trapecio isósceles $\Rightarrow CA=BD=\ell$ y

$$m\measuredangle ACD=m\measuredangle BDC=\theta$$

- Ubiquemos S en $\overline{CP}$ tal que $CS=c$

$$\Rightarrow \Delta ACS\cong\Delta BDP \Rightarrow AS=b$$

- Para el ΔSAP, por teorema de la mediana:

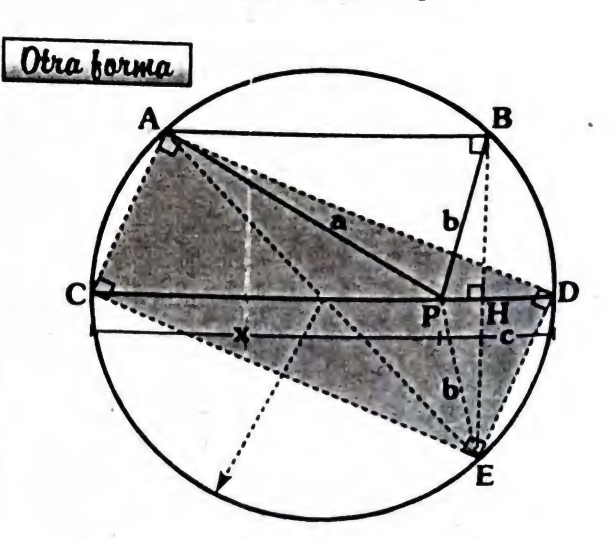
$$a^2+b^2=2R^2+\frac{(x+c)^2}{2}$$

- Como $R=\dfrac{x+c}{2}$

$$\Rightarrow a^2+b^2=\frac{(x+c)^2}{2}+\frac{(x-c)^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

Otra forma

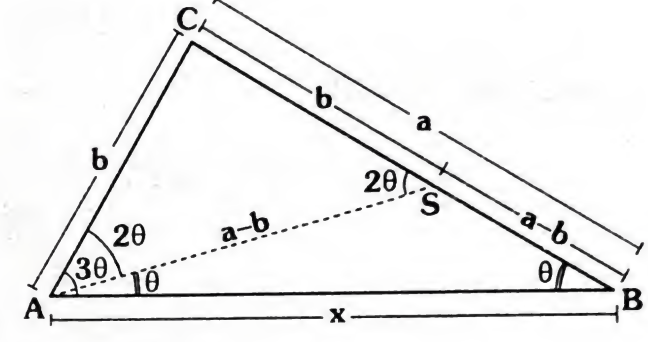


- Completemos la circunferencia y se traza la cuerda $\overline{BE}$ tal que $\overline{BE} \perp \overline{CD} \Rightarrow BH = HE$, $PB = PE = b$ y $\overline{AE}$ es diámetro .
- ADEC rectángulo, por teorema de Marlen: $x^2 + c^2 = a^2 + b^2$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$$

Clave B

Resolución Nº 232



- Nos piden x.
- Se traza la ceviana interior $\overline{AS}$ tal que:

  $m\sphericalangle SAB = \theta \Rightarrow \Delta ASB$ y

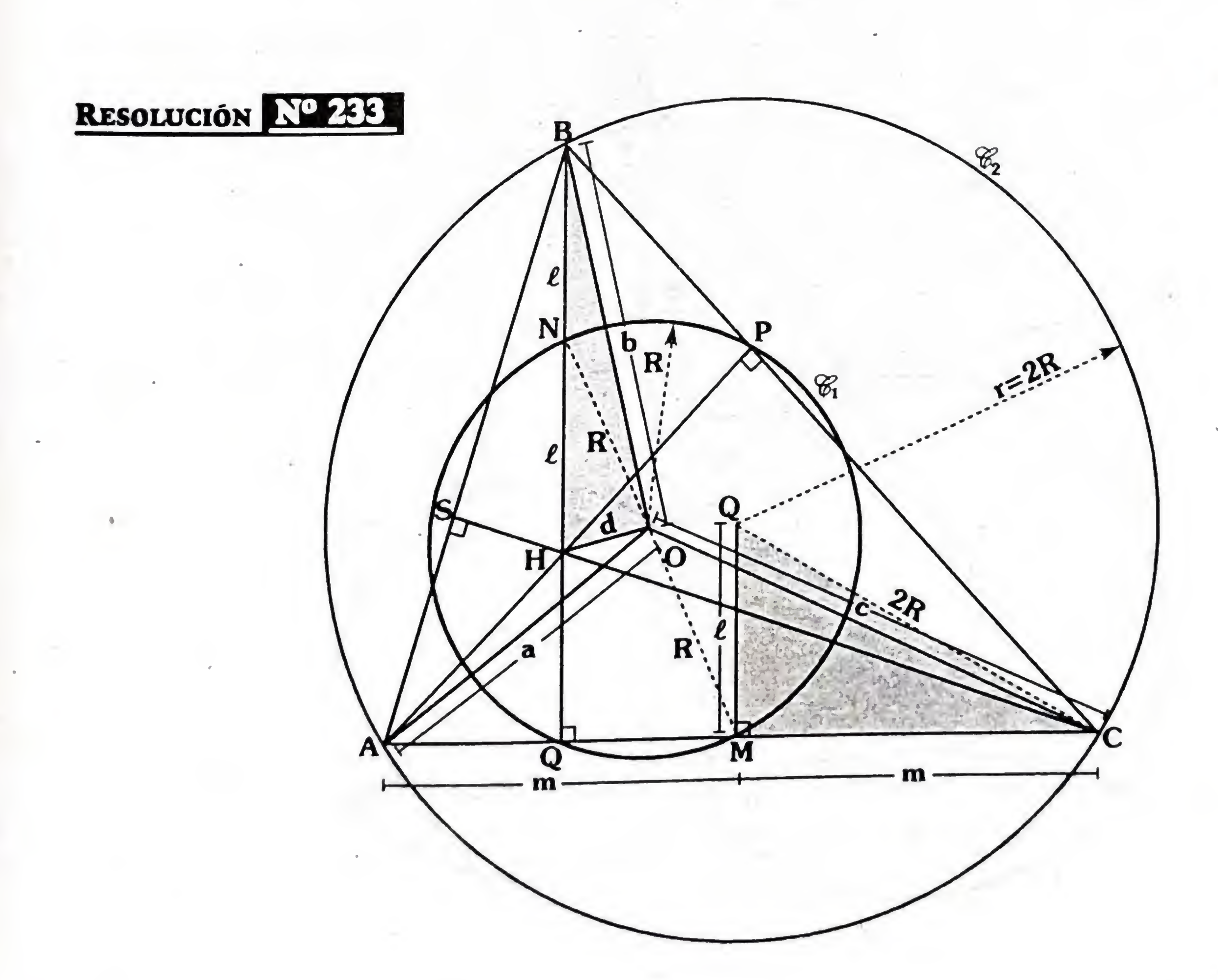
  ΔACS : isósceles

- Por teorema de Stewart: $x^2b + b^2(a-b) = (a-b)^2a + ab(a-b)$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b}}}$$

Clave D

Resolución Nº 233



- Piden: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- $\mathscr{C}_1$ es la circunferencia de Euler $\Rightarrow$ BN = NH , AM = MC y r = 2R .
- Q es circuncentro del ΔABC $\Rightarrow$ BH = 2(QM)
- Teorema de la mediana, en: $\Delta AOC: \ a^2 + c^2 = 2R^2 + \dfrac{(2m)^2}{2}$

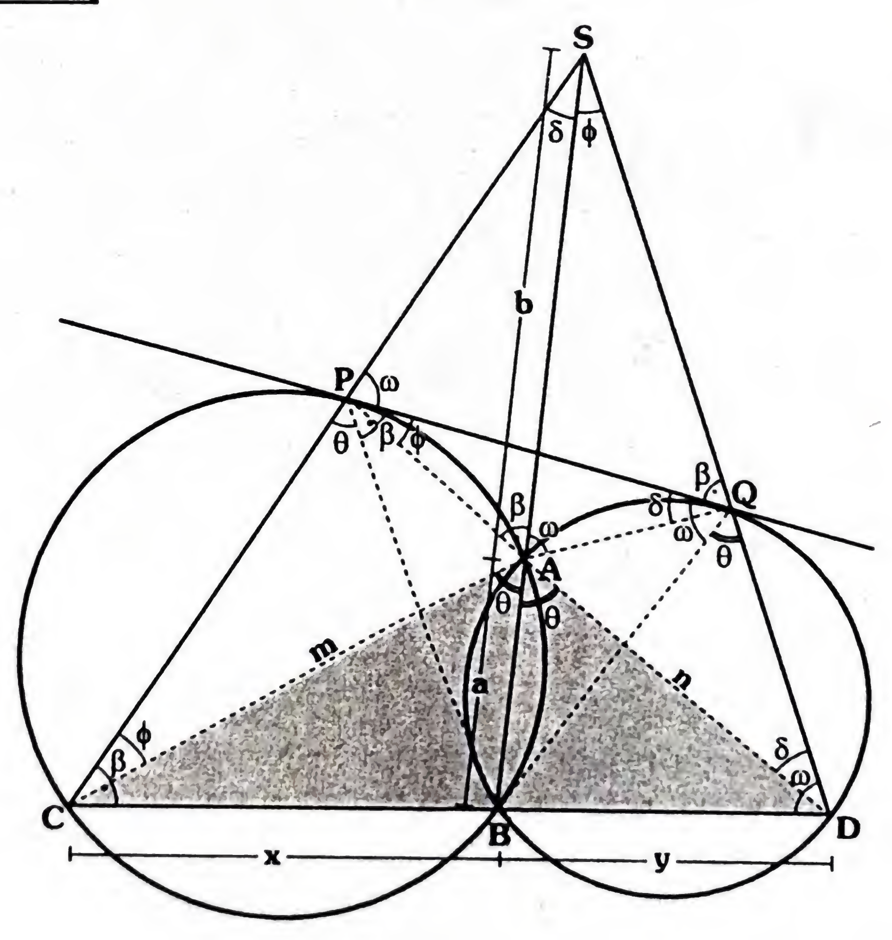
  $\Delta HOB: \ b^2 + d^2 = 2R^2 + \dfrac{(2\ell)^2}{2}$
- Sumando (I) y (II):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2 + 2\underbrace{(m^2 + \ell^2)}_{4R^2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12R^2$$

$$\therefore \ \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3r^2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 234



- Piden: xy

- Dato: $b^2 - a^2 = 8$

- Primero, completemos ángulos:

$$m\measuredangle PAS = m\measuredangle PAB = \beta \quad ; \quad m\measuredangle SAQ = m\measuredangle BDQ = \omega$$

- Como: $m\measuredangle PSQ + \beta + \omega = 180° \Rightarrow$ ⏢PAQS es inscriptible.

- También ⏢CPQD es inscriptible y PSQB es paralelogramo y $\Delta CSA \sim \Delta SAD$

$$\Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow mn = b^2 .$$

- En ΔCAD, $\overline{AB}$ es bisectriz interior, entonces:

$$a^2 = \underbrace{mn}_{b^2} - xy \Rightarrow xy = \underbrace{b^2 - a^2}_{8}$$

$$\therefore \ \mathbf{xy = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 235

- Piden: m

- Dato: $a^2 + b^2 - 4r^2 = 8$

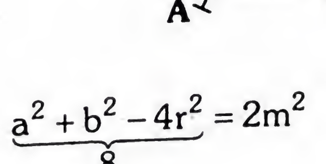
- En ⊿OTP: $m^2 + r^2 = c^2$ ... (I)

- En ΔAPB, $\overline{OP}$ es mediana, entonces:

$$a^2 + b^2 = 2c^2 + \frac{(2r)^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2 + 2r^2 \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

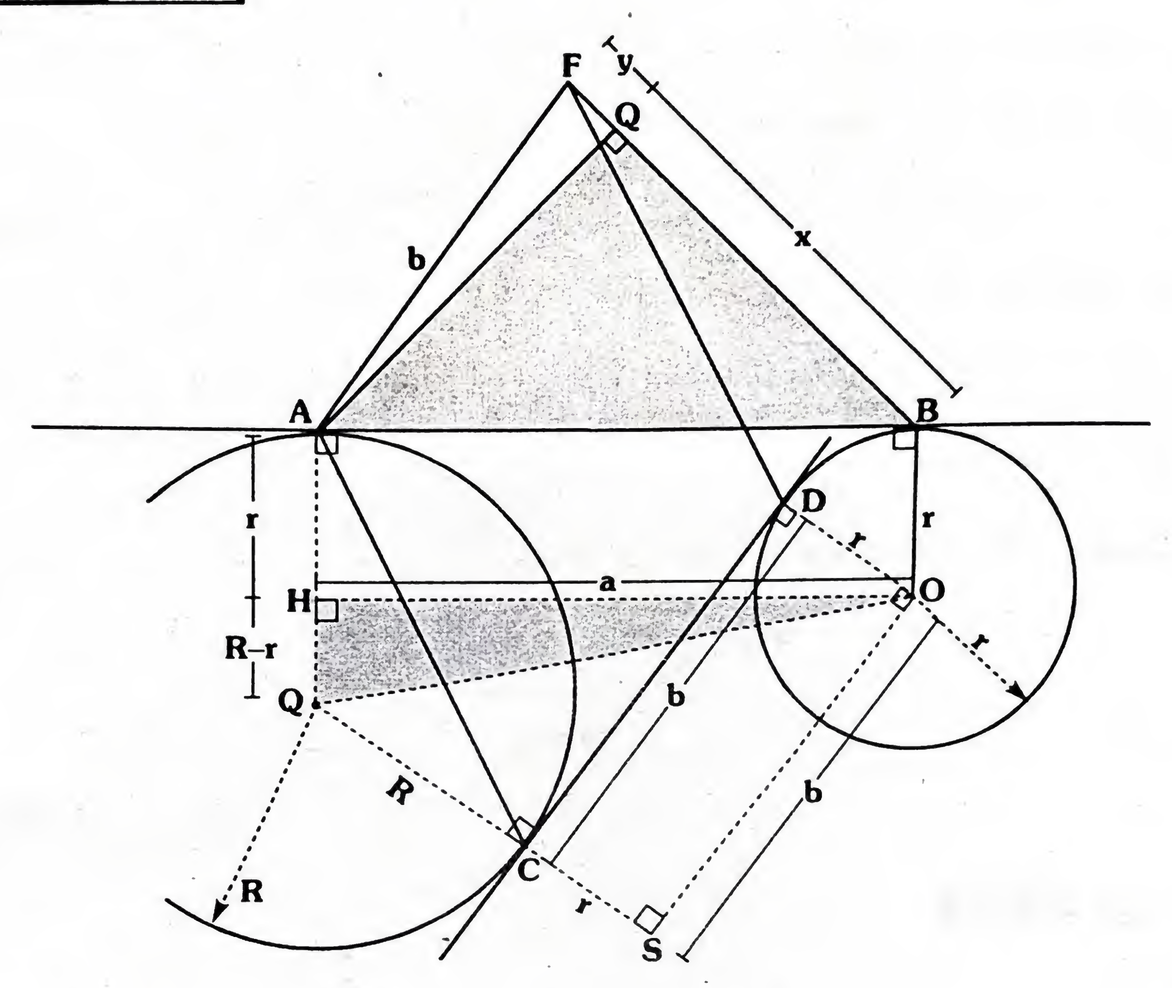


$$\underbrace{a^2 + b^2 - 4r^2}_{8} = 2m^2$$

$$\therefore \ \mathbf{m = 2}$$

Clave C

Resolución Nº 236



- Piden: $x^2 - y^2$
- En ΔAFB, por teorema de las proyecciones: $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$
- AHBO es rectángulo $\Rightarrow$ $AH = OB = r$
- En ⊿QHO y ⊿QSO:

$$(R - r)^2 + a^2 = (R + r)^2 + b^2$$

$$a^2 - b^2 = \underbrace{(R + r)^2 - (R - r)^2}_{4Rr}$$

$$\therefore \ \mathbf{x^2 - y^2 = 4Rr}$$

Clave B

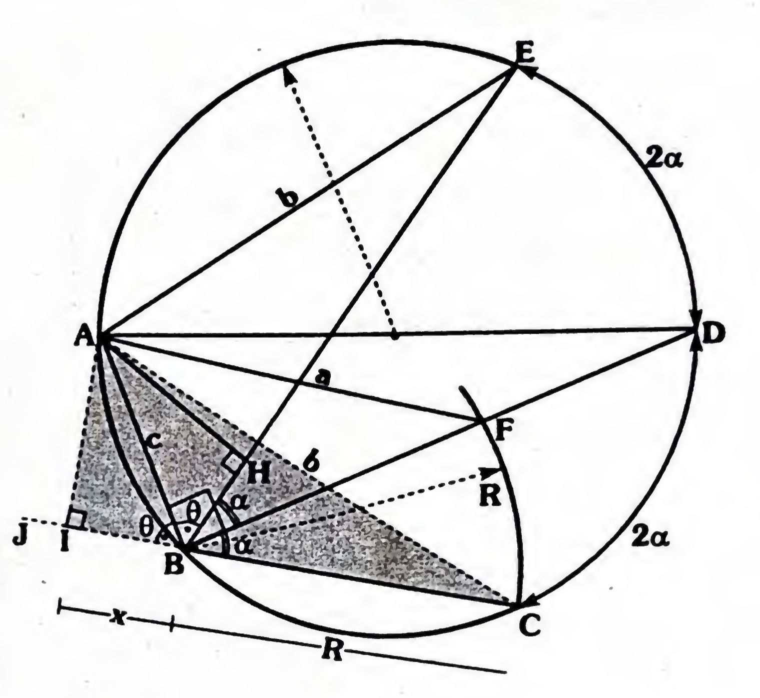
RESOLUCIÓN Nº 237

- Nos piden BH.
- Sea BH=x
- Dato: $b^2 - a^2 = 10R$
- Como $m\widehat{ED} = m\widehat{DC}$

  $\Rightarrow\ m\widehat{AE} = m\overline{AC}\ \Rightarrow\ AE = AC = b$
- Por teorema de la bisectriz:

  $IB = BH = x$
- En ΔBAC, por teorema de Euclides:

  $b^2 = R^2 + c^2 + 2Rx$ ... (I)
- En ⊿ABF: $c^2 + R^2 = a^2$ ... (II)
- De (I) y (II): $\underbrace{b^2 - a^2}_{10R} = 2Rx$



$\therefore\ \mathbf{x = 5}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 238

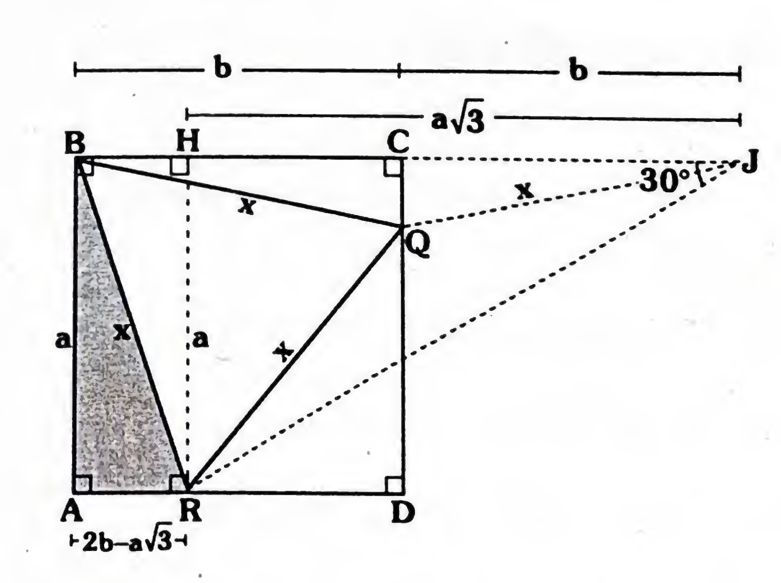
- Piden x.
- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta que:

  $BC = CJ = b\ \Rightarrow\ RJ = x$
- Para el ΔBRJ, Q es circuncentro

  $\Rightarrow\ m\measuredangle RJB = 30°$
- ⊿RHJ: notable de 30°

  $\Rightarrow\ HJ = a\sqrt{3}$

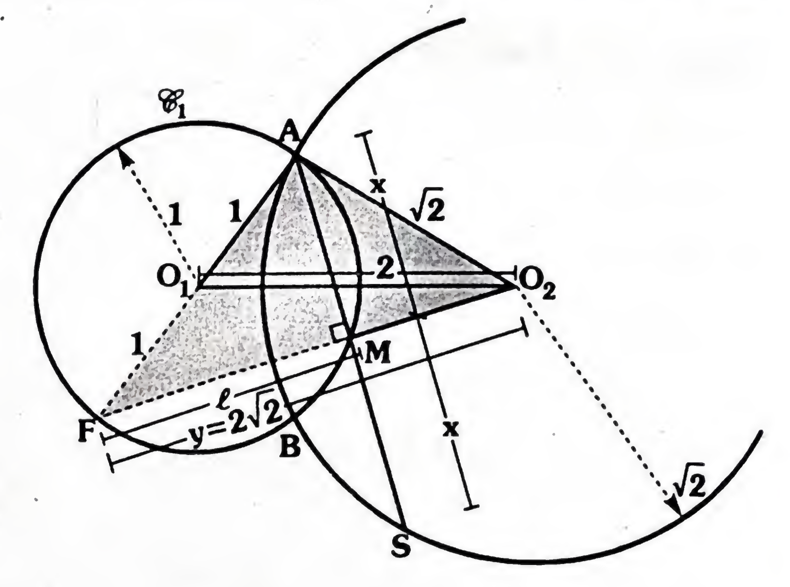
  $\Rightarrow\ BH = AR = 2b - a\sqrt{3}$
- En ⊿RAB: $x^2 = a^2 + (2b - a\sqrt{3})^2$



$\therefore\ \mathbf{x = 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 239



- Piden AS
- Como: $AM = MS \Rightarrow \overline{O_2M} \perp \overline{AS}$
- Al prolongar $\overline{O_2M}$, se tendrá que $\overline{AF}$ es diámetro.
- En ΔFO_2A, por teorema de la mediana.

$$(\sqrt{2})^2 + y^2 = 2(2)^2 + \frac{2^2}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

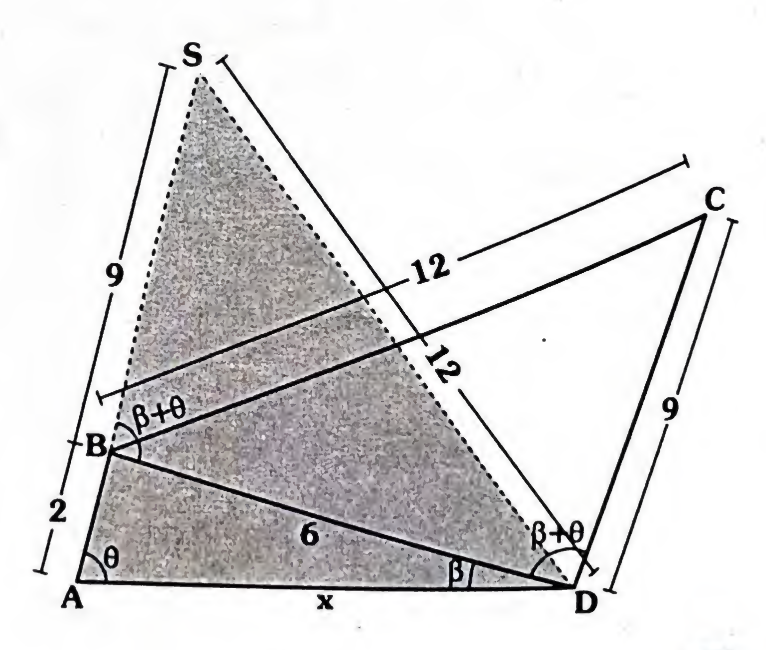
- En ΔFO_2A, por teorema de Euclides: $(\sqrt{2})^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})\ell$

$$\ell = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$

- Finalmente en $\triangle FMA$: $x^2 + \left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2 = 2^2$

$$x = \frac{\sqrt{14}}{4} \qquad \therefore\ \mathbf{AS = \frac{\sqrt{14}}{2}}$$

RESOLUCIÓN Nº 240



- Nos piden x.
- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta S tal que $BS = DC = 9$

$$\Rightarrow \Delta DBS \cong \Delta BDC \Rightarrow SD = 12$$

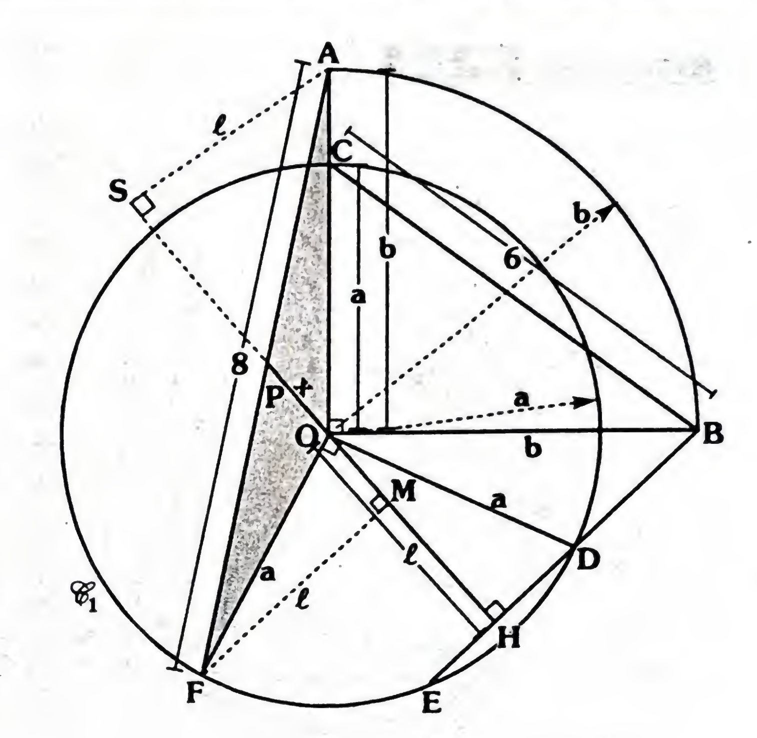
- En ΔASD, por teorema de Stewart:

$$9x^2 + 2(12)^2 = 6^2(11) + (2)(9)(11)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{34}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 241



- Nos piden: x
- $\measuredangle OHD \cong \measuredangle FMO \Rightarrow FM = OH = \ell$
- $\measuredangle OHB \cong \measuredangle ASO \Rightarrow AS = OH = \ell$
- $\measuredangle FMP \cong \measuredangle ASP \Rightarrow FP = PA$
- Para el ΔFOA, $\overline{OP}$ es mediana, entonces:

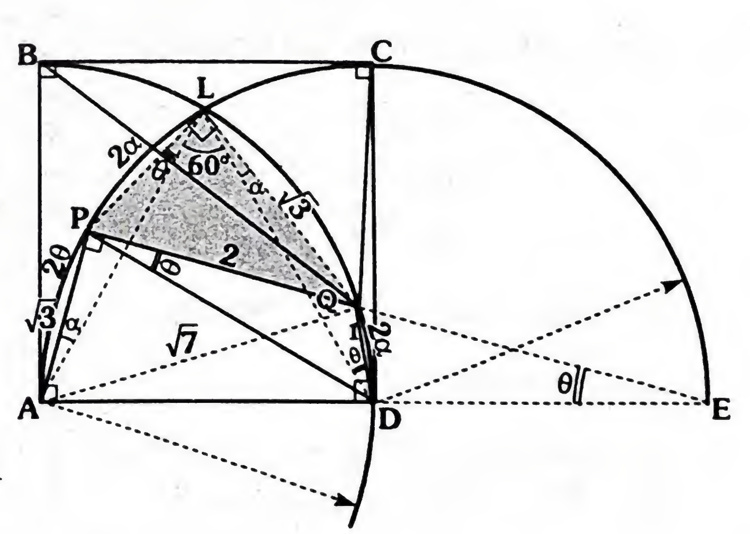
$$a^2 + b^2 = 2x^2 + \frac{8^2}{2} \qquad \ldots (I)$$

- En $\measuredangle COB$: $a^2 + b^2 = 36$
- En (I):

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 242



- Piden: $(BQ)^2 - (QC)^2$

  ΔALD: equilátero
- Se completa la semicircunferencia, como $m\measuredangle APQ = 90°$, al prolongar $\overline{PQ}$ llega a E.
- Con ello:

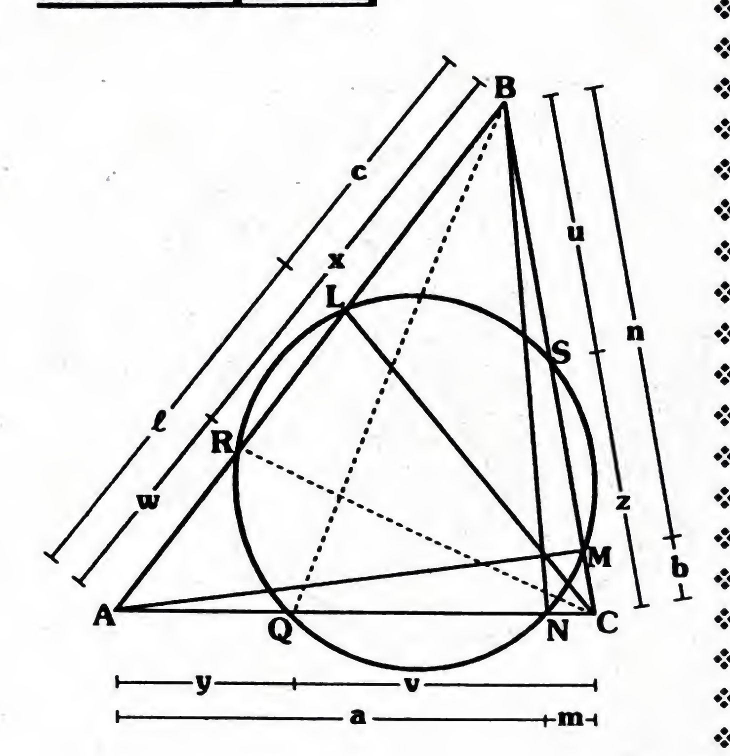
  $m\widehat{AP} = m\widehat{LQ} \Rightarrow AP = LQ = \sqrt{3}$

  $m\measuredangle PLQ = 90° \Rightarrow$ En $\measuredangle PLQ$: $PL = 1$
- Como $m\widehat{PL} = m\widehat{QD} \Rightarrow PL = QD = 1$
- Por teorema de Marlen: $(BQ)^2 + 1^2 = (CQ)^2 + (\sqrt{7})^2$

$$\therefore \ \mathbf{(BQ)^2 - (CQ)^2 = 6}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 243



- Analicemos:
- Para las cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$ que son concurrentes, por teorema de ceva.

$$abc = mn\ell$$

- Usemos ahora el teorema de secante:

$$ay = w\ell$$

$$bz = mv$$

$$cx = un$$

$$\Rightarrow (\cancel{abc})(xyz) = (\cancel{mn\ell}) = (wvu)$$

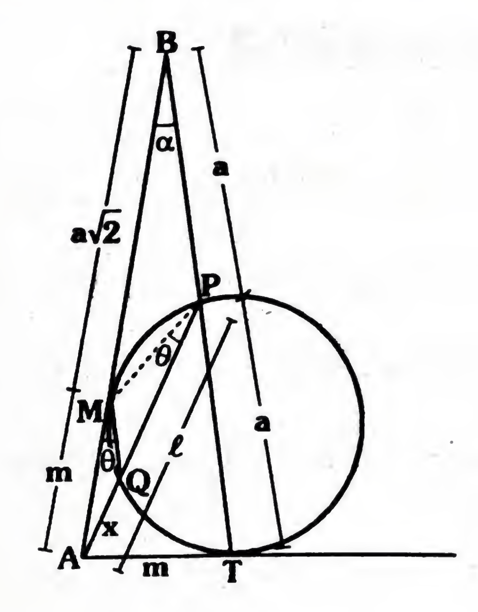
$$\Rightarrow cyz = wvu$$

- Por recíproco del teorema de Ceva: $\overline{AS}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ son concurrentes

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 244

- Analicemos parte del gráfico:



- Por teorema de la tangente:
  - $(MB)^2 = a(2a) \Rightarrow MB = a\sqrt{2}$
  - $m^2 = x\ell$ ... (I)
- Por teorema de la mediana en el ΔABT

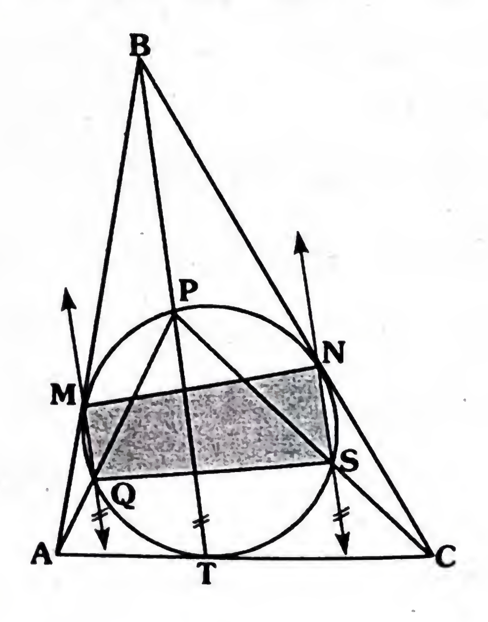
$$m^2 + (m + a\sqrt{2})^2 = 2\ell^2 + \frac{(2a)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m(m + a\sqrt{2}) = \ell^2$$

- En ΔABP, por propiedad de la semejanza: $\alpha = \theta$

$\Rightarrow \overline{MQ} // \overline{BT}$, análogamente $\overline{NS} // \overline{BT}$

- La figura quedará asi:

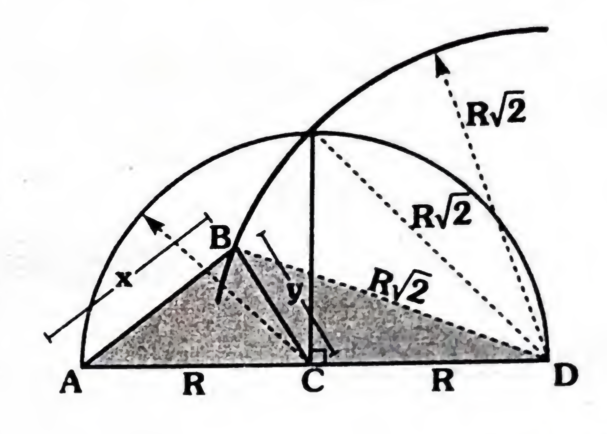


- MNSQ : trapecio isósceles $\Rightarrow$ MN = QS

$$\therefore \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{QS}} = \mathbf{1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 245



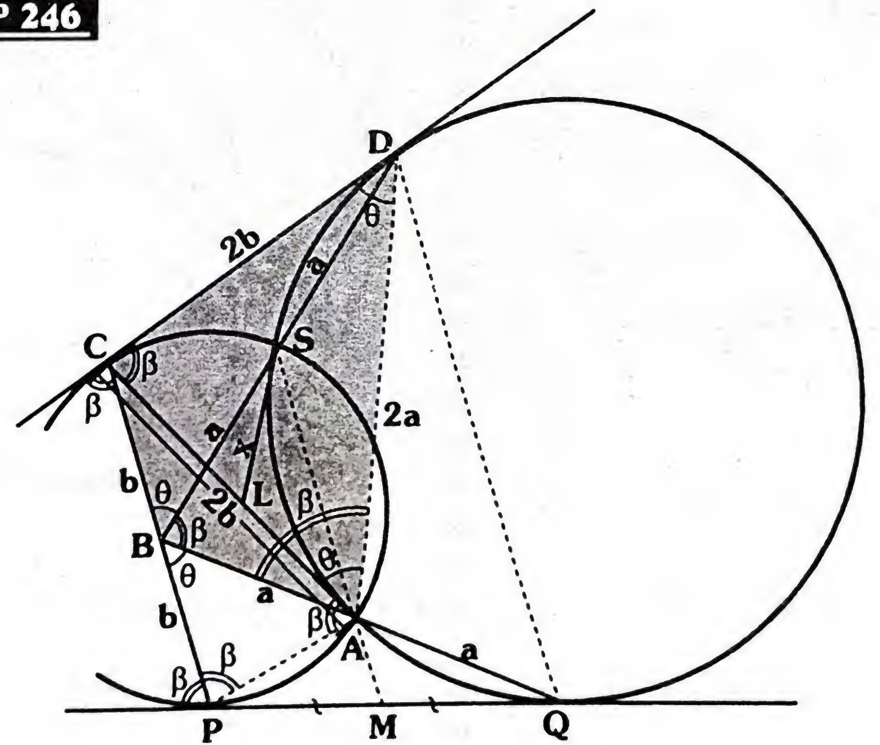
- Nos piden $\frac{x}{y}$
- En el ΔABD, por teorema de la mediana:

$$x^2 + (R\sqrt{2})^2 = 2y^2 + \frac{(2R)^2}{2} \Rightarrow x = y\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 246



- Piden: x
- Dato: $a^2 + b^2 = 16$
- Por teorema: CD = PQ ; $\overline{PC} // \overline{AS} // \overline{QD}$ y PM = MQ

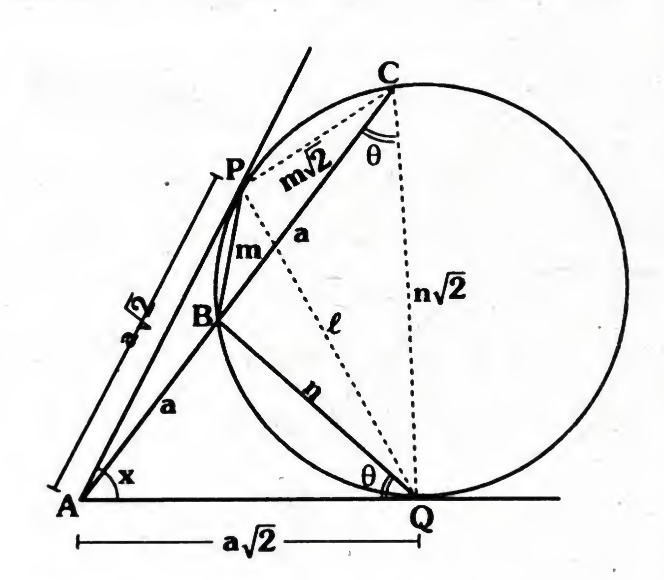
- $\Delta PBQ \cong \Delta CBD \Rightarrow PB = b$
- ΔPCA : isósceles $\Rightarrow PC = CA = 2b$
- $\triangle ABCD$: inscriptible
- ΔABD : isósceles $\Rightarrow AD = BD$
- Por teorema de Euler:

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{16} + \cancel{(2b)^2 + (2a)^2} = \cancel{(2a)^2 + (2b)^2} + 4x^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 247



- Nos piden: x
- Dato $m^2 + n^2 = 3mn$
- Por teorema de la tangente:

$$(AP)^2 = a(2a) \Rightarrow AP = a\sqrt{2}$$

- $\Delta ABQ \sim \Delta ACQ$:

$$\frac{CQ}{n} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \Rightarrow CQ = n\sqrt{2}$$

- En forma análoga: $PC = m\sqrt{2}$
- En $\triangle BPCQ$, usemos el teorema de Viette:

$$\frac{\ell}{a} = \frac{n(n\sqrt{2}) + m(m\sqrt{2})}{mn + (m\sqrt{2})(n\sqrt{2})}$$

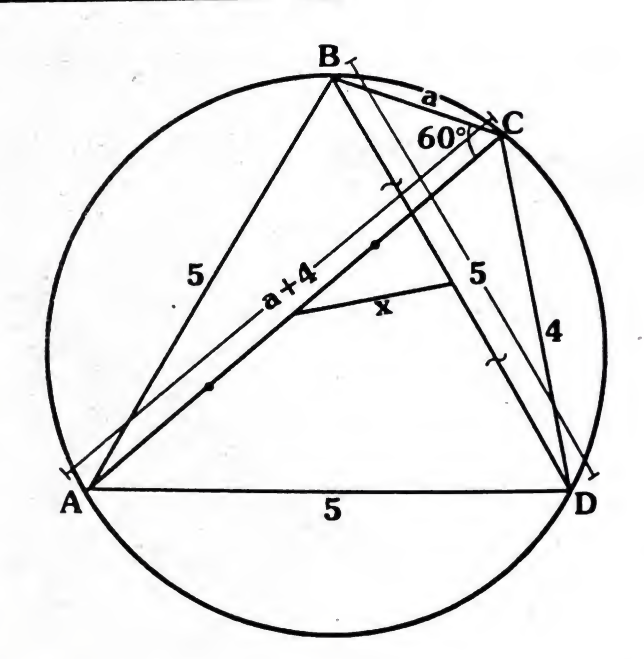
$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \underbrace{\left(\frac{m^2 + n^2}{3mn}\right)}_{1} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \ell = a\sqrt{2}$$

- ΔAPQ es equilátero:

$$\therefore \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 248



- Piden: x
- Por teorema de Chadú:

$$AC = a + 4$$

- Por teorema de Euler:

$$5^2 + 5^2 + a^2 + 4^2 = (a + 4)^2 + 5^2 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 25 - 8a = 4x^2$$

- En ΔABC, teorema de cosenos:

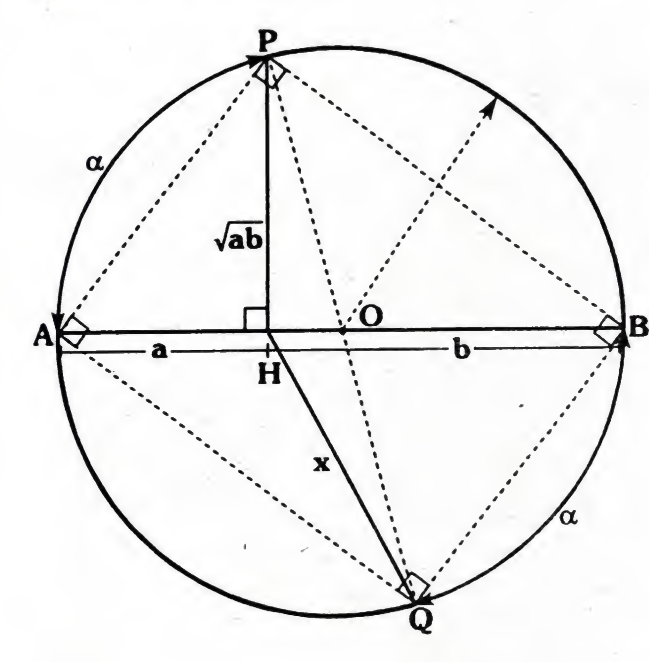
$$5^2 = a^2 + (a+4)^2 - a(a+4)$$

$$\Rightarrow \ a = \sqrt{13} - 2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{1}{2}\sqrt{41 - 8\sqrt{13}}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 249



- Piden: x
- Como $m\widehat{AP} = m\widehat{QB}$ ⇒ , P, O y Q son colineales ⇒ APBQ son colineales
- Por teoema:

$$(PH)^2 = ab \ \Rightarrow \ PH = \sqrt{ab}$$

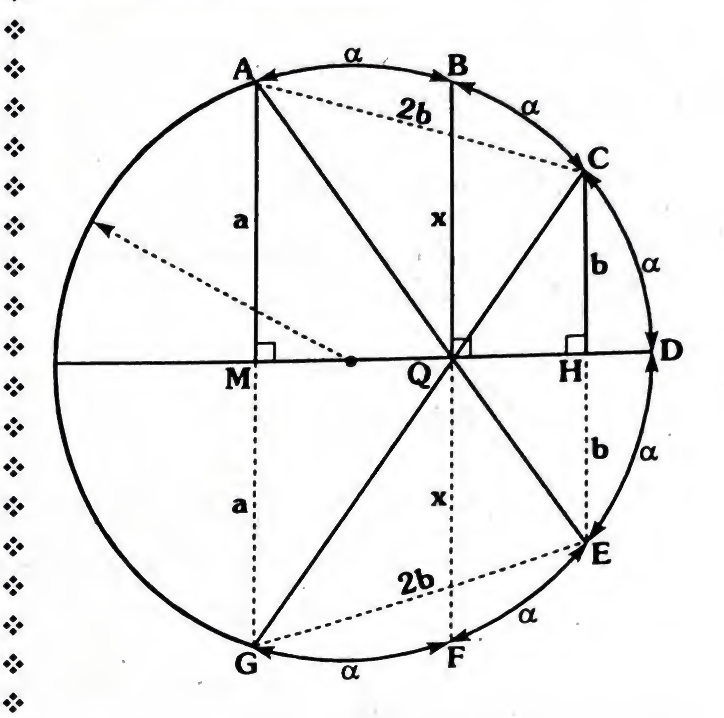
- Por teorema de Marlen:

$$x^2 + (\sqrt{ab})^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 250



- Piden: x
- Se completa la circunferencia, y prolongación $\overline{AM}$; $\overline{AM}$ y $\overline{CH}$.

$$\Rightarrow \ AM = MG = a \ ; \ CH = HE = b$$

- Como $m\widehat{AC} = m\widehat{CE} = m\widehat{EG}$

$$\Rightarrow \ AC = CE = EG = 2b$$

- Como ACEG es un trapecio isósceles

$$\Rightarrow \ AE = GC = 2x$$

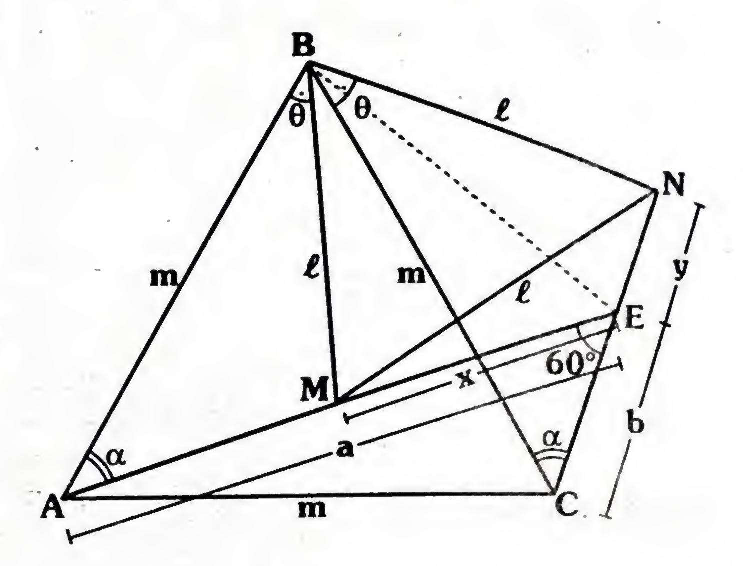
- Por teorema de Ptolomeo:

$$(2x)(2x) = (2a)(2b) + (2b)(2b)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{b(a+b)}}$$

Clave C

Resolución N° 251



- Piden: $x + y$
- $\Delta ABM \cong \Delta CBN (LAL)$

  $\Rightarrow$ m∢BAM = m∢BCE

  con ello los cuadriláteros ABEC y MBNE son inscriptibles.
- Por teorema de Chadú:

  $BE = x + y$

  $EB + b = a$

$\therefore$ $\mathbf{x + y = a - b}$

Clave C

Resolución N° 252

- Piden x ; dato $(PM)^2 - (AM)^2 = 16$
- $\Delta PBC \cong \Delta ABQ \cong \Delta PBQ$

  $\Rightarrow AQ = PC = PQ = 6$
- En ⊿ABC: $a^2 + b^2 = \ell^2$
- En ⏢APQC, por teorema de Euler:

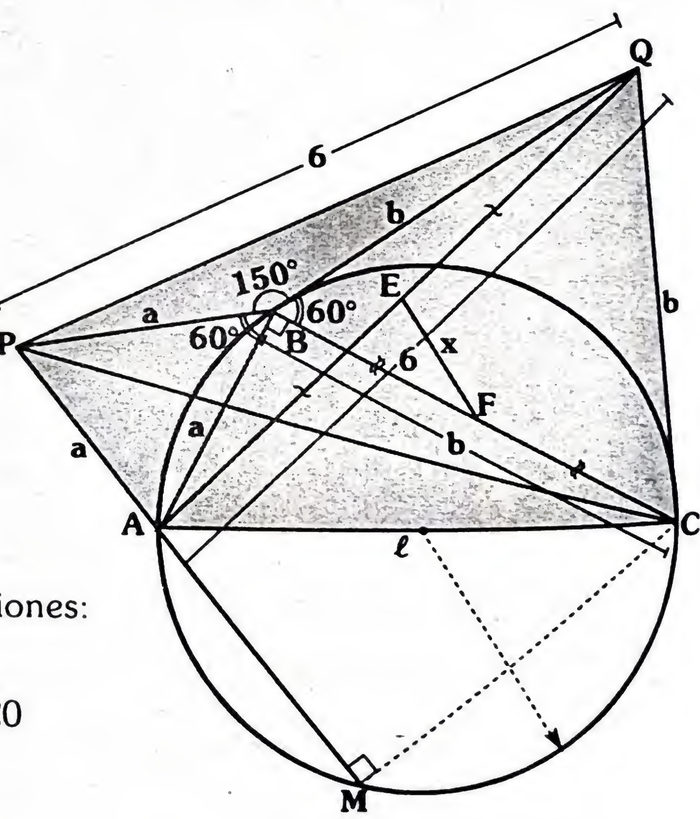
$$\underbrace{a^2 + b^2}_{\ell^2} + \ell^2 + 6^2 = 6^2 + 6^2 + 4x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2 - 18}{2} = x^2 \qquad \ldots (I)$$

- En ΔAPC , por teorema de las proyecciones:

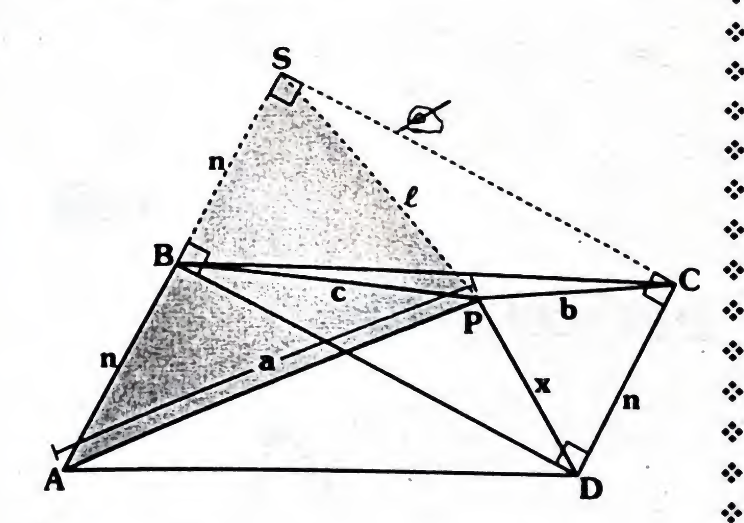
$$\underbrace{(PM)^2 - (AM)^2}_{16} = 6^2 - \ell^2 \quad \Rightarrow \quad \ell^2 = 20$$

- En (I): $\mathbf{x = 1}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 253



- Piden: x
- Dato: $a^2 + b^2 = 55$; $c^2 + 2n^2 = 30$
- Prolonguemos $\overline{AB}$ hasta S tal que $AB = BS = n$.
- Luego BSCD es rectángulo en por teorema de Marlen:

$$x^2 + \ell^2 = c^2 + b^2 \qquad \ldots (I)$$

- En ΔASP, por teorema de la mediana:

$$a^2 + \ell^2 = 2c^2 + \frac{(2n)^2}{2} \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

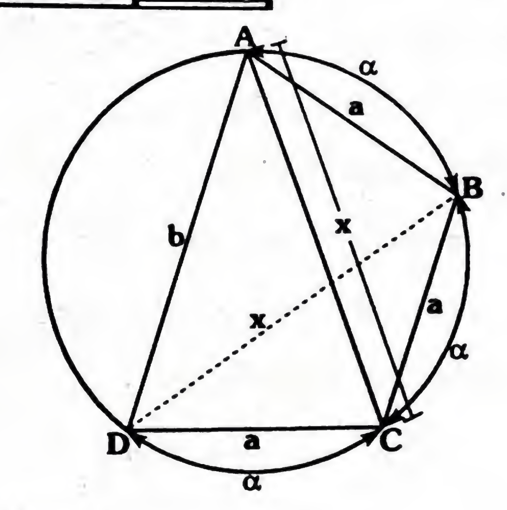
$$x^2 + 2c^2 + 2n^2 - a^2 = c^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{55} - (\underbrace{2n^2 + c^2}_{30})$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 254



- Piden: x
- Como $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD}$

$$\Rightarrow \quad AB = BC = CD = a$$

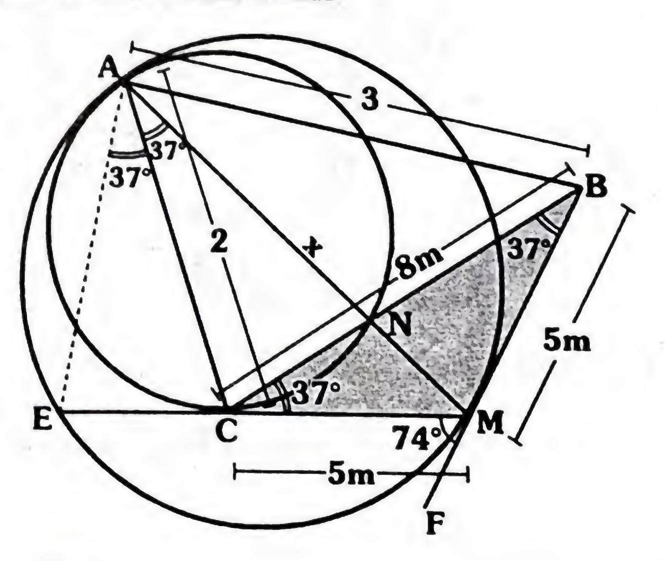
- ABCD es un trapecio isósceles, por teorema de Ptolomeo:

$$(x)(x) = (a)(a) + (ab)$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{a(a+b)}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 255



- Piden: x
- Por teorema de circunferencia,

$$m\measuredangle EAC = m\measuredangle CAM = 37°$$

- Como:

$m\sphericalangle EMF = 74° \Rightarrow m\sphericalangle CBN = 37°$

- ⌂ACBM: inscriptible:
- ΔCMB: isósceles con :

$m\sphericalangle MCB = m\sphericalangle CBM = 37°$

$\Rightarrow CM = MB = 5m \;\; y \;\; BC = 8m$

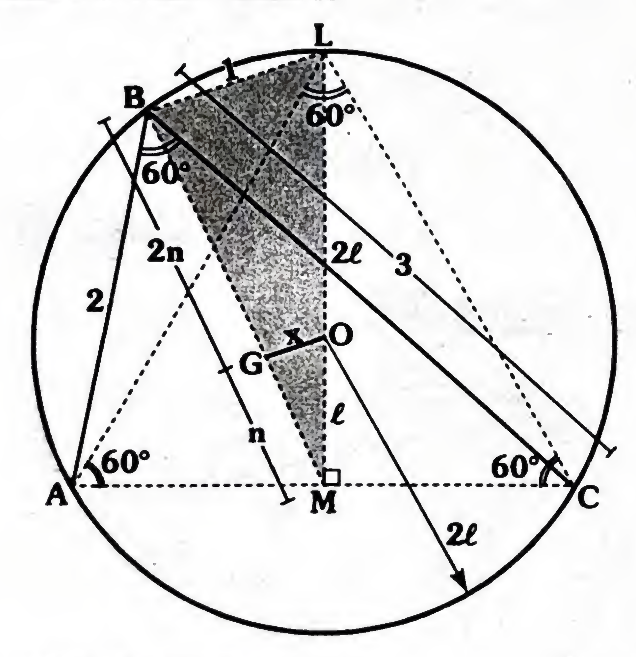
- Por teorema de Ptolomeo:

$x(8m) = 2(5m) + 3(5m)$

$\therefore \; \mathbf{x = \frac{25}{8}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 256



- Nos piden: x
- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AC} \Rightarrow \Delta ALC$ es equilátero.
- Por teorema de Chadú:

$BL + 2 = 3 \Rightarrow BL = 1$

- En ΔBML, $BG = 2(GM)$ y $CO = 2(OM)$

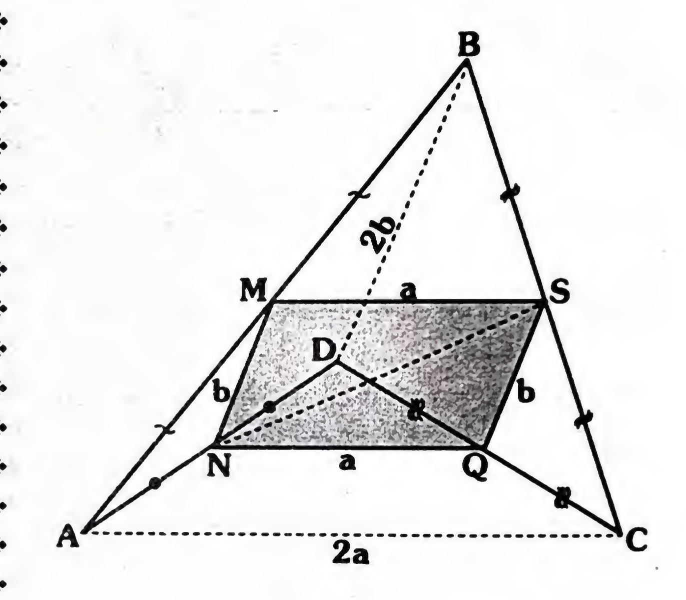
$\Rightarrow \overline{GO} // \overline{BL}$

$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{n}{3n}$

$\therefore \; \mathbf{x = \frac{1}{3}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 257



- Piden: $(MQ)^2 + (NS)^2$
- Dato: $(AC)^2 + (BD)^2 = 60$
- Por teorema MNQS es un paralelogramo.
- Del dato: $(2a)^2 + (2b)^2 = 60$

$\Rightarrow \; a^2 + b^2 = 15$

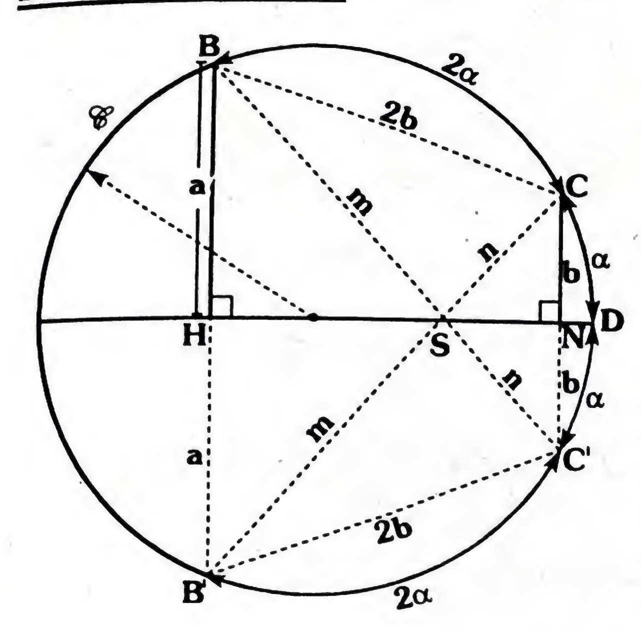
- Por teorema de Euler en el paralelogramo:

$(NS)^2 + (MQ)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$\therefore \; \mathbf{(MQ)^2 + (NS)^2 = 30}$

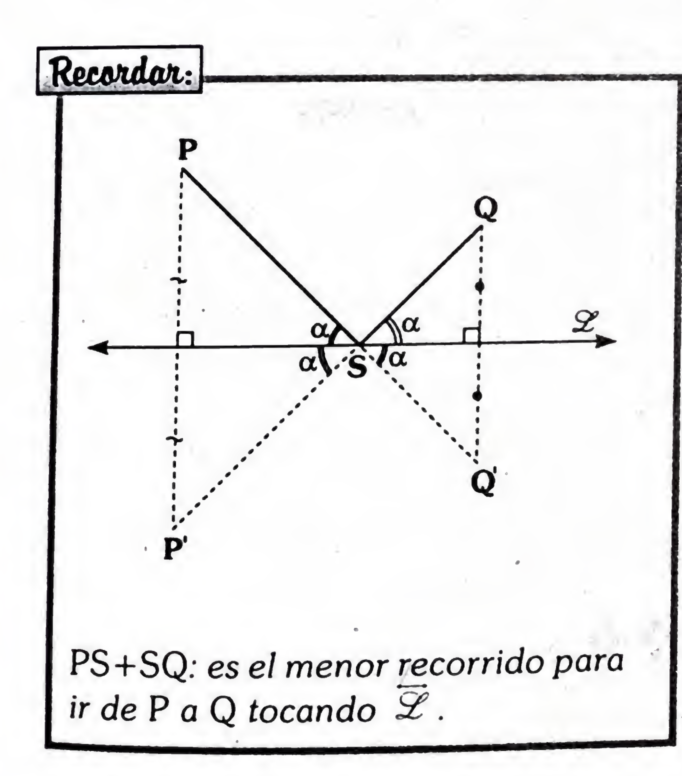
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 258



- Piden el menor recorrido para ir de B hacia C.

Recordar:



PS+SQ: *es el menor recorrido para ir de P a Q tocando* $\mathscr{L}$.

- Ubicando el simétrico de B y C especto a $\overline{AD}$, los cuales se encuentran $\mathscr{C}$.
- La longitud del menor recorido es "m+n", notar: $B'C = BC' = m + n$

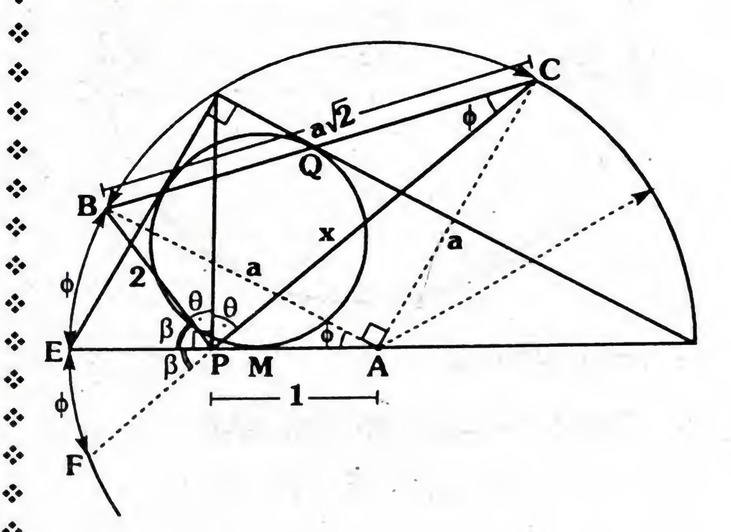
- Por teorema de Ptolomeo:

$$(m+n)(m+n) = (2a)(2b) + (2b)(2b)$$

$$\therefore\ \mathbf{m+n = 2\sqrt{b(a+b)}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 259



- Nos piden "x".
- Por propiedad : $m\widehat{BC} = 90°$

$\Rightarrow \measuredangle BAC$: notable de 45°

$\Rightarrow AB = AC$ y $BC = a\sqrt{2}$

- Como:

$m\sphericalangle BPE = m\sphericalangle EPF \Rightarrow m\widehat{EB} = m\widehat{EF}$

$\Rightarrow\ m\sphericalangle EAB = m\sphericalangle BCE = \phi$

Luego el $\triangle$PBCA es inscriptible

- Por teorema de Ptolomeo:

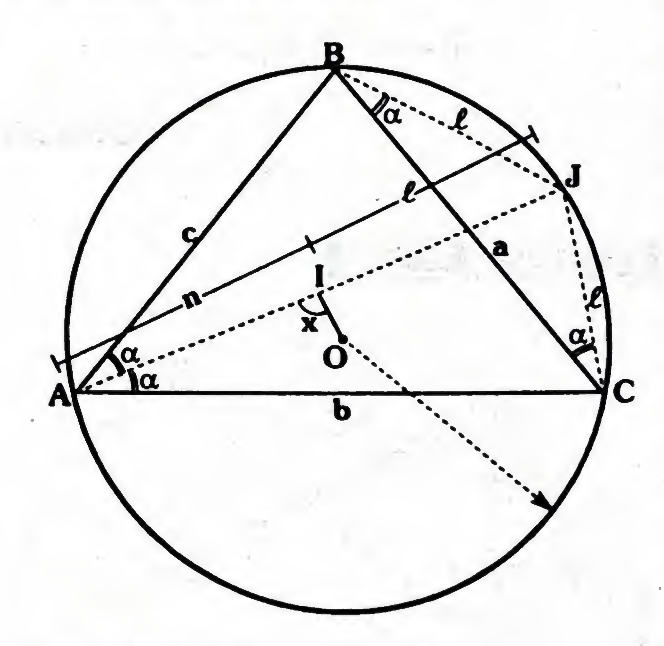
$$xa = 2a + 1(a\sqrt{2})$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 260

- Realicemos el gráfico:



- Analizando:
- Como I es incentro del ΔABC

$\Rightarrow$ $JB = JI = JC = \ell$

- Sea $m\measuredangle AIO = x$

$2a = b + c \Leftrightarrow x = 90°$

- Por teorema de Ptolomeo:

$(\Leftarrow)$ Si $x = 90° \Rightarrow n = \ell$

$a(2\ell) = b\ell + c\ell$

$\therefore \quad a = \dfrac{b+c}{2}$

$(\Leftarrow)$ Si $a = \dfrac{b+c}{2} \Rightarrow 2a+b+c$

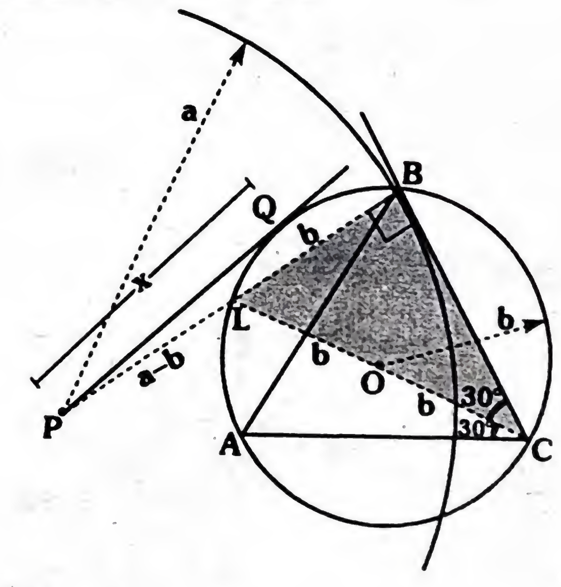
$a(\ell + n) = b\ell + c\ell$

$a(\ell + n) = \ell\underbrace{(b+c)}_{2a}$

$\Rightarrow \ell = n$

$\therefore$ $\mathbf{x = 90°}$

RESOLUCIÓN Nº 261



- Piden: x
- Como B es punto de tangencia:

$$\Rightarrow \ m\measuredangle PBC = 90°$$

- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (PB)(PL) \qquad \text{... (I)}$$

- Pero $PB = a$
- Como $m\measuredangle LBC = 90°$

$$\Rightarrow \ \overline{LC} \text{ es diámetro}$$

- El $\triangle LBC$ es notable de 30° y 60°

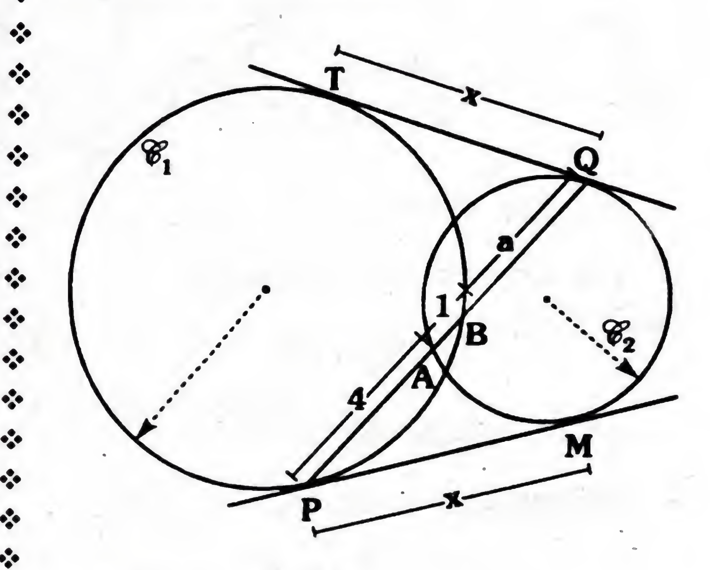
$$\Rightarrow \ LB = b \ \Rightarrow \ PL = a - b$$

- En (I): $x^2 = a(a - b)$

$$\mathbf{x = \sqrt{a(a-b)}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 262



- Piden: x
- Se sabe que:

$$TQ = PM$$

- Por teorema de la tangente:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &: x^2 = (QP)a \\ \mathscr{C}_2 &: x^2 = (QP)4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= 4 \\ \Rightarrow PQ &= 9 \end{aligned}$$

- Entonces reemplacemos:

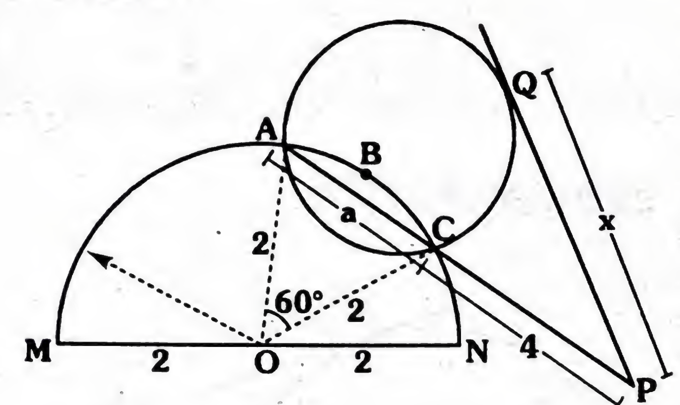
$$\mathscr{C}_1: \ x^2 = 9 \cdot 4$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 263

- Piden: x



- Piden: x
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = (4 + a)4 \qquad \ldots \text{(I)}$$

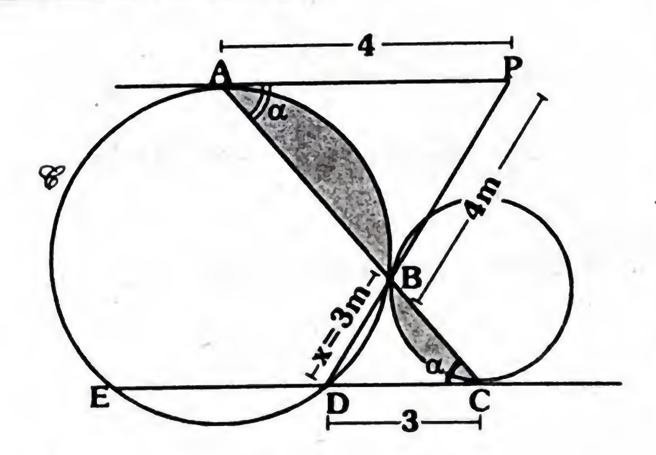
- ΔAOC : equilátero $a = 2$
- Reemplazando en (I):

$$x^2 = 6 \cdot 4$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 2\sqrt{6}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 264



- Piden: x
- Se sabe: $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$

$m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle BCD = \alpha$ y $\overline{AP} \,//\, \overline{CD}$

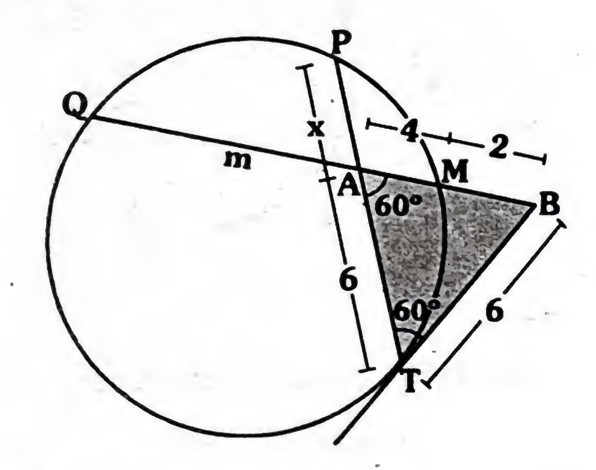
- $\Delta APB \sim \Delta CBD \Rightarrow \dfrac{PB}{BD} = \dfrac{4}{3}$
- En $\mathscr{C}$ teorema de la tangente:

$$4^{\not{2}} = (7m)(\not{4}m) \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 3\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{6\sqrt{7}}{7}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 265



- Piden: x
- ΔABT es equilátero
- Por teorema de cuerdas:

$$x \cdot 6 = 4 \cdot m \qquad \ldots \text{(I)}$$

- Por teoema de la tangente:

$$6^2 = (6 + m)2$$

$$\Rightarrow \; m = 12$$

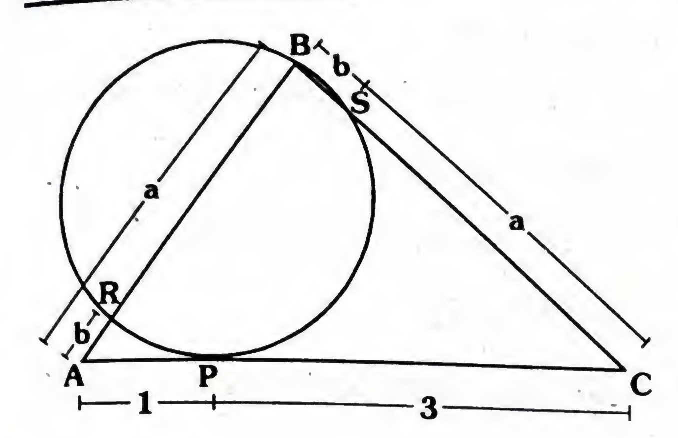
- Reemplazando en (I):

$$6x = (4)(12)$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 266



- Piden: b
- Por teorema de la tangente:

$$1^2 = a \cdot b \qquad \ldots(I)$$

$$3^2 = (a+b)a$$

$$9 = a^2 + \underbrace{ab}_{1} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

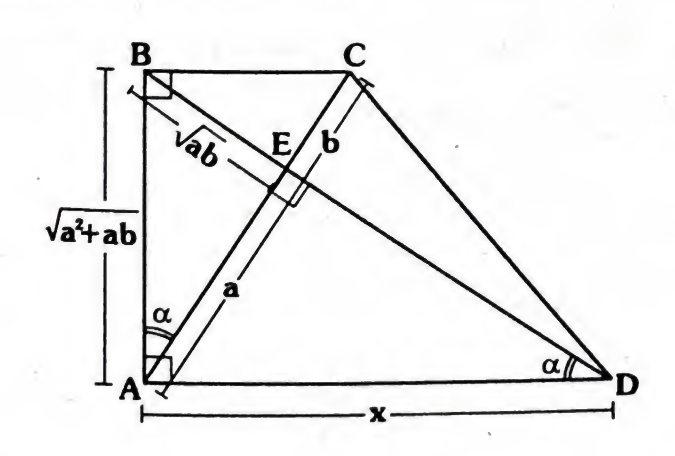
- Reemplazando en (I):

$$1 = 2\sqrt{2}b$$

$$\therefore \ \mathbf{b = \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 267



- Piden: x

- $\triangle ABC$: $(BE)^2 = ab$

$$BE = \sqrt{ab}$$

- $\triangle AEB$: $(AB)^2 = a^2 + \sqrt{ab}^2$

$$AB = \sqrt{a^2 + ab}$$

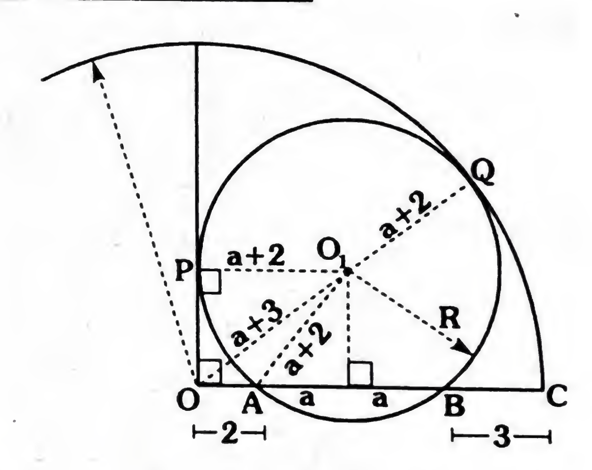
- $\triangle AED \sim \triangle BEA$

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{a^2+ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = a\sqrt{\frac{a+b}{b}}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 268



- Piden: $R = a + 2$
- Se sabe O, O_1 y Q colineales:
- ΔOO_1A : teorema de proyecciones

$$(a+3)^2 - (a+2)^2 = (a+2)^2 - a^2$$

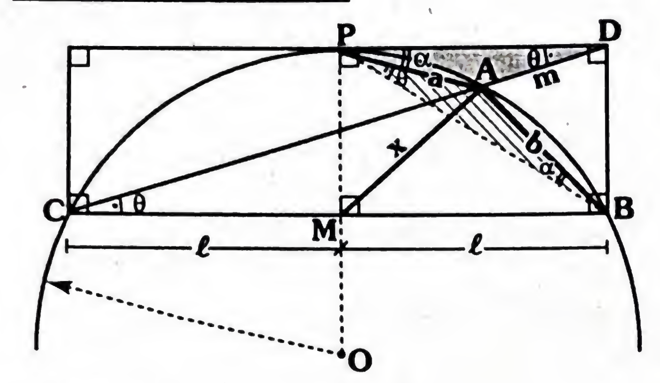
$$(2a+5) \cdot 1 = (2a+2) \cdot 2$$

$$a = 1/2 = 0,5$$

$$\mathbf{R = 0,5 + 2 = 2,5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 269



- Piden x
- Como: CM = MB ⇒ P , M y O: colineales
- En el rectángulo PDBM, teorema de Marlen:

$$x^2 + m^2 = a^2 + b^2 \qquad \ldots(I)$$

- $\Delta PAD \sim \Delta PAB$:

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow m = \frac{a^2}{b} \qquad \ldots(II)$$

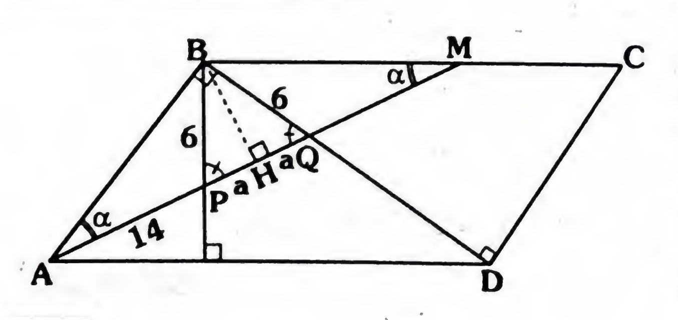
- (II) en (I):

$$x^2 + \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^4 - a^4}}{b}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 270



- Piden: PQ = 2a
- Se deduce:

$$m\measuredangle BPM = m\measuredangle BQA = 90° - \alpha$$

- ΔPBQ : isósceles

$\Rightarrow \overline{BH}$ es altura y mediana

$\Rightarrow PH = HQ$

- ◺ABQ, relaciones métricas en el ◺:

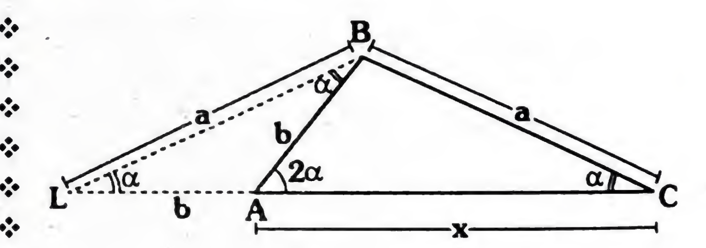
$$6^2 = a(2a + 14)$$

$$\Rightarrow \ a = 2$$

$$\therefore \ \mathbf{PQ = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271



- Piden: x
- Dato: $a^2 - b^2 = 8b$
- Trazamos la ceviana exterior $\overline{BL}$ tal que ΔBLC y el ΔLAB sean isósceles:
- ΔLBC : teorema de Stewart:

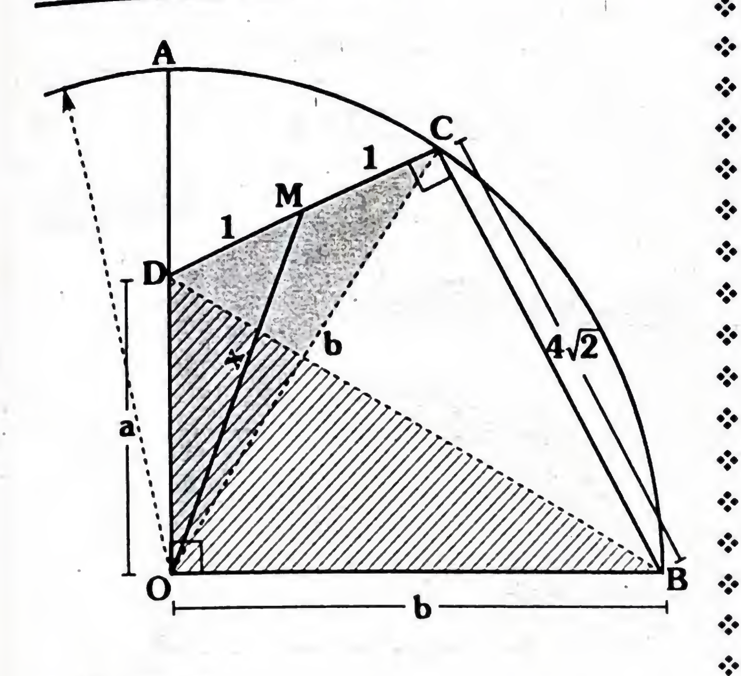
$$b^2 = a^2 - xb$$

$$\Rightarrow \ x\cancel{b} = \underbrace{a^2 - b^2}_{8\cancel{b}}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 272



- Piden: x
- ΔDOC : teorema del cálculo de la mediana .

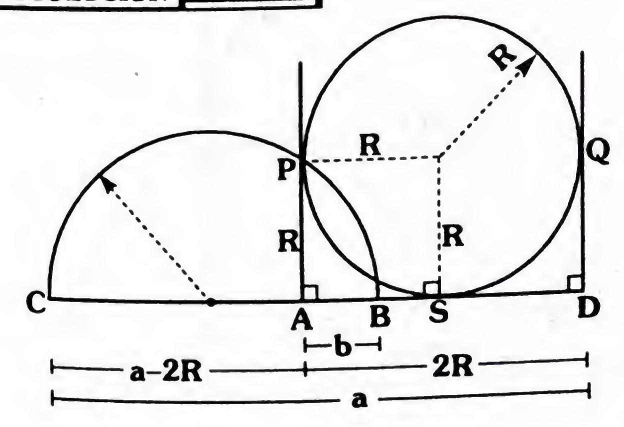
$$a^2+b^2=2x^2+\frac{2^2}{2} \qquad \ldots \text{(I)}$$

- ⊿DCB: DB = 6
- ⊿DOB: $a^2+b^2=36$
- En (I): $36=2x^2+2$

$$\therefore\ \mathbf{x=\sqrt{17}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 273



- Piden: R
- Se deduce AD = 2R

$$R^2=(a-2R)b$$

$$R^2=ab-2Rb$$

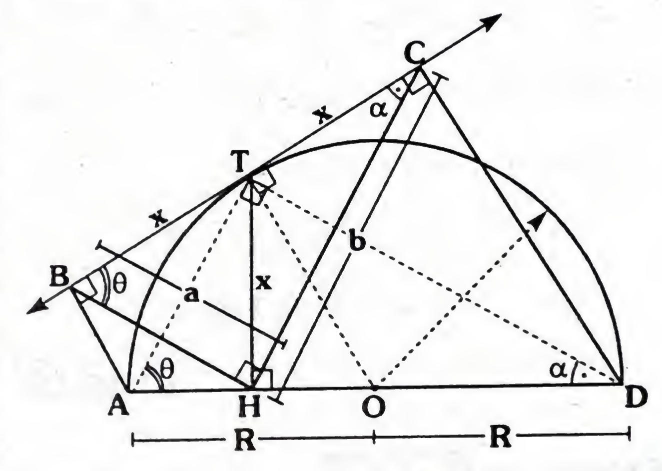
$$R^2+2Rb+b^2=ab+b^2$$

$$(R+b)^2=b(a+b)$$

$$\mathbf{R=\sqrt{b(a+b)}-b}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 274



- Piden: x
- Dato: $a^2+b^2=k$
- En el trapecio ABCD, $\overline{OT}$ es base media ⇒ BT = TC .
- ⏢ABTH y ⏢HTCD son inscriptibles

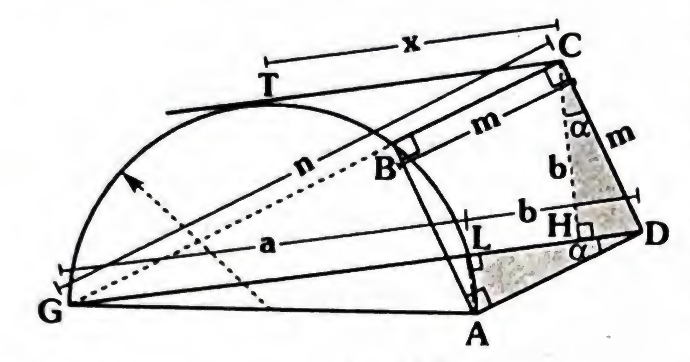
$$\Rightarrow\ m\measuredangle HBT=\theta \text{ y } m\measuredangle TCH=\alpha$$

- Como $\alpha+\theta=90^\circ \Rightarrow m\measuredangle BHC=90^\circ$
- ⊿BHC: $(2x)^2=\underbrace{a^2+b^2}_{k}$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{\sqrt{k}}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 275



- Piden: x
- Por teorema de la tangente:

$$x^2 = m \cdot n \quad \text{... (I)}$$

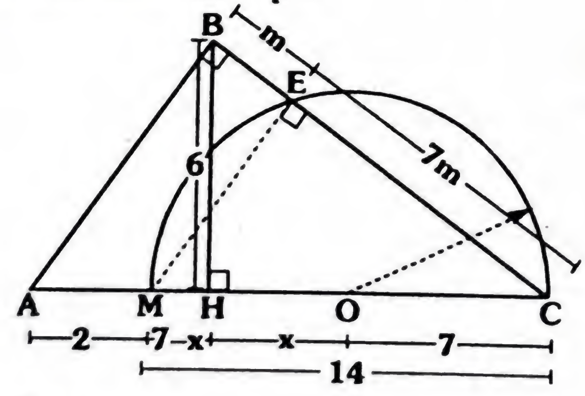
- $⊿CHD \cong ⊿ALD \Rightarrow CH = LD = b$
- $⊿GCD$: $n \cdot m = b(a+b)$ ...(II)
- Reemplazando (II) en (I):

$$x^2 = b(a+b)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{b(a+b)}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 276



- Piden: x
- $⊿ABC$: por corolario del teorema de Tales:

$$\frac{2}{MC} = \frac{m}{7m} \Rightarrow MC = 14$$

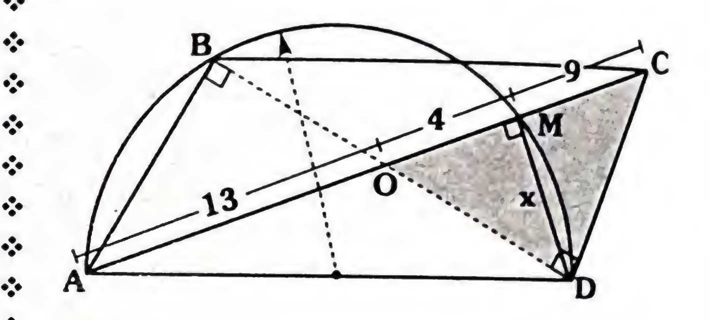
- $⊿ABC$: relaciones métricas en el ⊿:

$$6^2 = (9-x)(7+x)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2\sqrt{7} + 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 277



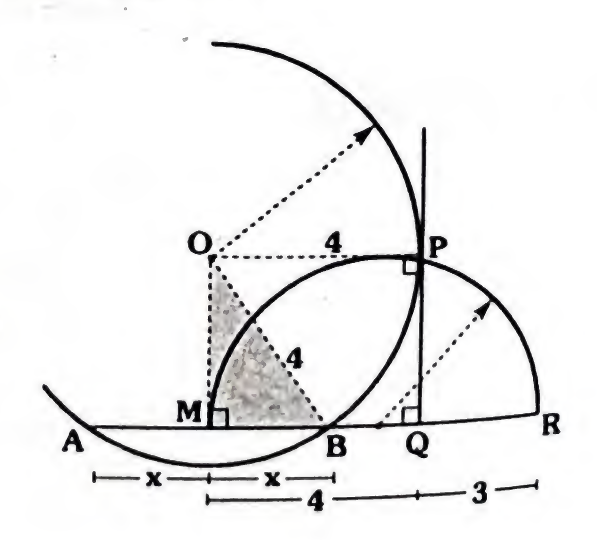
- Piden: x
- Se sabe: $m\measuredangle ABD = 90°$
- Además: $AO = OC = 13$
- $⊿ODC$: relaciones métricas :

$$x^2 = 4 \cdot 9$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 278



- Piden: x
- Por teorema:

$$(PQ)^2 = (3)(4) \Rightarrow PQ = 2\sqrt{3}$$

- OPQM:

rectángulo $\Rightarrow$ $OP = 4$

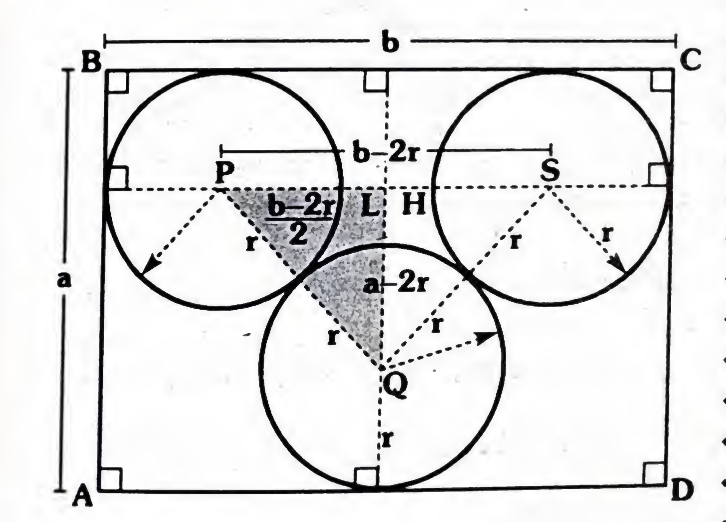
- En ⊿ OMB:

$$(2\sqrt{3})^2 + x^2 = 4^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 279



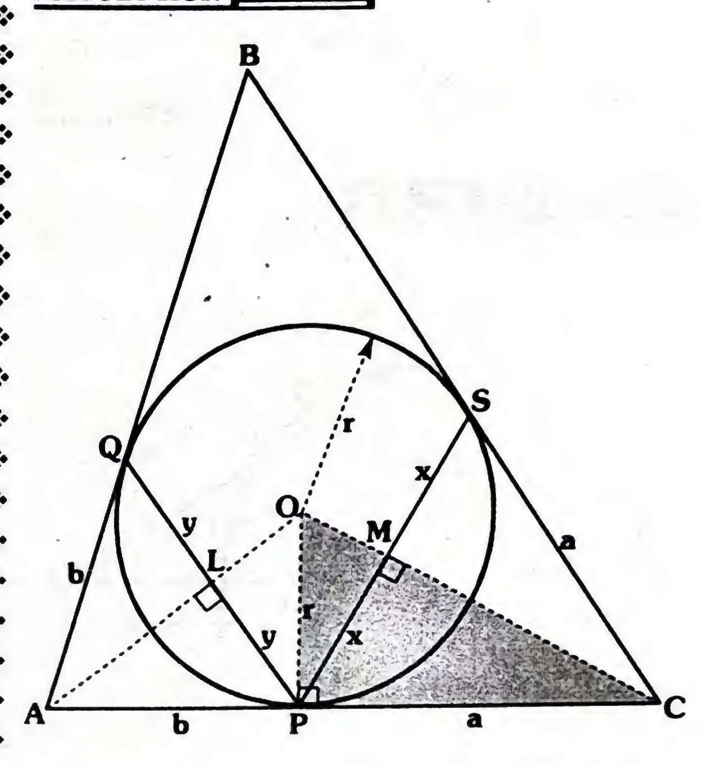
- Piden "r" en función de "a" y "b".
- ΔPQS : isósceles
- ⊿PHQ:

$$(a-2r)^2 + \left(\frac{b-2r}{2}\right)^2 = (2r)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{r = 2a + \frac{b}{2} - \sqrt{a(3a+2b)}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 280



- Dato: $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = k\left[\dfrac{1}{(PS)^2} - \dfrac{1}{(PQ)^2}\right]$
- Nos piden: k
- Por teorema de circunferencia:

$AP = AQ = b$; $PC = CS = a$

$QL = LP = y$; $PM = MS = x$

- Del dato:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{k}{4}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \quad \ldots \text{(I)}$$

- En ⊿ APO y ⊿ OPC:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{y^2}$$

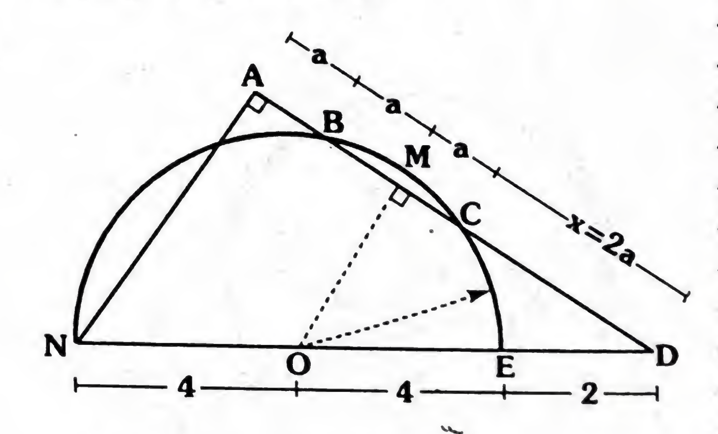
$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$k = 4$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 281



- Nos piden: x
- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AD}$

$$\Rightarrow \frac{x+a}{2a} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 2a$$

- Por teorema de la secante:

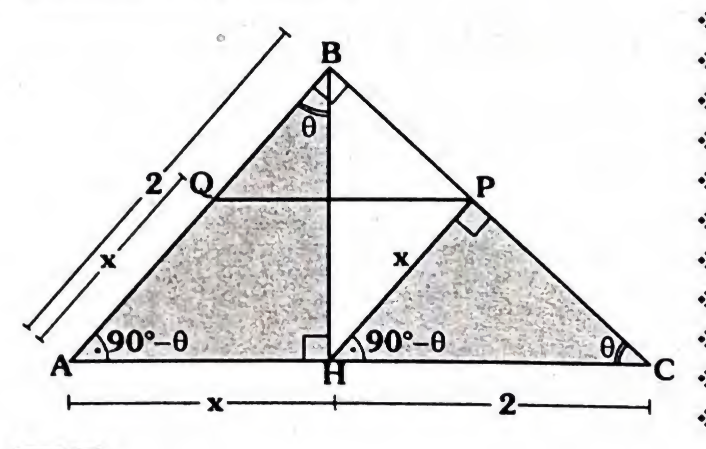
$$(2a)(4a) = 2(10)$$

$$2a = \sqrt{10}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{10}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 282



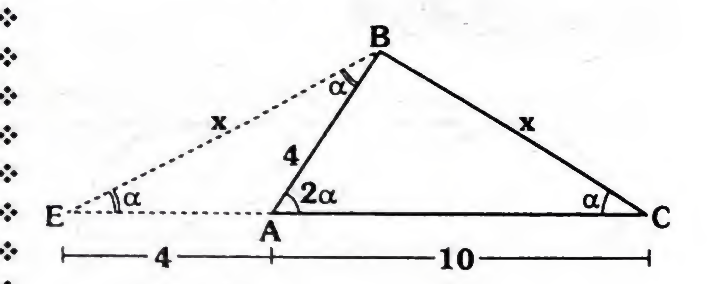
- Piden: x
- $\triangle AHB \cong \triangle HPC \Rightarrow HC = AB = 2$
- En $\triangle ABC$:

$$2^2 = x(x+2)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{5} - 1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 283



- Piden: x
- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta E, tal que:

$m\measuredangle CEB = \alpha \Rightarrow \Delta EBC$ y ΔAEB son isósceles

$\Rightarrow AB = AE = 4$ y $EB = BC = x$

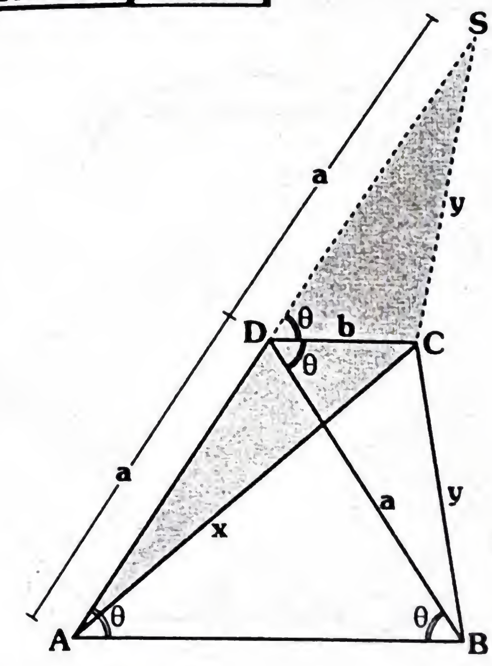
- Por teorema de Stewart, para el Δ isósceles, en ΔEBC:

$$x^2 - 4^2 = (4)(10)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2\sqrt{14}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 284



- Piden: x^2+y^2
- ΔADB : isósceles
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta S tal que:

$DS=a \Rightarrow \Delta SDC \cong \Delta BDC$

$\Rightarrow CB=CS=y$

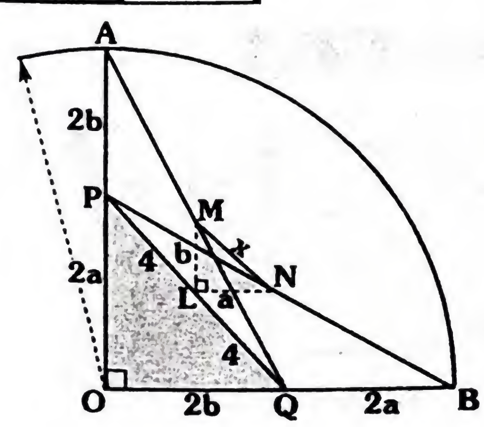
- En ΔACS : teorema de la mediana:

$$x^2+y^2=2b^2+\frac{(2a)^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x^2+y^2=2(a^2+b^2)}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 285



- Piden: x
- En el ΔPAQ y ΔPQB se trazan las bases medias $\overline{ML}$ y $\overline{LN}$ respectivamente, entonces:

$$ML=\frac{AP}{2}\ ;\ LN=\frac{QB}{2}\ ;\ \overline{AP}/\!/\overline{ML}$$

y $\overline{LN}/\!/\overline{QB} \Rightarrow m\sphericalangle MLN=90°$

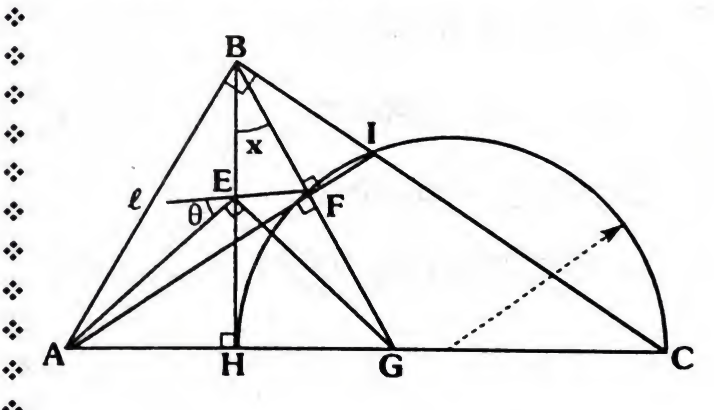
- $\triangle MLN$: $x^2=a^2+b^2$ ... (I)
- $\triangle POQ$: $(2a)^2+(2b)^2=8^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2=16$$

$$\therefore\ \mathbf{x=4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 286



- Piden x en función de θ.
- En $\triangle ABC$: $\ell^2=(AH)(AC)$
- Teorema de la secante:

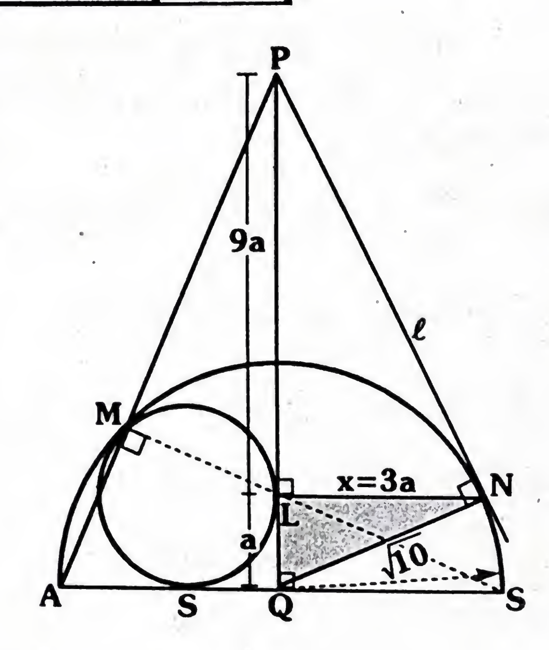
$(AH)(AC)=(AF)(AI) \Rightarrow \ell^2=(AF)(AI)$

- En $\triangle ABI$, $\overline{BF}$ es altura $\Rightarrow$ ⏢AEFG es inscriptible $\Rightarrow m\sphericalangle AGF=\theta$

$$\therefore\ \mathbf{x=90°-\theta}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 287



- Piden: x
- Por teorema de circunferencia: M, L y S colineales
- Teorema de la tangente:

$$\ell^2 = (PM)(PA) \qquad \dots \text{(II)}$$

- ⌂AMLQ: inscriptible

$$\Rightarrow (PM)(PA) = (PL)(PQ) \qquad \dots \text{(II)}$$

- De (I) y (II): $\ell^2 = (PL)(PQ)$
- En ⊿QNP: $\overline{NL}$ es altura

$$\Rightarrow x^2 = a(9a) \Rightarrow x = 3a$$

- En ⊿QLN:

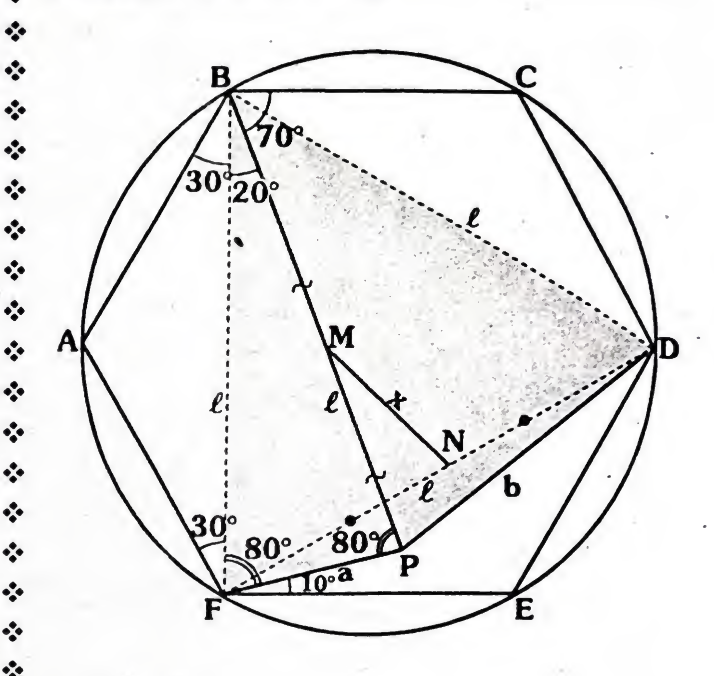
$$a^2 + (3a)^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 288



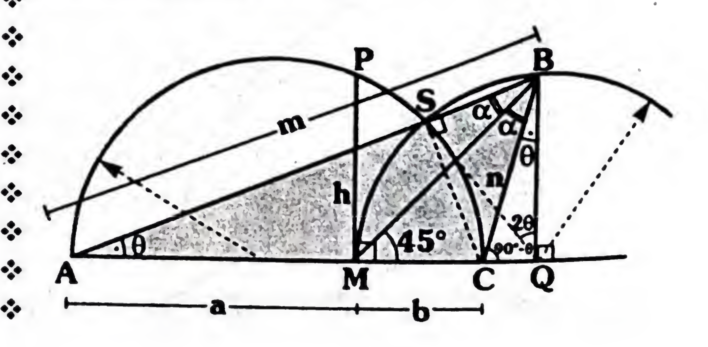
- Piden: x
- Dato: $a^2 + b^2 = 36$
- Deducimos rápidamente, que el ΔFPB es isósceles y el ΔFBD es equilátero.
- En ⌂FBDP, como M y N son puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{FD}$ por teorema de Euler:

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{36} + \cancel{\ell^2 + \ell^2} = \cancel{\ell^2 + \ell^2} + 4x^2$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 289



- Piden MB
- Dato: $mn - h^2 = k$
- Sea: $m\sphericalangle BAC = \theta$ y $m\sphericalangle ABM = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 45°$$

- $m\sphericalangle ABQ = 90° - \theta \Rightarrow m\sphericalangle SQB = 2\theta$
- ⌂CSBQ: inscriptible

$$\Rightarrow m\sphericalangle BCQ = 90° - \theta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CBQ = \theta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CBM = \alpha$$

luego $\overline{BM}$ es bisectriz interior para el ΔABC.

- Por teorema del cálculo de la bisectriz:

$$(MB)^2 = mn - \underbrace{ab}_{h^2} \Rightarrow (MB)^2 = mn - h^2$$

$$\therefore \mathbf{MB = \sqrt{k}}$$

Clave A

- Nos piden: x
- Dato: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$
- Aprovechemos las propiedades del heptágono regular:

$$BD = DF = b$$

$$FB = FC = a$$

- En ⌂ABCD, por teorema de Euler:

$$a^2 + b^2 + \ell^2 + \ell^2 = a^2 + b^2 + 4x^2$$

$$\Rightarrow \ell = 2x$$

- En ⌂ABCD, por teorema de Ptolomeo:

$$a\ell + b\ell = ab$$

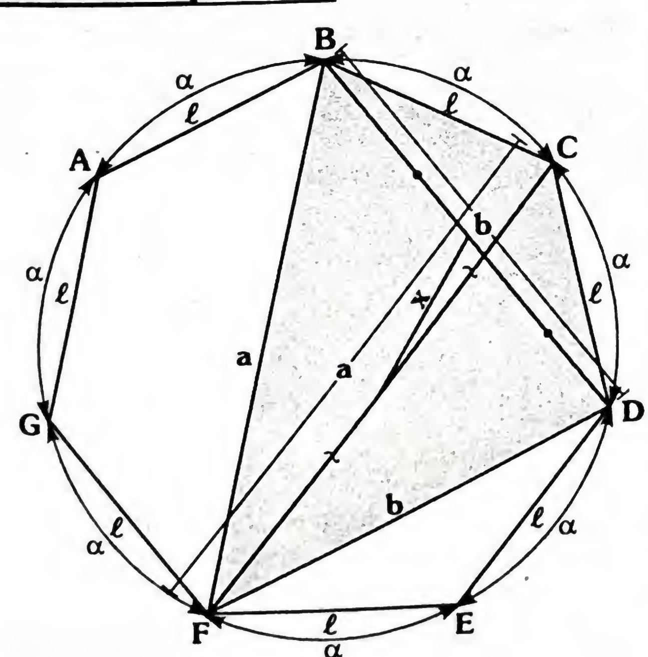
$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\ell}$$

$$\Rightarrow \ell = 2$$

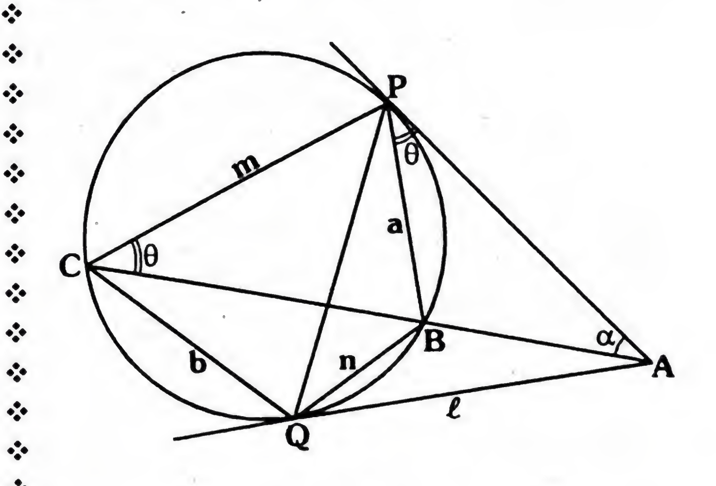
$$\therefore \mathbf{x = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 290



RESOLUCIÓN Nº 291



- Nos piden (BC)(PQ) ;
- Dato $ab = k$

- $\Delta CPA \sim \Delta APB \Rightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{AB}{\ell}$ ... (I)

- Análogamente: $\dfrac{n}{b} = \dfrac{AB}{\ell}$ ...(II)

- De (I) y (II):

$$\frac{a}{n} = \frac{n}{b} \Rightarrow mn = ab$$

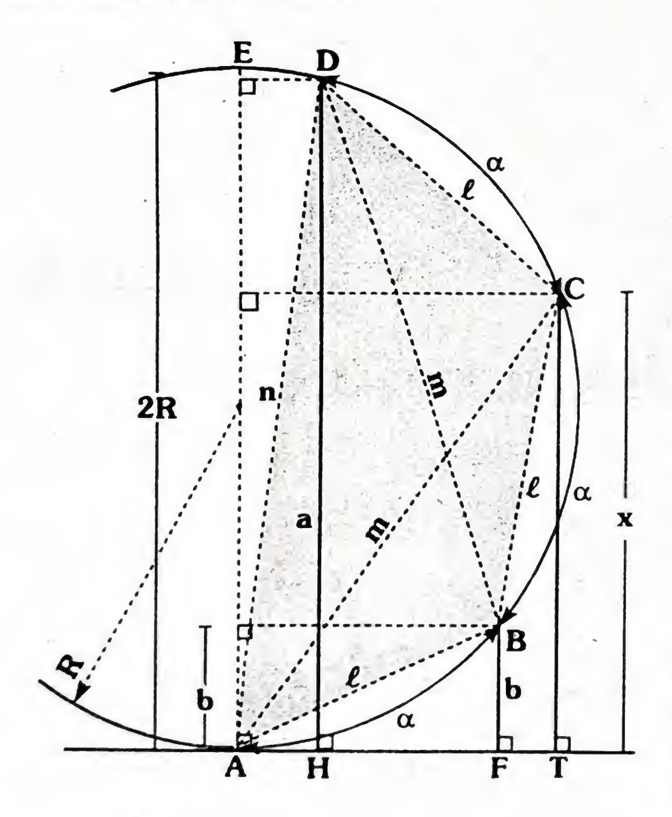
- En ⌂CPBQ: teorema de Ptolomeo:

$$\underbrace{ab + mn}_{} = (BC)(PQ)$$

$$2k = (BC)(PQ)$$

Clave A

Resolución Nº 292



- Nos piden: x
- Por teorema:

$$\ell^2 = b2R \; ; \; m^2 = x2R \; ; \; n^2 = a2R$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{b} = \frac{m^2}{x} = \frac{n^2}{a} = k$$

$$\ell = \sqrt{bk} \; ; \; m = \sqrt{xk} \; \text{ y } \; n = \sqrt{ak}$$

- En ⌂ADCB: teorema de de Ptolomeo:

$$\underbrace{(m)(m)}_{} = n\ell + \ell^2$$

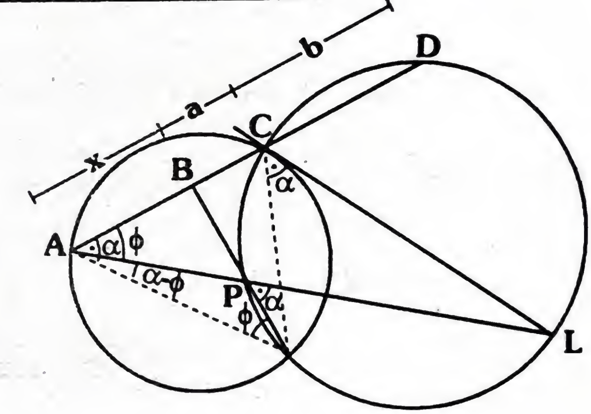
$$kx = \sqrt{ak}\sqrt{bk} + bk$$

$$x = b + \sqrt{ab}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

Clave D

Resolución Nº 293



- Nos piden: x
- Primero, completemos ángulos:

$$m\measuredangle QAC = m\measuredangle QCL = m\measuredangle QPL = \alpha$$

$\Rightarrow \; m\measuredangle AQB = m\measuredangle PAB = \phi$

- Por teorema en el ΔABQ:

$$x^2 = (BP)(BQ)$$

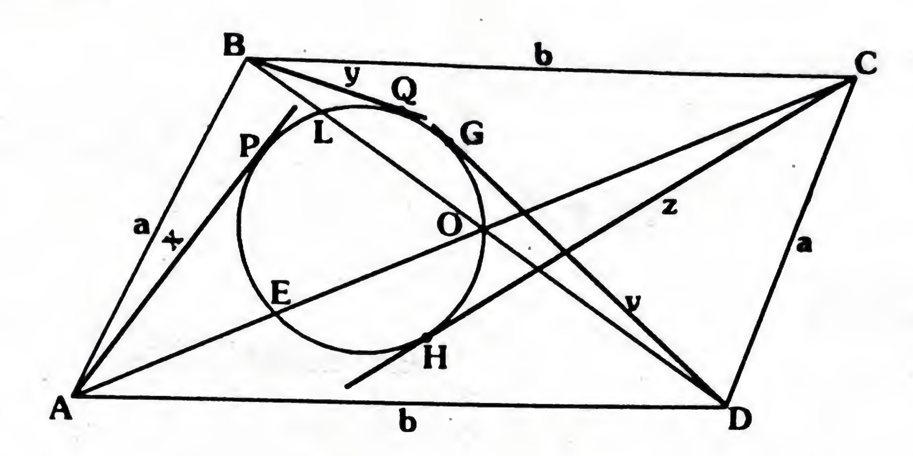
- Por teorema de la secante:

$$\underbrace{(BP)(BQ)}_{x^2} = \underbrace{(BC)(BD)}_{a(a+b)}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{a(a+b)}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 294



- Piden: $a^2 + b^2$; Dato: $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 200$

- Por teorema de la tangente: $\left.\begin{array}{l} x^2 = (AE)(AO) \\ z^2 = (CO)(CE) \end{array}\right\}$ $x^2 + z^2 = \dfrac{AC}{2}(AE + EC)$ $\Rightarrow x^2 + z^2 = \dfrac{AC}{2}$

- Análogamente:

$$y^2 + v^2 = \frac{(BD)^2}{2} \Rightarrow \frac{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 + v^2}_{200}}{} = \frac{(AC)^2 + (BD)^2}{2} \Rightarrow (AC)^2 + (BD)^2 = 400$$

- Por teorema de Euler, para el paralelogramo: $(AC)^2 + (BD)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$\therefore\ \mathbf{a^2 + b^2 = 200}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 295

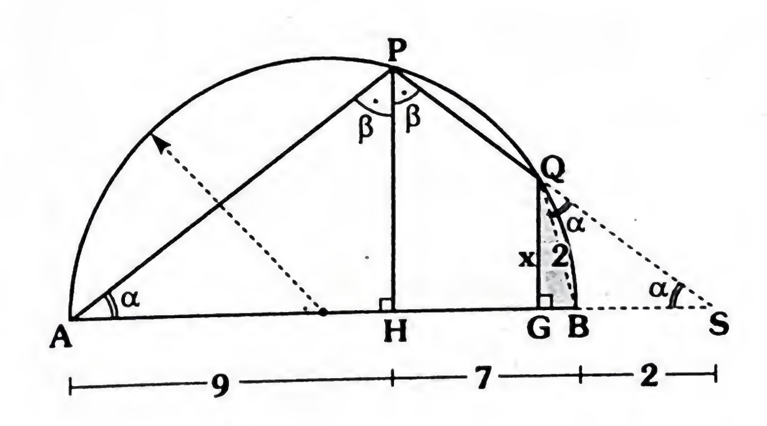
- Piden: x

- Al prolongar $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$ hasta que se corten en S, tendremos que ΔAPS es isósceles, entonces:

$$AH = HS \Rightarrow BS = 2$$

- ⏢APQB: inscrito

$$\Rightarrow m\measuredangle BQS = \alpha \Rightarrow QB = BS = 2$$



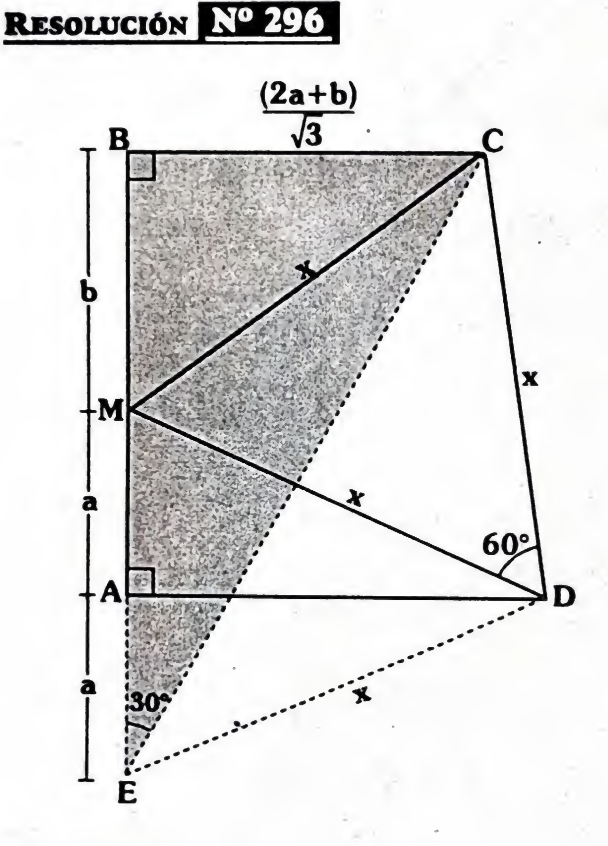
- Por teorema:

$$(QB)^2 = (GB)(BA) \Rightarrow GB = \frac{1}{4}$$

- En ⊿QGB: $\mathbf{x = \frac{3}{4}\sqrt{7}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 296



- Nos piden: x
- Prolongemos $\overline{BA}$ hasta E, tal que:

$$MA = AE = a \Rightarrow DE = x$$

- Como:

$$DC = DM = DE \Rightarrow m\measuredangle MEC = 30°$$

- ⊿EBC, notable de 30°

$$\Rightarrow BC = \frac{(2a+b)}{3}$$

- En ⊿MBC:

$$x^2 = b^2 + \frac{(2a+b)^2}{3}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+b^2+ab)}}$$

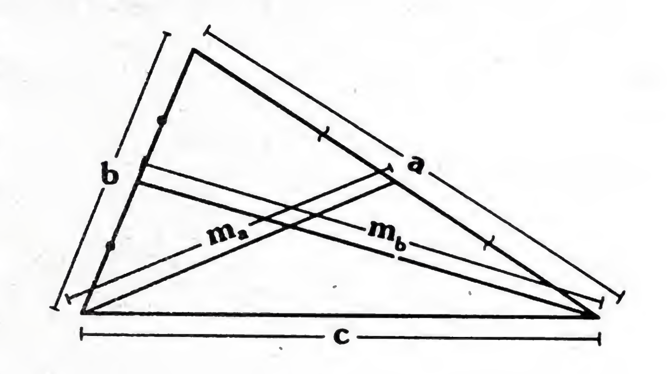
Clave E

RESOLUCIÓN Nº 297

I. FALSO:

Se puede demostrar haciendo algunas construcciones, pero optemos por:

- Sea: a>b



- Teorema de la mediana:

$$- \quad b^2 + c^2 = 2(m_a)^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2(m_a)^2 + \frac{3}{2}a^2$$

$$- \quad a^2 + c^2 = 2(m_b)^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2(m_b)^2 + \frac{3}{2}b^2$$

- Luego:

$$2(m_a)^2 + \frac{3}{2}a^2 = 2(m_b)^2 + \frac{3}{2}b^2$$

- Como: $a > b \Rightarrow \frac{3}{2}a^2 > \frac{3}{2}b^2$

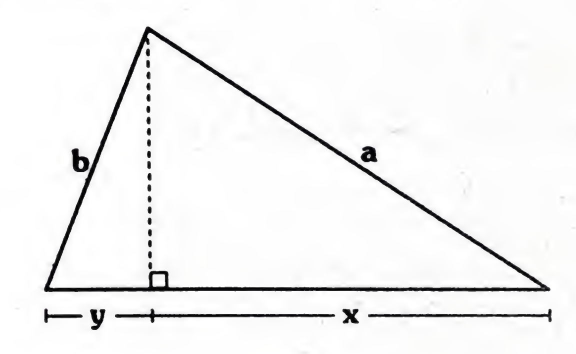
$$\Rightarrow 2(m_b)^2 > 2(m_a)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{m_b > m_a}$$

II. VERDADERO

(Ver pág. 65)

III. VERDADERO



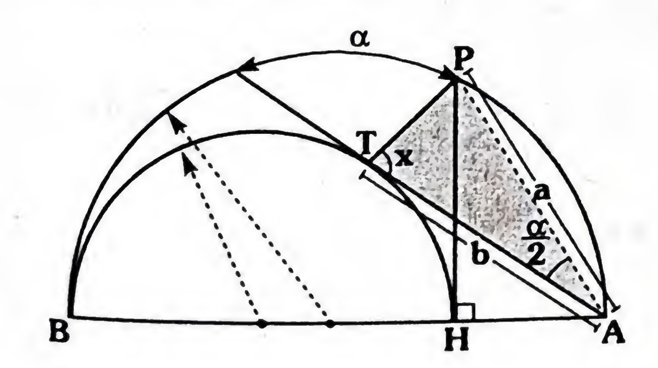
- Sea: $a > b \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$
- Por teorema de las proyecciones:

$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0$$

$$\therefore \ \mathbf{x > y}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 298



- Piden: x
- Por teorema de la tangente:

$$b^2 = (AH)(AB) \quad \text{... (I)}$$

- En la semicircunferencia mayor

$$a^2 = (AH)(AB) \quad \text{... (II)}$$

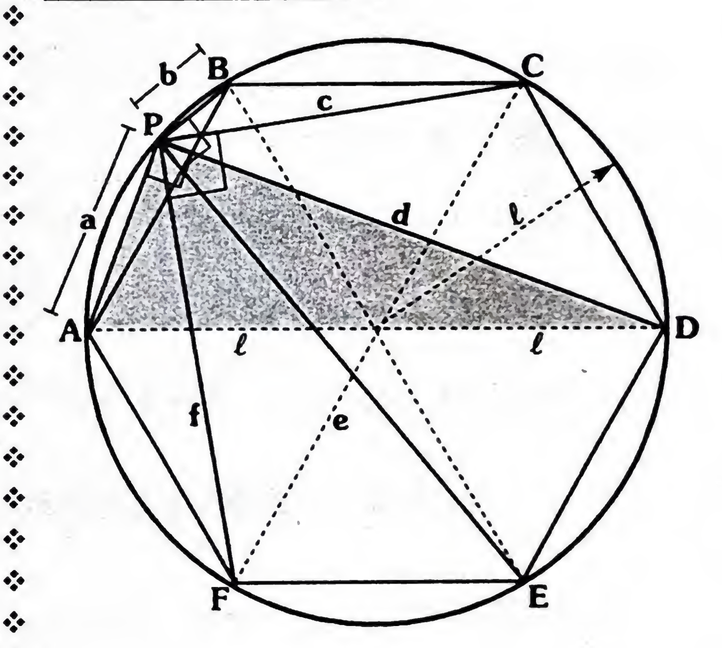
- De (I) y (II): $a = b$
- ΔATP : isósceles

$$\Rightarrow 2x + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 299



- Piden: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$
- En $\triangle APD$: $a^2 + d^2 = (2\ell)^2$

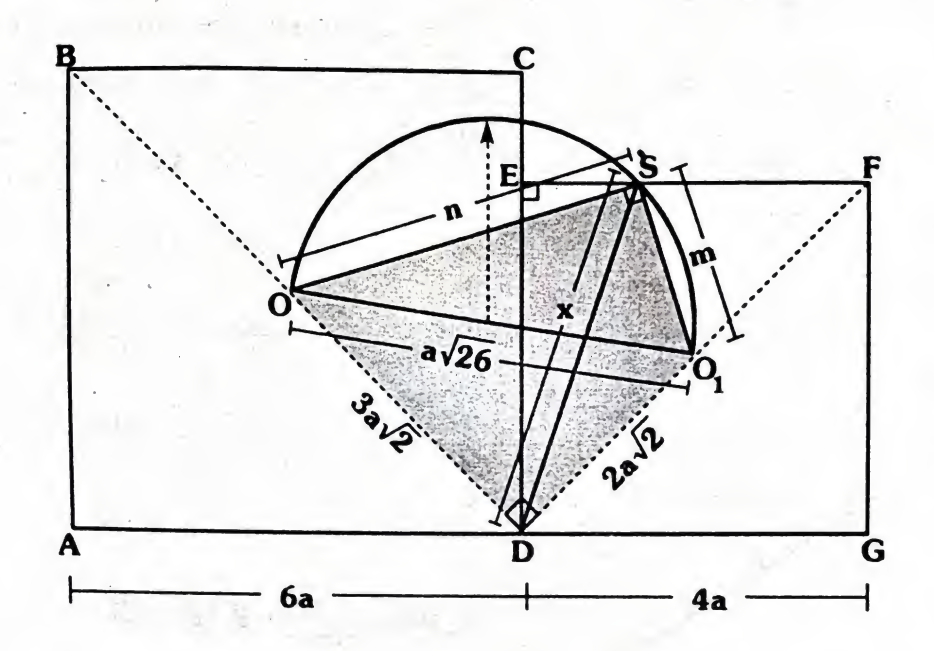
$\triangle FPC$: $c^2 + f^2 = (2\ell)^2$

$\triangle EPB$: $e^2 + b^2 = (2\ell)^2$

$$\therefore \ \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 12\ell^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 300



- Piden: x
- Dato: $3m + 2n = 3\sqrt{13}$
- ⏢ OSO_1D : inscriptible, pues $m\measuredangle ODO_1 = 90°$
- ⊿ O_1DO : por teorema de Pitágoras: $OO_1 = a\sqrt{26}$
- En ⏢ OSO_1D , teorema de Ptolomeo

$$(a\sqrt{26})x = (3a\sqrt{2})m + (2a\sqrt{2})n \Rightarrow (\sqrt{26})x = \sqrt{2}\underbrace{(3m + 2n)}_{3\sqrt{13}}$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave A

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

- *Anual*
- *Cepre Uni*
- *Semestral*
- *Semestral Intensivo*
- *Repaso*

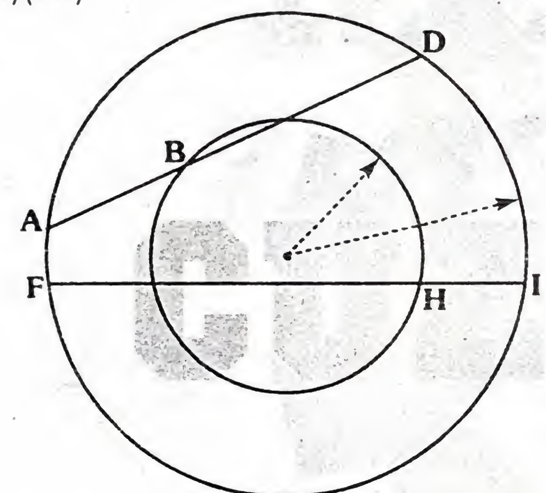
Problemas Propuestos

Ciclo **Anual**

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 1

En el gráfico, $(AB)(BD)=10$. Calcule $(FH)(HI)$



A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) 10
D) 7,5 E) 12,5

PROBLEMA Nº 2

Según el gráfico, $AB=r$, $HC=6$ y $MH=3$. Calcule HN

A)3

B) 4

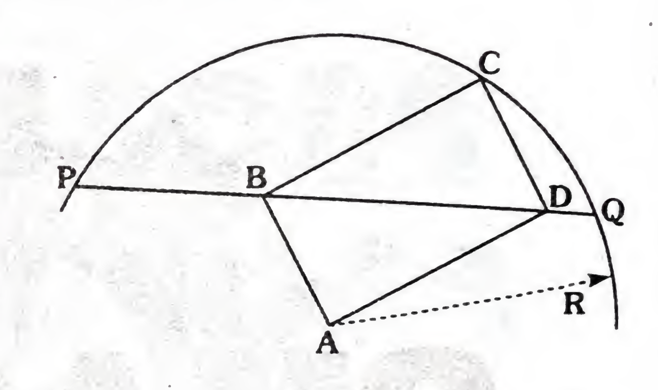
C) 5

D) 4,5

E) 4,8

PROBLEMA Nº 3

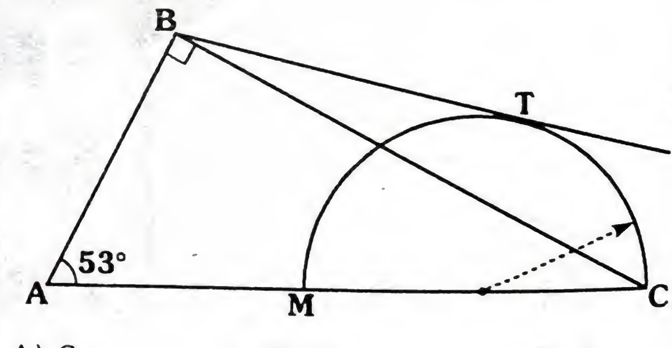
En el gráfico, ABCD es un rectángulo, si $DQ=1$ y $R=4$. Calcule PB



A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, T es punto de tangencia, $AB=3$ y $AM=MC$. Calcule BT.

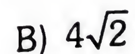


A) 2 B) 3 C) 4
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $AB=AC$ y $MN=4$. Calcule TB.

A) 4

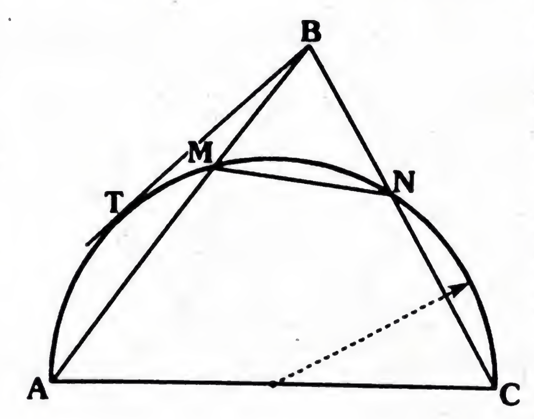


B) $4\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

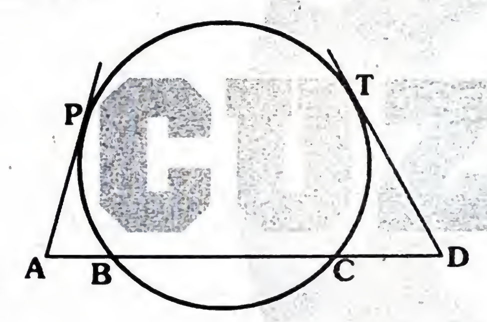
D) 6

E) 8



PROBLEMA Nº 6

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si $AB = 1$, $CD = 2$ y $TD = 4$. Calcule AP.



A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) 14
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{14}$

PROBLEMA Nº 7

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, M y N son puntos de tangencia.
Si $AD = 12$ y $CD = 3$.
Calcule BQ.

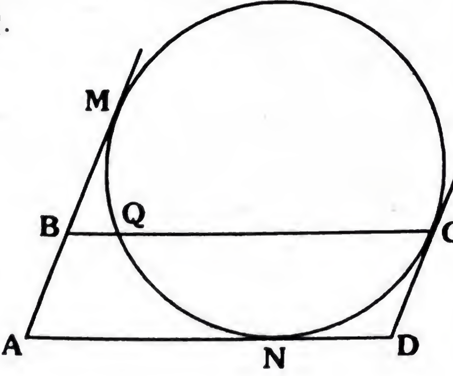
A) 1

B) 2

C) 3

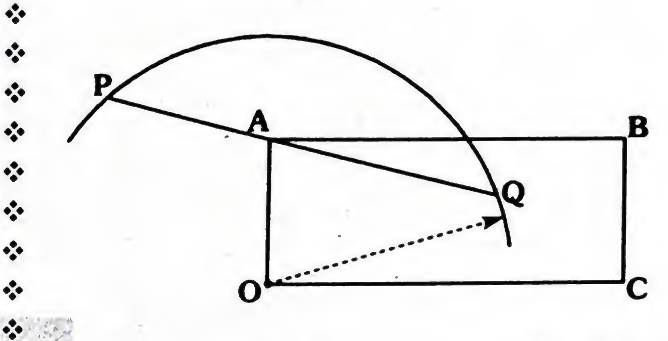
D) 2,5

E) 3,5



PROBLEMA Nº 8

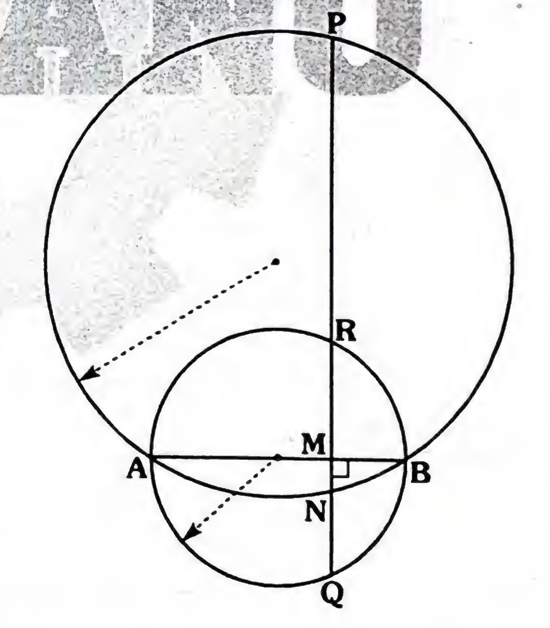
En el gráfico, ABCD es un rectángulo, $BC = 4$ y $(PA)(AQ) = 9$. Calcule R



A) 4 B) 5 C) $\sqrt{58}$
D) $6\sqrt{2}$ E) 8

PROBLEMA Nº 9

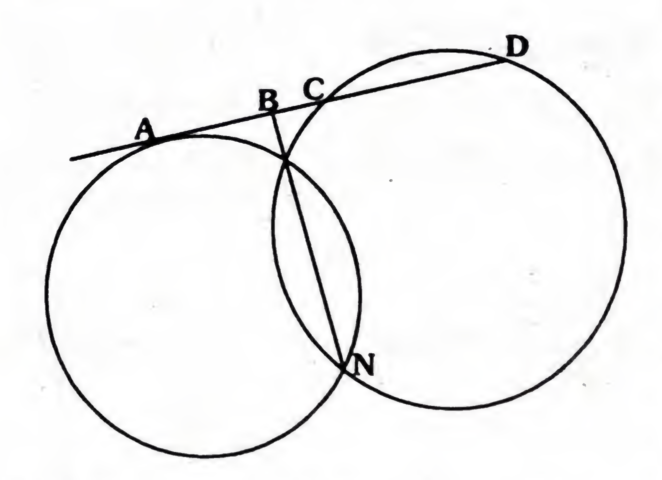
En el siguiente gráfico, $PR = 12$ y $NQ = 3$. Calcule (AM)(MB)



A) $4\sqrt{5}$ B) 12 C) 15
D) 18 E) 16

PROBLEMA Nº 10

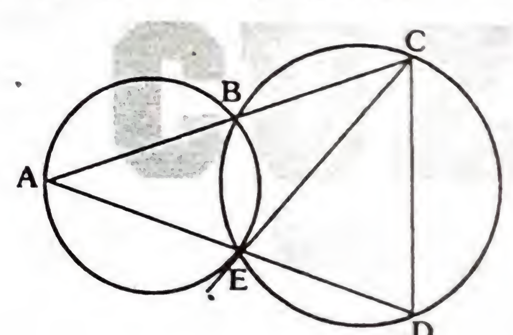
En la figura, A es punto de tangencia. Si $BC = 4m$ y $CD = 12m$. Halle AB



A) 9m B) 10m C) 8m
D) 7m E) 6m

PROBLEMA Nº 11

En la figura, E es punto de tangencia. Si BC = 4m y CD=8m, halle AB.



A) 6m B) 8m C) 10m
D) 12m E) 9m

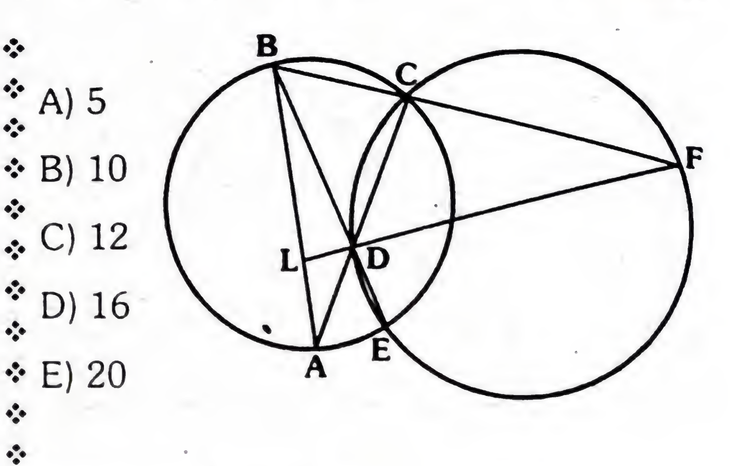
PROBLEMA Nº 12

El cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia de diámetro AD. Si $AB = BC = 4\sqrt{5}$ y $AD = 20$. Calcule CD.

A) 14 B) 10 C) 16
D) 12 E) 15

PROBLEMA Nº 13

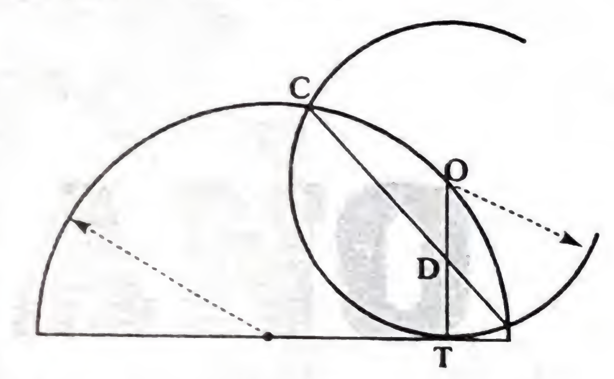
En el gráfico, se cumple $(BD)(DE) = 10$, calcule $(LD)(DF)$.



A) 5
B) 10
C) 12
D) 16
E) 20

PROBLEMA Nº 14

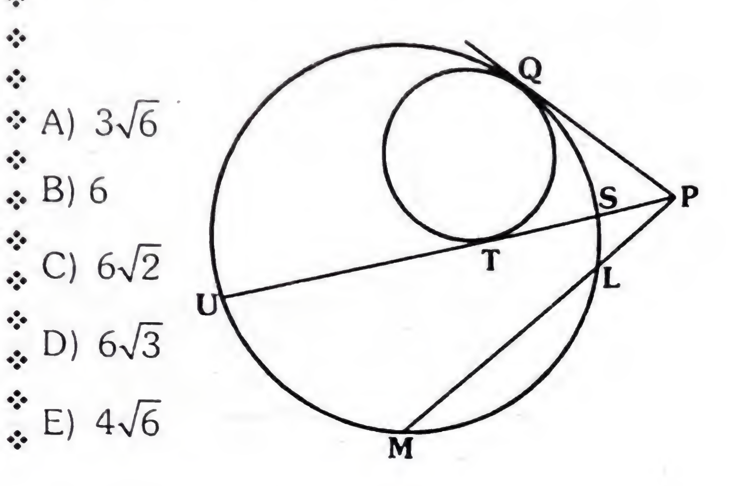
En el gráfico, T es punto de tangencia y $OD = 3cm$, calcule DT.



A) 3,5cm B) 1cm C) 3cm
D) 4cm E) 2cm

PROBLEMA Nº 15

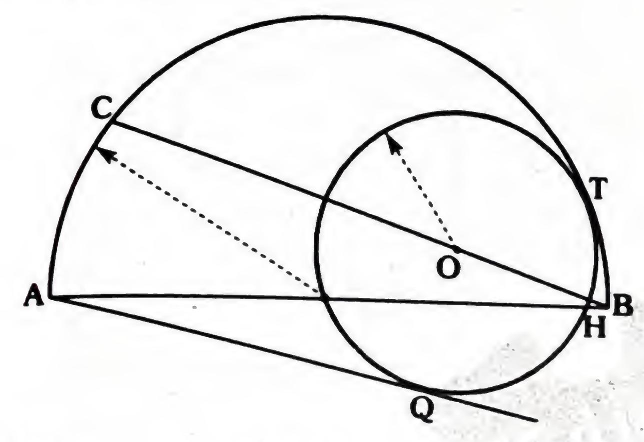
Según el gráfico, T y Q son puntos de tangencia. Si $7(PL) = 9(ML) = 63$ y $PS = 2(ST)$. Calcule UT.



A) $3\sqrt{6}$
B) 6
C) $6\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, T y Q son puntos de tangencia. Si $AQ=6\sqrt{5}$ y $HB=2$. Calcule (OC)(OB)

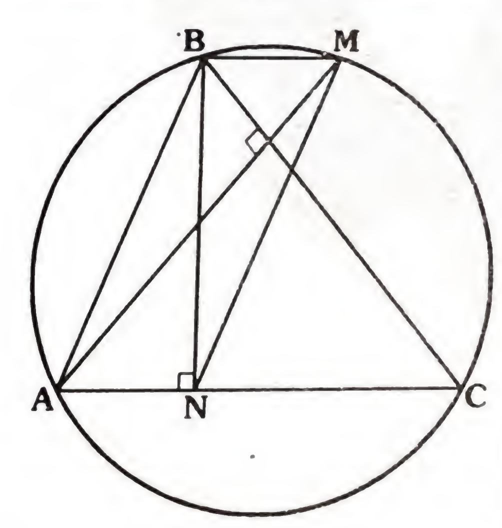


A) 75 B) 60 C) 90
D) $16\sqrt{3}$ E) $15\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, ABMN es un paralelogramo y $(AN)(NC)=a^2$, calcule AM.

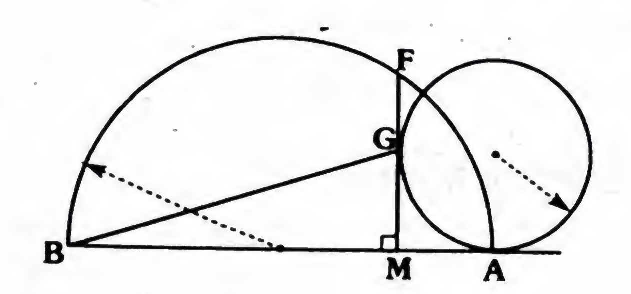
A) a
B) 2a
C) 3a
D) $\frac{a}{2}$
E) $\frac{a}{4}$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROBLEMA Nº 18

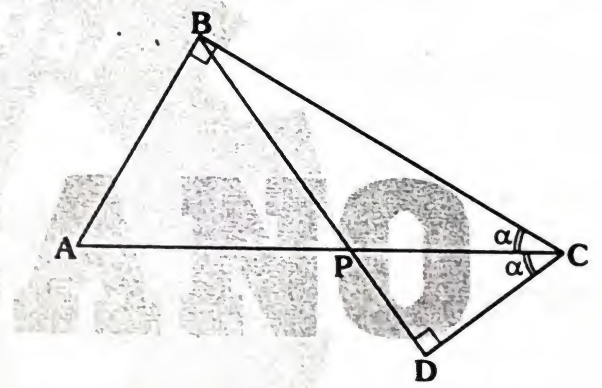
En el gráfico, A y G son puntos de tangencia. Si $BM=4$ y $FG=1$. Calcule BG.



A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{19}$ C) $\sqrt{17}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{21}$

PROBLEMA Nº 19

En el gráfico, $(AP)(AC)=72$. Calcule BP.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 20

En un triángulo rectángulo la altura relativa a la base mide 2, la hipotenusa tiene por longitud $\frac{5}{4}$ de uno de los catetos. Calcule la longitud del cateto menor.

A) 5/2 B) 5 C) 10/3
D) 9/4 E) 4/9

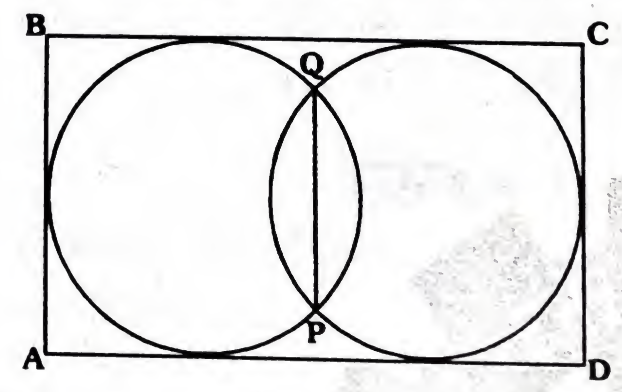
PROBLEMA Nº 21

En el rectángulo ABCD, P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.
Si $(AP)^2+(AQ)^2=245$, calcule PQ.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 22

En el gráfico las circunferencias son tangentes a los lados del rectángulo ABCD cuyos lados miden 10 y 18. Calcule PQ



A) 5 B) 7 C) 6
D) 9 E) 8

PROBLEMA Nº 23

Los lados de un triángulo miden $\sqrt{6}$; $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$. Halle la menor altura.

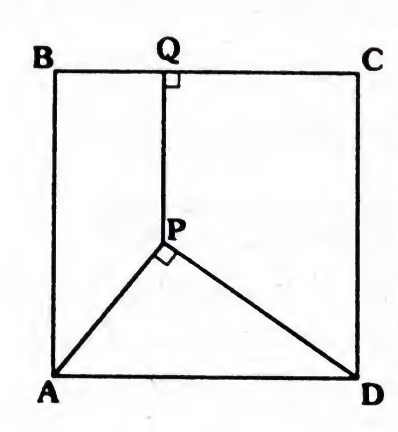
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA Nº 24

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, si $AB = 13$ y $BQ = 4$.

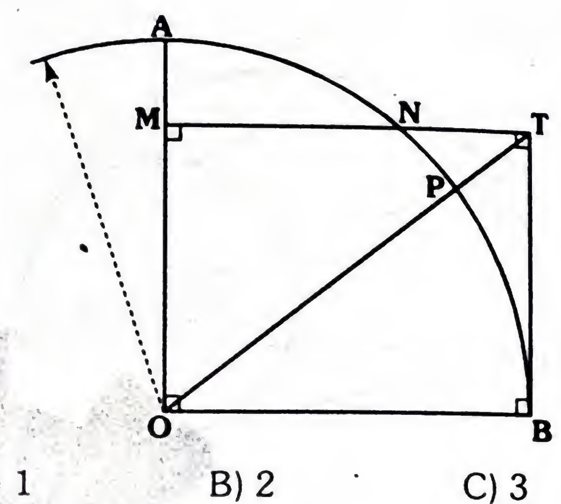
Calcule PQ



A) 6
B) 7
C) 4
D) 5
E) 9

PROBLEMA Nº 25

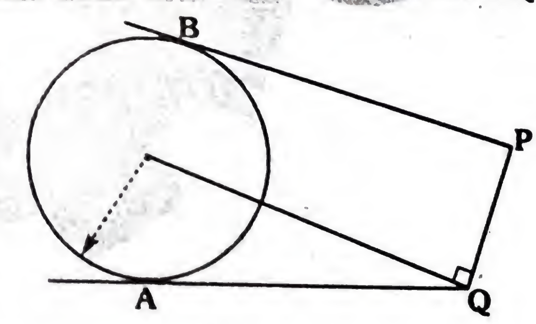
Según el gráfico, $OP = 4(PT) = 4$. Halle AM.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 1,5 E) 0,5

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia, si $PB = 10$ y $AQ = 8$. Calcule PQ.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

PROBLEMA Nº 27

En la región exterior relativa a la hipotenusa AC del triángulo ABC se ubica P tal que $\overline{BP} \cap \overline{AC} = \{M\}$; $BM = MP$; $CM = 2(MA) = 4$ y $m\measuredangle BPC = 90^\circ$. Calcule BC.

A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{2}$
D) 5 E) $3\sqrt{2}$

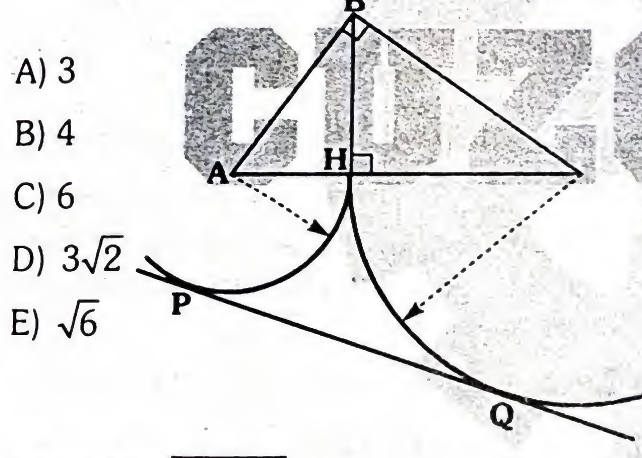
PROBLEMA Nº 28

Se tiene una circunferencia de centro O, y radio R desde H se trazan los segmentos tangentes HP y HS (P y S son puntos de tangencia), desde P se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{HS}$ (Q en $\overline{HS}$) y $\overline{HO} \cap \overline{PQ} = \{M\}$. Si $OM = 2$ y $MH = 7$, calcule R.

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 29

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $PQ = 6$, calcule BH.

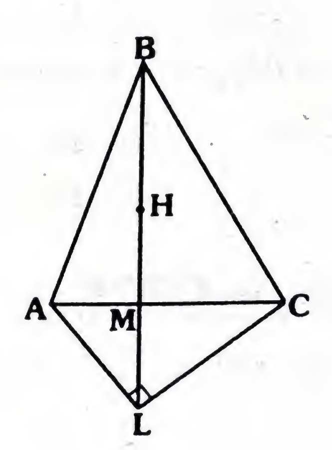


A) 3
B) 4
C) 6
D) $3\sqrt{2}$
E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, H es ortocentro del triángulo ABC. Si $HB = 5$ y $HM = 4$.

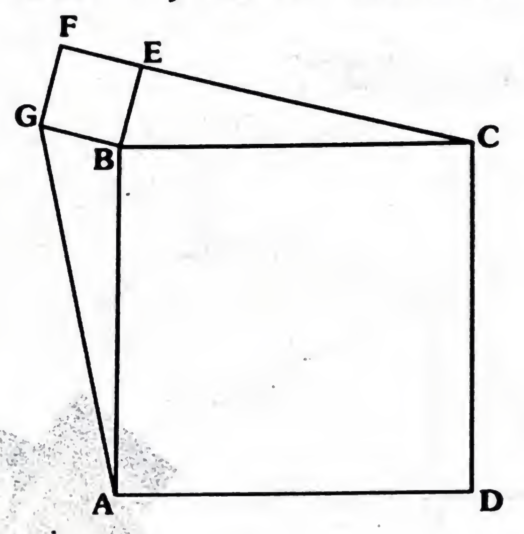
Calcule LM.



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 31

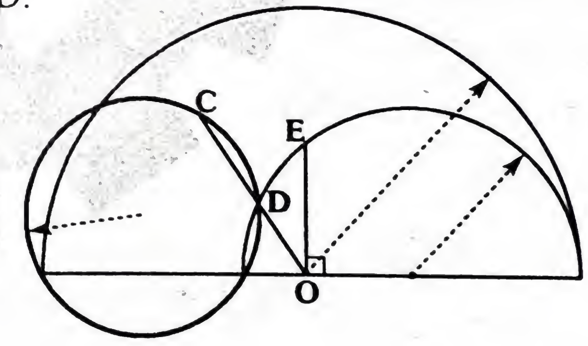
En el gráfico, ABCD y BEFG son cuadrados. Si $FE = 1$ y $EC = 5$. Calcule AG.



A) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{29}$ C) $\sqrt{30}$
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 32

En el gráfico, $EO = 6$ y $DO = 4$. Calcule CD.



A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 33

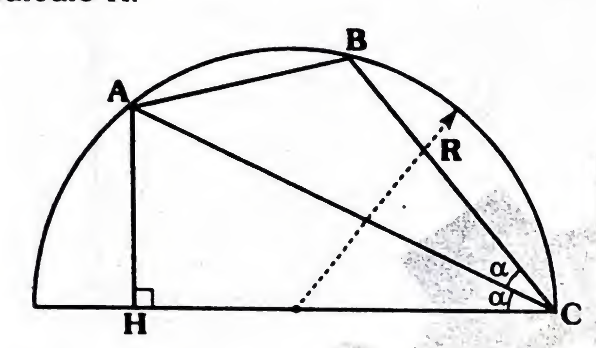
En una circunferencia se trazan las cuerdas perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se intersecan en E; luego se traza la semicircunferencia con diámetro BD que interseca a $\overline{AC}$ en F. Si $AE = 1$ y $EF = 3$.

Calcule FC.

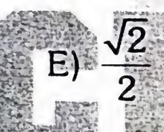
A) 4 B) 4,5 C) 5
D) 5,5 E) 6

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $AH=\sqrt{2}$ y $(AB)(AC)=4\sqrt{2}$. Calcule R.



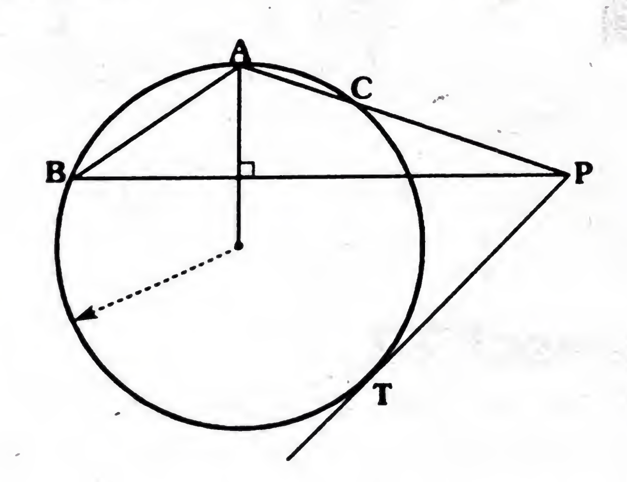
A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $4\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



PROBLEMA Nº 35

Según el gráfico, T es punto de tangencia. Si $AP=9$ y $AB=3\sqrt{5}$.

Calcule PT

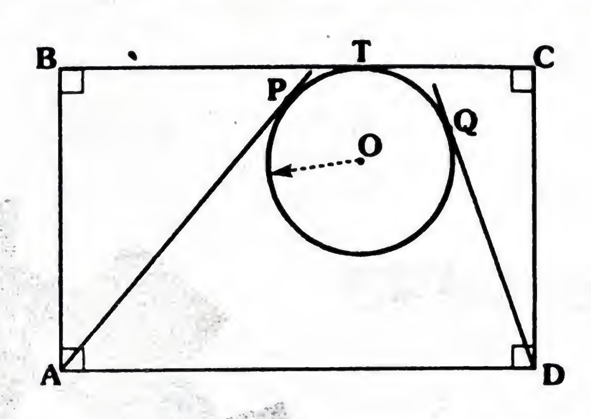


A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6
D) $6\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico T, P y Q son puntos de tangencia, BT=5 y TC=1. Calcule $(AP)^2-(QD)^2$



A) 12 B) 4 C) 16
D) 24 E) 20

PROBLEMA Nº 37

Los radios de dos circunferencias secantes son 10u y 17u, la distancia entre los centros es 21u. Calcule la longitud de la cuerda común.

A) 27u B) 25u C) $10\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{5}$ E) 16u

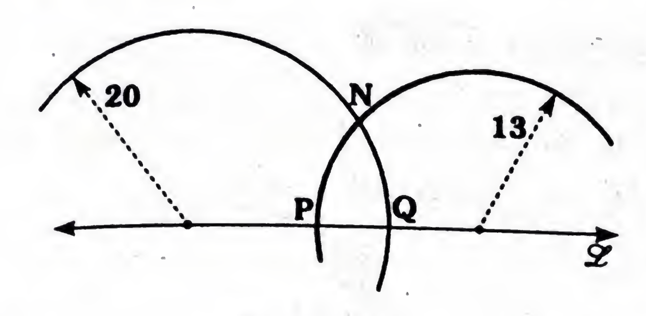
PROBLEMA Nº 38

En el triángulo ABC, se cumple que AB=13; BC=15 y AC=14. Calcule la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ hacia $\overline{AC}$.

A) 22/3 B) 25/6 C) 24/7
D) 6 E) 28/3

PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, $PQ=12$. ¿Cuánto dista N de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$?



A) 4 B) 12 C) 9

D) 10 E) 11

PROBLEMA Nº 40

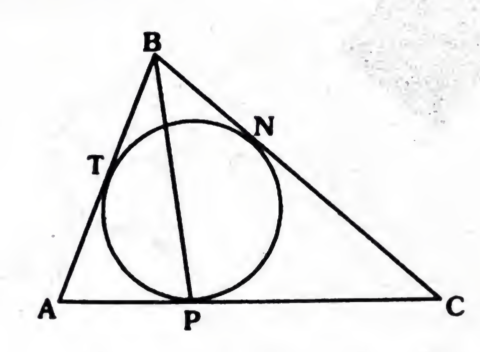
Dado el trapecio ABCD, $\overline{BC} // \overline{AD}$, el triángulo ACD es equilátero. Si $BC = 2$ y $AD = 6$. Calcule AB

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{19}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{23}$

PROBLEMA Nº 41

En el gráfico, $AP = 2$, $PC = 4$ y $BN = 3$. Calcule BP(T, N y P son puntos de tangencia)



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 42

Según el gráfico, $AP = 8$, $PB = 4$ y $PQ = 5$.

Calcule AQ.

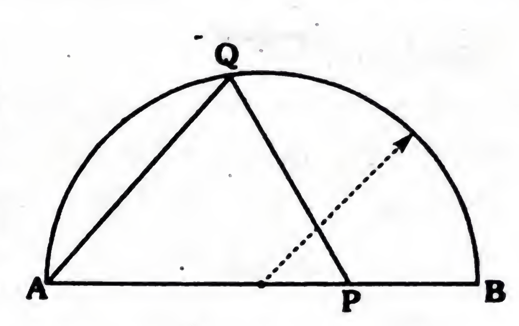
A) $\sqrt{67}$

B) $3\sqrt{26}$

C) $\sqrt{71}$

D) $2\sqrt{13}$

E) $3\sqrt{13}$



PROBLEMA Nº 43

En el triángulo ABC; $AB = 2$; $BC = 8$ y la longitud de la mediana relativa a $\overline{AC}$ es entero. Calcule AC.

A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{3}$ E) 6

PROBLEMA Nº 44

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $AT = 3$, calcule $(AC)^2 + (AB)^2$

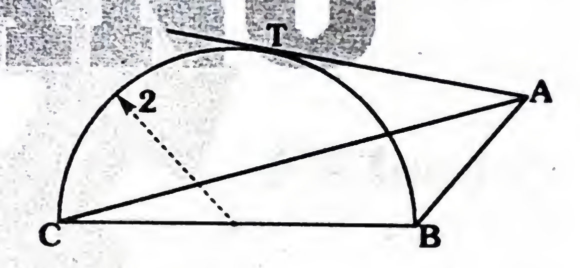
A) 30

B) 32

C) 35

D) 36

E) 34



PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, $AM = MN = NC$ y $HN = 4$. Calcule $(BC)^2 - (AB)^2$.

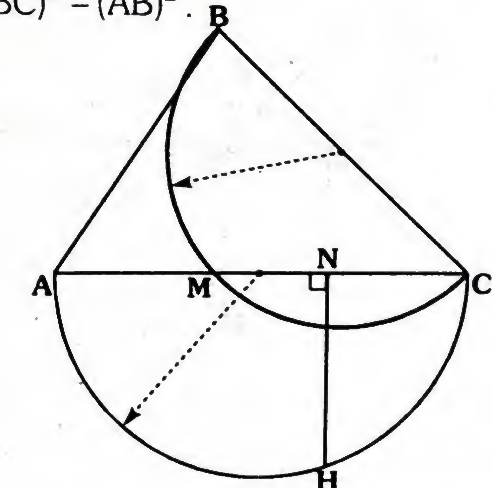
A) 35

B) 36

C) 28

D) 24

E) 40



PROBLEMA Nº 46

En el triángulo ABC se inscribe el cuadrado PQRS, tal que $Q \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$ y $\overline{PS} \subset \overline{AC}$. Si $AB = 20$; $BC = 13$ y $AC = 21$. Calcule RS.

A) $\frac{120}{13}$ B) $\frac{126}{13}$ C) $\frac{123}{13}$

D) $\frac{117}{11}$ E) $\frac{84}{11}$

PROBLEMA Nº 47

En el paralelogramo ABCD las diagonales se cortan en O, P está en $\overline{OB}$ tal que $\overline{AP} \perp \overline{BD}$. Si $AC = 10$ y $OP = 3$.

Calcule PC

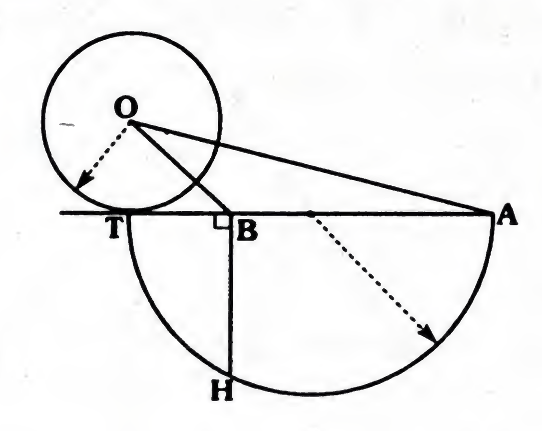
A) $4\sqrt{13}$ B) $4\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{13}$

D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $BH = 3$.

Calcule: $(OA)^2 - (OB)^2 - (BA)^2$

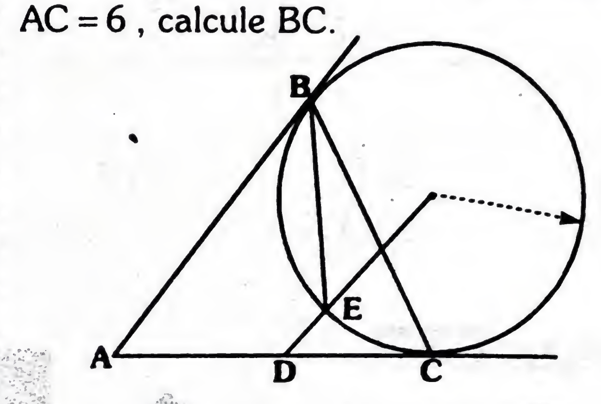


A) 6 B) 18 C) 9

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 49

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia, ABED es un trapecio isósceles. Si $AC = 6$, calcule BC.



A) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$

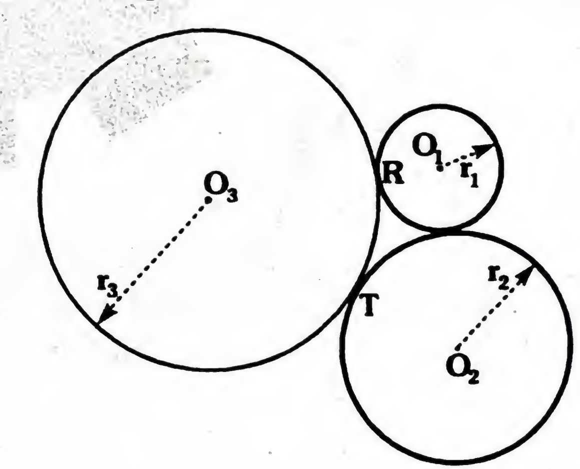
C) $3\sqrt{2-\sqrt{2}}$ D) $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$

E) $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, R, S y T son puntos de tangencia. Si $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ y $r_3 = 3$.

Calcule O_1T.



A) $\sqrt{\frac{29}{5}}$ B) $\sqrt{\frac{23}{5}}$ C) $\sqrt{\frac{21}{5}}$

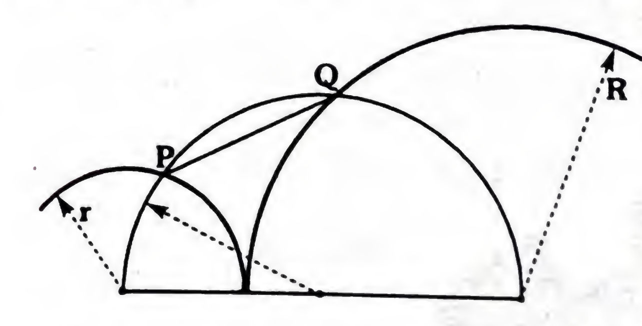
D) $\sqrt{\frac{27}{5}}$ E) $\sqrt{\frac{31}{5}}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, $R=8$ y $r=4$.

Calcule PQ.



A) $\frac{8}{3}(\sqrt{10}-1)$ B) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$

C) $\frac{4}{3}(\sqrt{10}+2)$ D) $\frac{8}{3}(\sqrt{10}+1)$

E) $\frac{8}{3}(\sqrt{10}-2)$

PROBLEMA Nº 52

En el cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia, se cumple que:

$m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$, $AB=a$ y $AD=b$

Calcule AC.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{a+b}{2}$

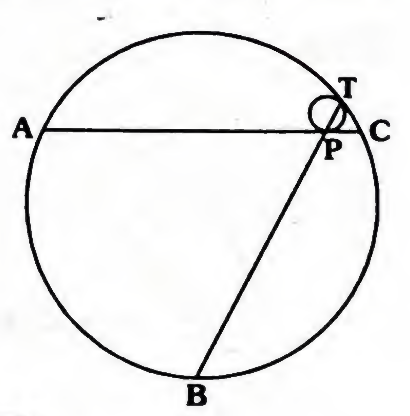
C) $\sqrt{b(a+b)}$ D) $\sqrt{a(a+b)}$

E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 53

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Si: $AT=6$, $TC=2$ y $m\widehat{ATC}=120°$.

Calcule TB.



A) 6

B) 8

C) 4

D) $4\sqrt{2}$

E) $8\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 54

Se tiene el cuadrilátero ABCD, las diagonales son perpendiculares y secantes en E, M, N, P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $EM=a$, $EN=b$ y $EP=c$, calcule EQ.

A) $\frac{ab}{c}$ B) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

C) $\sqrt[3]{abc}$ D) $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$

E) $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$

PROBLEMA Nº 55

Se tiene los rectángulos ABCD y BEDF, S es un punto arbitrario, calcule:

$$\frac{(ES)^2+(FS)^2}{(AS)^2+(SC)^2}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 56

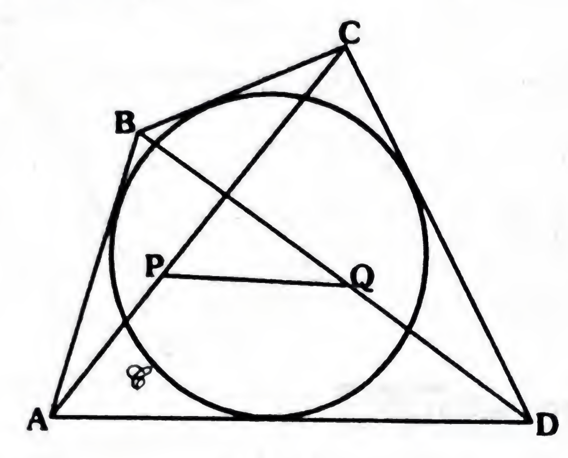
En el gráfico, $\mathscr{C}$ está inscrito en el cuadrilátero ABCD,

$AP=PC=3$ y $BQ=QD=4$

$(AB)(CD)=(AD)(BC)$ y

$(AB)^2+(CD)^2=58$

Calcule PQ.



A) 5/3 B) 4/9 C)3
D) 2 E) 7/8

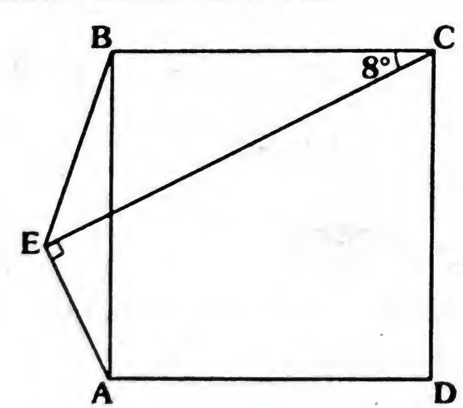
PROBLEMA Nº 57

Se tiene el hexágono inscrito ABCDEF, si $AB = CD = EF = b$ y $BC = ED = AF = a$. Calcule (FC)(EB).

A) ab B) $(a+b)^2$
C) a^2+b^2 D) a^2+b^2+ab
E) a^2+b^2-ab

PROBLEMA Nº 58

En el gráfico, ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 10cm. Halle EB.



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 59

En todo polígono regular ABCDE..., se verifica que:

A) $(AC)^2+(AB)^2 = AD - BC$

B) $(AC)^2-(AB)^2 = AD - BC$

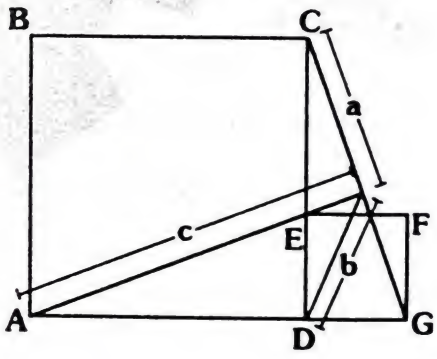
C) $(AC)^2 \cdot (AB)^2 = (AD)\cdot(BC)$

D) $(AC)^2+(AB)^2 = (AD)(BC)$

E) $(AC)^2-(AB)^2 = (AD)(BC)$

PROBLEMA Nº 60

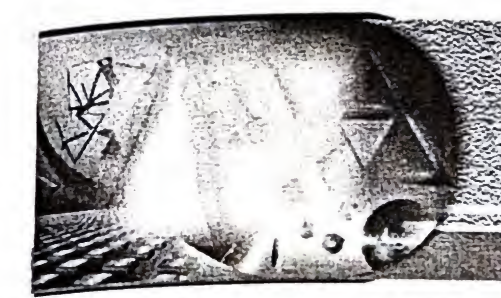
En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados, indique la relación entre "a", "b" y "c"



A) $c = a + b$ B) $c = a\sqrt{2} + b$

C) $c = b\sqrt{2} + a$ D) $c = (a+b)\sqrt{2}$

E) $c^2 = a^2 + b^2$



RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 61 seminario 3/ 2000-II

En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$ y la altura $\overline{AH}$. Si AB = BM y AC=4u. Calcule (BC)(HC)

A) $6u^2$ B) $8u^2$ C) $9u^2$
D) $12u^2$ E) $16u^2$

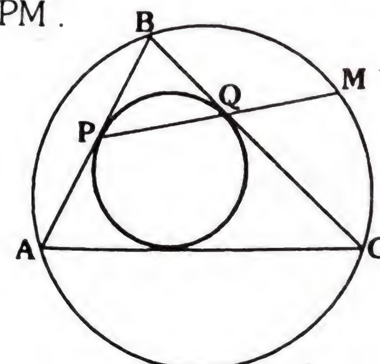
PROBLEMA Nº 62 seminario 1/ 2001-II

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia) y la secante PEH (E y H pertenecen a la circunferencia). $\overline{PH} \cap \overline{AB} = \{F\}$. Si HF = 6u y FP = 8u. Halle EF

A) 0,25u B) 2,4u C) 0,35u
D) 0,5u E) 0,32u

PROBLEMA Nº 63 seminario 4 / 2000-II

En la figura mostrada, AB = 13u; BC = 14u y AC = 15u. Calcule la longitud de $\overline{PM}$.



A) $\dfrac{5\sqrt{1\,873}+109}{8\sqrt{13}}$ B) $\dfrac{5\sqrt{1\,873}-83}{8\sqrt{13}}$

C) $\dfrac{\sqrt{2\,617}+31}{4\sqrt{13}}$ D) $\dfrac{\sqrt{3\,767}+35}{8\sqrt{13}}$

E) $\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{\sqrt{690}+12}{\sqrt{13}}\right)$

PROBLEMA Nº 64 seminario 3/ 2007-I

Sea el cuadrilátero inscrito ABCD en una circunferencia, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{P\}$

Halle $\dfrac{(AP)(PC)}{(PD)(PB)}$

A) 1/8 B) 1/6 C) 1/4
D) 1/2 E) 1

PROBLEMA Nº 65

En una circunferencia de centro O, se traza una cuerda AB, sea M un punto de $\overline{AB}$, siendo $(MA)(MB)+(MO)^2=k$. Halle el radio de la circunferencia.

A) $\dfrac{\sqrt{k}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ C) $\sqrt{k}$
D) $\sqrt{2k}$ E) $2\sqrt{k}$

PROBLEMA Nº 66

Se tiene el cuadrado ABCD, con centro en A y radio $\overline{AC}$ se traza la semicircun-

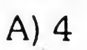
ferencia de diámetro $\overline{MN}$, M en la prolongación de $\overline{AB}$ y N en la prolongación de $\overline{BA}$ luego se traza la cuerda EDN que interseca a la circunferencia de diámetro $\overline{AN}$ en F. Si DF = a , entonces FD es:

A) $\frac{a}{3}$　　B) $\frac{a}{2}$　　C) $\frac{3}{4}a$

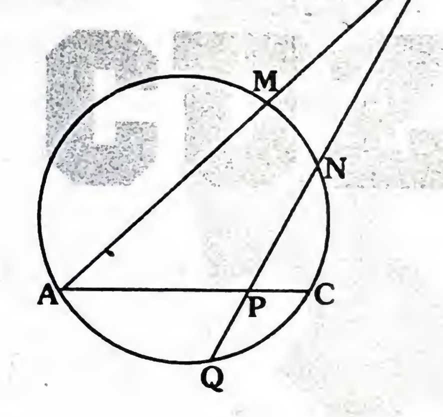
D) a　　E) $\frac{3}{2}a$

PROBLEMA Nº 67　　seminario 3/ 2007-I

En la figura: $m\widehat{MN} = m\widehat{NC}$; $QP = 2(PC)$; $AP = 4$ y $PQ + BN = 6$.
Halle BM

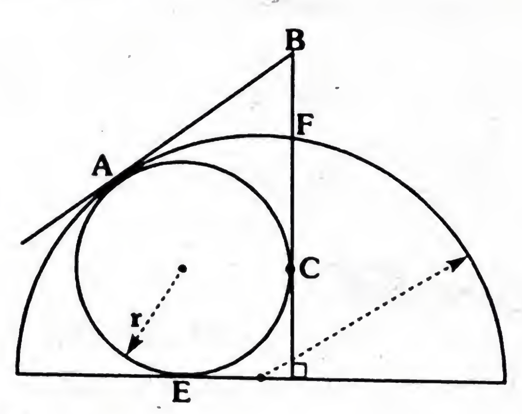


A) 4
B) 7
C) 5
D) 6
E) 8



PROBLEMA Nº 68　　seminario 3/ 2006-I

A, C y E son puntos de tangencia BF = 2 y FC = 6 . Calcule r.



A) 4　　B) 6　　C) 8
D) 9　　E) 12

PROBLEMA Nº 69　　seminario 3/ 2006-I

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son dos circunferencias secantes en los puntos P y N. Por $L \in \mathscr{C}_1$ se traza una recta tangente que interseca a $\mathscr{C}_2$ en los puntos H y B, $A \in \mathscr{C}_1$ y $\overline{AM}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ en el punto M, (A, N y B son colineales). Si AM = 20 y AB = 25 . Entonces LB mide:

A) 10　　B) 12　　C) 15
D) 16　　E) 18

PROBLEMA Nº 70　　seminario 3/ 2006-II

Una circunferencia $\mathscr{C}$ pasa por el vértice B de un triángulo ABC y es tangente a $\overline{AC}$ en su punto medio. Si $\mathscr{C}$ interseca a $\overline{AB}$ en Q y a $\overline{BC}$ en L y AB = a , BC = BQ = b (a > b), calcule LC.

A) $\frac{b(a+b)}{a}$　　B) $\frac{a(a-b)}{b}$

C) $\frac{b(a-b)}{a}$　　D) $\frac{a(a+b)}{b}$

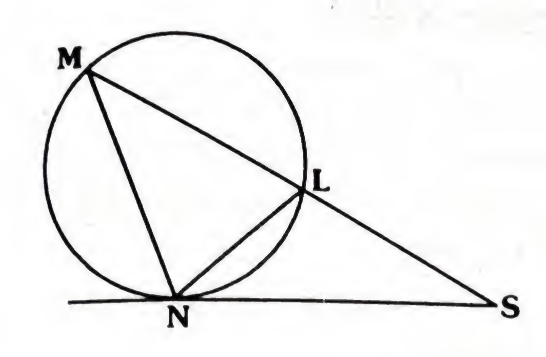
E) $\frac{a^2+b^2}{b}$

PROBLEMA Nº 71　　seminario 3/ 2006-II

En la figura:

$$MN = 2(LN) \ , \quad ML = b \ .$$

Calcule MS (N es punto de tangencia).



A) $a+\frac{b}{3}$ B) $2a-\frac{b}{3}$

C) $\frac{3b}{2}$ D) $\frac{4b}{3}$

E) $2b$

PROBLEMA Nº 72 seminario 3/ 2006-II

En la figura $AT=8$, $BT=4$ y $LS=9$. Calcule LT.

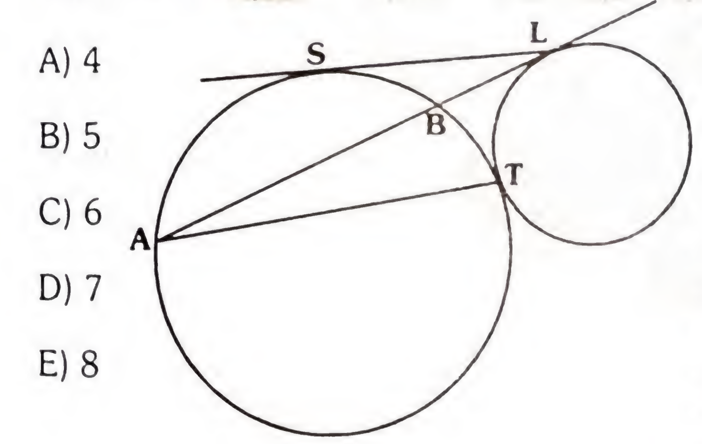
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



PROBLEMA Nº 73 examen parcial/2009-II

En el trapecio isósceles ABCD, se cumple que $m\measuredangle ACD=90°$, $\overline{BC}//\overline{AD}$, $AC=40$ y $BC=14$. Calcule la longitud de la base media del trapecio.

A) 25 B) 30 C) 34

D) 32 E) 44

PROBLEMA Nº 74 seminario 3/ 2005-II

En un triángulo ABC, $AC=b$, $AB=c$ y $BC=a$, se trazan las alturas h_a, h_b y h_c relativas a los lados a, b y c respectivamente sea H el ortocentro y x_a, x_b y x_c las distancias de H a los vértices A, B y C respectivamente.

Demostrar que:

$$h_ax_a+h_bx_b+h_cx_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

PROBLEMA Nº 75 seminario 3/ 2001-I

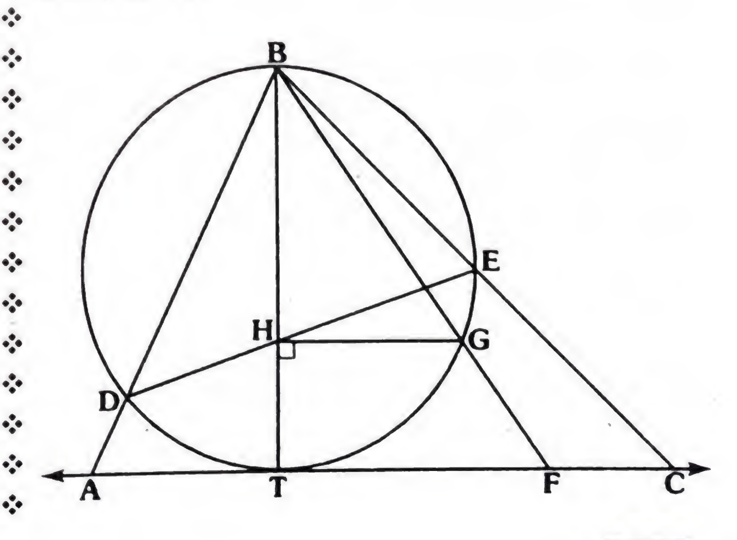
En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, se traza una cuerda $\overline{MN}$ tal que $\overline{AB}\cap\overline{MN}=\{P\}$; $\overline{BC}\cap\overline{MN}=\{Q\}$; $\overline{MP}\cong\overline{QN}$; $PB=3u$, $PA=4u$ y $BQ=2u$. Calcule QC.

A) 3u B) 4u C) 5u

D) 6u E) 7u

PROBLEMA Nº 76

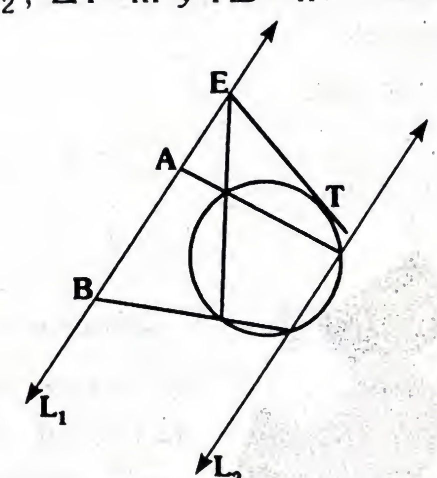
En la figura mostrada, $\overline{BT}$ es diámetro y T es punto de tangencia si $(AT)(TC)=49$. Calcule TF.



A) 4u B) 5u C) 6u
D) 7u E) 8u

PROBLEMA Nº 77 seminario 3/ 2006-II

En la figura, T es punto de tangencia $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, EA = m y AB = n. Halle ET



A) $\dfrac{m^2+n^2}{m+n}$ B) $\dfrac{m^2+n^2}{2}$

C) $\sqrt{mn}$ D) $\sqrt{n(m+n)}$

E) $\sqrt{m(n+m)}$

PROBLEMA Nº 78

Desde un punto M exterior a una circunferencia de centro O, se traza la tangente $\overrightarrow{MQ}$ y la secante MNP, luego desde P se traza una paralela a $\overline{MQ}$ que interseca a la circunferencia en K. Si $\overline{NQ} \cap \overline{MK} = \{A\}$; $\overline{PQ} \cap \overline{MK} = \{B\}$; KP = KB ; MA = a y MQ = b , entonces (NA)(AQ) es:

A) ab B) b(a − b)

C) a(b − a) D) $\dfrac{a(a+b)}{2}$

E) $\dfrac{a(a+b)}{3}$

PROBLEMA Nº 79

En la semicircunferencia de diámetro $\overline{MP}$, la cuerda MN mide 12u. Si L es punto medio del arco MN y una circunferencia con centro en L es tangente a $\overline{MP}$ en H y $\overline{MH}$ mide 4u.

Calcule la longitud del radio de la semicircunferencia.

A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{5}$
D) 6,5 E) 5

PROBLEMA Nº 80

En el paralelogramo ABCD, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ miden 12u y 8u. La circunferencia circunscrita al triángulo ABD interseca a $\overline{BC}$ y es tangente a $\overline{CD}$ en D. Calcule CD.

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 81 seminario 3/1997-I

ABC es un triángulo, E y F son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente tal que $m\measuredangle ABF = m\measuredangle ECA$, AF = 1 . G es un punto de $\overline{FC}$ donde BG = GF = 4 , I es el punto de intersección de $\overline{EC}$ y $\overline{BF}$ y $m\measuredangle FIC = 90°$. Halle AB

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 82 seminario 3/1997-I

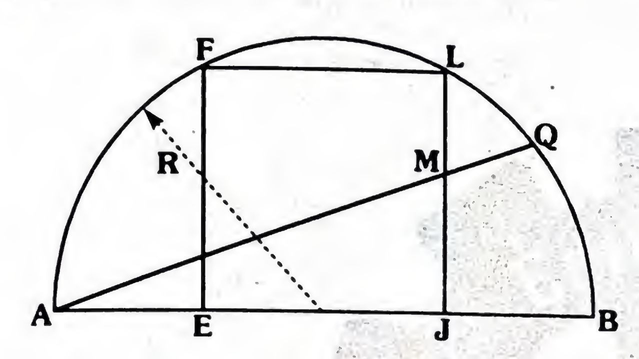
Si los tres lados de un triángulo rectángulo se halla en progresión aritmética de razón "t", calcular el inradio.

A) $\frac{t}{4}$ B) $\frac{t}{3}$ C) $\frac{t}{2}$

D) t E) 2t

PROBLEMA Nº 83 — seminario 3/1997-I

$\overline{AB}$ es diámetro, EFLJ es un cuadrado, M es punto medio de $\overline{LJ}$. Hallar MQ



A) R/2 B) R/4 C) R/3

D) R/6 E) N.A.

PROBLEMA Nº 84 — seminario 3/1997-I

En un triángulo acutángulo ABC, "O" es ortocentro y "K" es circuncentro, hallar OB, si el circunradio mide R y AC = b

A) $\sqrt{2Rb}$ B) $\sqrt{R^2-b^2}$

C) $\sqrt{2R^2-b^2}$ D) $\sqrt{4R^2-b^2}$

E) $R-b$

PROBLEMA Nº 85 — seminario 3/1997-I

En un triángulo rectángulo ABC, los catetos AB y BC miden "c" y "a" respectivamente. Calcular la proyección de la mediana $\overline{BM}$ sobre la hipotenusa (considere a>c).

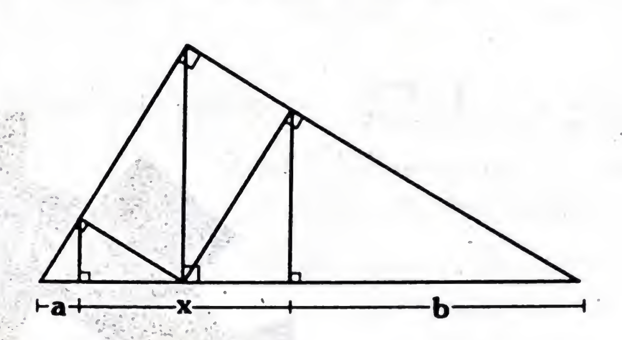
A) $\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$ B) $\sqrt{a^2+c^2}$

C) $\sqrt{a^2-c^2}$ D) $\frac{a^2-c^2}{2\sqrt{a^2+c^2}}$

E) $\frac{a^2-c^2}{\sqrt{2a^2+c^2}}$

PROBLEMA Nº 86 — seminario 3/2000-II

En la figura mostrada, halle x.



A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$

C) $3\sqrt{ab}$ D) $\sqrt{a(a+b)}$

E) $\sqrt{b(a+b)}$

PROBLEMA Nº 87

Exteriormente al triángulo RST, recto en S, se construyen los cuadrados RSMN y RTPQ. Si los catetos $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$ miden a y b respectivamente. Hallar la longitud del segmento que une M y P.

A) $2\sqrt{2a^2+b^2+2ab}$

B) $\sqrt{2(2a^2+b^2+2ab)}$

C) $\sqrt{2(2a^2+b^2+ab)}$

D) $\sqrt{2(a^2+b^2+2ab)}$

E) $\sqrt{2(2a^2+2b^2+ab)}$

PROBLEMA Nº 88 seminario 3/ 2000-I

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en B, $P \in \overline{AB}$ y $Q \in \overline{BC}$.

Si $(AP)^2 + (QC)^2 = 36m^2$. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$.

A)2m B) 3cm C) 4cm
D) 5cm E) 6cm

PROBLEMA Nº 89 seminario 3/ 2000-I

En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH $(H \in \overline{AC})$.

Si $AB - AH = AH - BH = t$, halle la longitud del inradio relativo al triángulo AHB.

A) $\frac{t}{4}$ B) $\frac{t}{2}$ C) t
D) $\frac{3}{8}t$ E) $\frac{2}{3}t$

PROBLEMA Nº 90

En un tiángulo rectángulo ABC (recto en B), G es el baricentro, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{BA}$, M es punto medio de $\overline{AC}$; $\overline{GE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{MF} \perp \overline{BA}$. Si $GE = 2u$ y $AC = 9u$.
Halle MF.

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}u$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{5}u$
D) $2\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

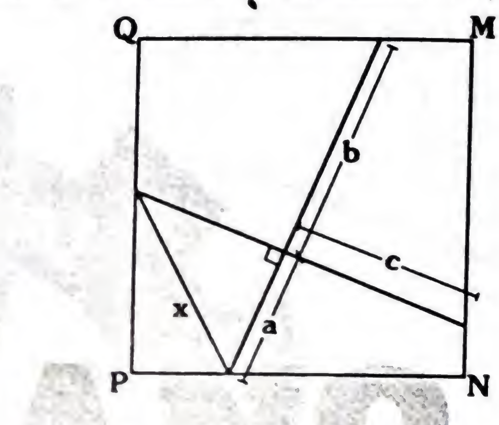
PROBLEMA Nº 91 seminario 3/ 2000-I

En el rombo ABCD donde $m\measuredangle A = 60°$ y AB=L. Se ubican los puntos medios E y F de los lados AB y BC, los segmentos CE y $\overline{DF}$ se intersecan en R. ¿Cuánto mide $\overline{AR}$?

A) $\frac{5}{6}L$ B) $\frac{3}{2}L$ C) $\frac{7}{2}L$
D) $\frac{6}{5}L$ E) $\frac{\sqrt{37}}{5}L$

PROBLEMA Nº 92 seminario 2/ 2000-I

En la figura mostrada PQMN es un cuadrado. Hallar x en función de a, b y c.



A) $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$

B) $\sqrt{2a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)}$

C) $\sqrt{a^2+2b^2+c^2+2(ac-ab-bc)}$

D) $\sqrt{a^2+b^2+2c^2+2(bc-ab-ac)}$

E) $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+ab+ac+bc}$

PROBLEMA Nº 93 seminario 2/2000-I

En un triángulo ABC de baricentro G y circuncentro O.
Si $(AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2 = 54$ y $R = \sqrt{10}$ (R es circunradio). Halle OG.

A) 5 B) 1 C) 4
D) 2 E)3

PROBLEMA Nº 94 seminario 3 / 2001-I

Se tiene una hoja rectangular ABCD cu-

yas dimensiones son $AB=a$ y $BC=b$ ($a>b$). Se dobla la hoja rectangular tal que los vértices A y C coincidan. Calcule la longitud del doblez.

A) $\frac{\sqrt{ab}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$

C) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ D) $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

E) $\frac{2b\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

PROBLEMA Nº 95 seminario 3/2001-I

La razón de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a 5/8 y la proyección de la mediana relativa a la hipotenusa sobre esta mide 6cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

A) 32cm   B) 42cm   C) 52cm
D) 62cm   E) 72cm

PROBLEMA Nº 96 seminario 3/2001-I

En una semicircunferencia de diámetro AB se trazan las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si $AC=a$ y $BD=b$. Halle la razón de las longitudes de las proyecciones ortogonales de las cuerdas sobre el diámetro.

A) $\frac{2a}{b}$ B) $\frac{a+b}{b}$ C) $\frac{a+b}{a}$

D) $\frac{a^2}{b^2}$ E) $\frac{a}{b}$

PROBLEMA Nº 97 seminario 3/2001-I

ABCD es un romboide ($AB<BC$), $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo BAD ($E\in\overline{BC}$) $L\in\overline{AD}$ y $\overline{LN}\perp\overline{AE}$ (N punto medio de $\overline{AE}$), $\overline{NQ}\perp\overline{BE}$ ($Q\in\overline{BE}$). Si $BQ=4u$ y $NL=6u$. Calcule AL.

A) 6u   B) 7u   C) 8u
D) 9u   E) 10u

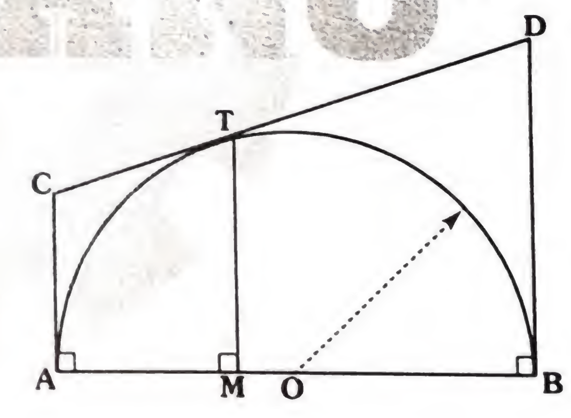
PROBLEMA Nº 98 seminario 3/2001-I

En un cuadrado ABCD se traza $\overline{PQ}\perp\overline{AD}$ ($P\in\overline{BC}, Q\in\overline{AD}$) intersectando a la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ en el punto F (F en el interior del cuadrado). Si $AF=6m$ y la distancia de B al segmento AP es 2m. Halle AP

A) 16m   B) 17m   C) 18m
D) 19m   E) 10m

PROBLEMA Nº 99 seminario 3/2001-I

En la figura, T es punto de tangencia. Si $CT=4u$ y $TD=12u$. Calcule OM.



A) 5u   B) 4u   C) $4\sqrt{3}$ u
D) 3u   E) $2\sqrt{3}$ u

PROBLEMA Nº 100 seminario 3/2001-I

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $AB=3u$, se inscribe una circunferencia $\mathscr{C}_1$ de radio 1u, se traza una circunferencia $\mathscr{C}_2$ tangente a $\mathscr{C}_1$ y al cateto BC y a la hipotenusa $\overline{AC}$. Halle el radio de $\mathscr{C}_2$.

A) $\frac{11-2\sqrt{10}}{9}u$ B) $\sqrt{10}u$ C) $\frac{4}{9}u$

D) $\frac{11-2\sqrt{5}}{9}$ E) $\sqrt{5}u$

PROBLEMA Nº 101

En el siguiente gráfico, $\overline{AB}$ es diámetro, $AF=6m$ y $AM=5m$. Calcule (FM)(MN)

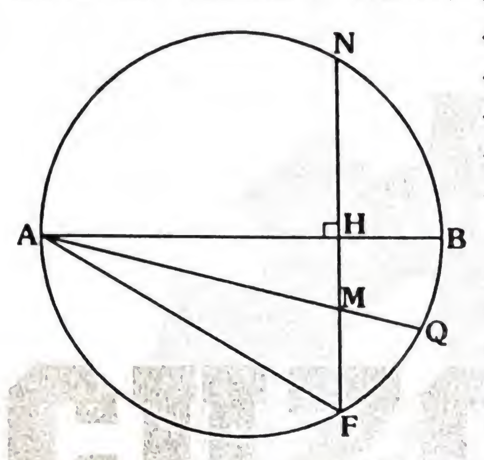
A) $10m^2$

B) $11m^2$

C) $12m^2$

D) $13m^2$

E) $14m^2$



PROBLEMA Nº 102

Dado un triángulo ABC, tal que :

$$\frac{1}{(AB)^2}+\frac{1}{(BC)}=\frac{1}{a^2}$$

Si la circunferencia que pasa por los puntos medios de sus tres lados M de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ y P de $\overline{AC}$ también pasa por el vértice B y por el punto Q que pertenece a $\overline{AP}$. Halle BQ

A) a/3   B) a/2   C) a

D) 2a/3   E) 3a/2

PROBLEMA Nº 103

ABCD es un cuadrilátero, se ubican los puntos medios N y M de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $AB=2$, $CD=4$ y $m\measuredangle A+m\measuredangle D=90°$, entonces MN mide:

A) 2   B) $2\sqrt{3}$ C) 3

D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 104

Sea el triángulo ABC, recto en B, D es punto medio de $\overline{AC}$ y $E\in\overline{AB}$ tal que $m\measuredangle BDE=90°$. Si $AE=5$ y $BE=13$. Halle BC

A) 10   B) 11   C) 12

D) 13   E) 14

PROBLEMA Nº 105

En la figura ABCD es un trapecio isósceles, las circunferencias son tangentes y sus radios miden 3u y 4u. Calcule la mediana del trapecio.

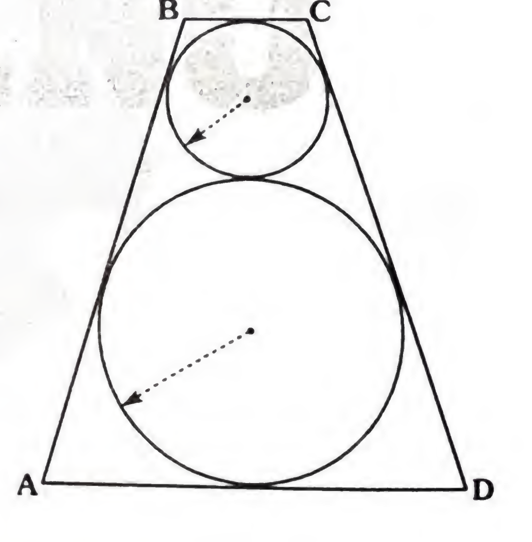
A) $\frac{25}{6}\sqrt{3}$

B) $\frac{13}{5}\sqrt{3}$

C) $\frac{17}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{29}{3}\sqrt{6}$

E) $\frac{\sqrt{150}}{3}$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 106

Las bases de un trapecio miden 6 y 10; sus diagonales miden 8 y 12. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases.

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 107

En un paralelogramo ABCD, se tiene que AB=3; AD=5 y AC=7. Halle $m\measuredangle BAD$.

A) 60° B) 30° C) 53°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº 108 seminario 3 /2000-II

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BF y la mediana BM de modo que MF=BF. Si $(AB)(BC)=16cm^2$, halle AC.

A) 4m B) 2m C) 5m
D) 8m E) 10m

PROBLEMA Nº 109 seminario 3 /2008-I

En un triángulo rectángulo KLM, recto en L, se ubica el punto N exterior relativo al lado $\overline{LM}$, tal que :

$$m\measuredangle NML = m\measuredangle NKL = m\measuredangle NLM$$

Si $KL = 2\ell$, P es punto medio de $\overline{LK}$ y $KM = m$, entonces NP es:

A) $\sqrt{\dfrac{m^2-\ell^2}{5}}$ B) $\dfrac{2}{3}\sqrt{m^2-2\ell^2}$

C) $2\sqrt{m^2-2\ell}$ D) $\sqrt{\dfrac{m^2-2\ell^2}{2}}$

E) $\sqrt{\dfrac{m^2-2\ell^2}{3}}$

PROBLEMA Nº 110

Los lados de un triángulo ABC miden: $AB=7u$, $BC=6u$ y $AC=5u$. La circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ es tangente a dicho lado en P. En dicha circunferencia se traza la cuerda PQ paralela a $\overline{AC}$. Calcule PQ(en u)

A) 9,6 B) 8,4 C) 7,2
D) 9,2 E) 8,6

PROBLEMA Nº 111

Una circunferencia de centro O' es tangente al rayo OY y secante al rayo OX en A y B (O–A–B). Si $m\measuredangle XOY = 90°$; $OA = a$ y $OB = b$. Halle la distancia de O' al rayo OX.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\dfrac{2ab}{a+b}$

C) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ D) $\sqrt{b(a+b)}$

E) $\sqrt{a(a+b)}$

PROBLEMA Nº 112

En un triángulo ABC, AB=c, BC=a y AC=b. Se traza la bisectriz interna $\overline{BD}$ que al prolongar interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en E.

Halle DE.

A) $\dfrac{b^2\sqrt{ac}}{(a+c)\sqrt{(a+c)^2-b^2}}$

B) $\dfrac{a^2\sqrt{bc}}{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}}$

C) $\dfrac{c^2\sqrt{ab}}{(a+c)^2-b^2}$ D) $\dfrac{abc}{(a+b)^2-c^2}$

E) $\dfrac{b^2\sqrt{ac}}{\sqrt{(a+c)^2-b^2}}$

PROBLEMA Nº 113 seminario 2 /2005-II

En un triángulo ABC sus lados miden $AB=5$, $BC=7$ y $AC=6$. La circunferencia inscrita al triángulo determina el punto M en el lado AC. Halle BM

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 114 seminario 2 /2005-II

Desde un punto exterior C de una circunferencia se trazan las tangentes CB y CP (B y P son puntos de tangencia), luego se traza la cuerda BQ, $\overline{BQ}\cap\overline{CP}=\{A\}$ y $P\in\overline{AC}$. Si $AQ=1$; $AP=2$ y $BC=6$. Calcule PB

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 115 seminario 2 /2005-II

En un triángulo ABC, se traza la altura CH; se ubican los baricentros G, G_1 y G_2 de los triángulos ABC, CHB y AHC en ese orden; sea $\overline{CM}$ una mediana del triángulo ABC, si $AB=3(CM)$ y $(HG_1)^2+(HG_2)^2=k(CG)^2$, halle k.

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{10}{7}$

D) $\dfrac{9}{10}$ E) $\dfrac{13}{8}$

PROBLEMA Nº 116 seminario 2 /2005-II

En un triángulo ABC, $AB=5u$, $BC=7u$ y $AC=8u$. Se traza la altura BH y la bisectriz interior BD.

Halle la magnitud del segmento HD.

A) $\dfrac{8}{7}u$ B) $\dfrac{7}{6}u$ C) $\dfrac{4}{5}u$

D) $\dfrac{5}{6}u$ E) $\dfrac{6}{5}u$

PROBLEMA Nº 117 seminario 3 /2006-II

En el paralelogramo ABCD, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ miden 12u y 8u. La circunferencia circunscrita al triángulo ABD interseca a $\overline{BC}$ y es tangente a $\overline{CD}$ en D. Calcule CD.

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 118 seminario 3 /2006-II

En un triángulo ABC, el ángulo exterior en B, mide el doble que el ángulo exterior en C. Si $AB=a$ y $BC=b$.
Calcular AC.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a(a-b)}$
C) $\sqrt{a(a+b)}$ D) $\sqrt{b(a+b)}$
E) $\sqrt{b(a-b)}$

PROBLEMA Nº 119 seminario 3 /2006-II

Dado el triángulo ABC:
la $m\measuredangle A=2(m\measuredangle B)$, $AC=b$ y $AB=c$.
Hallar BC.

A) $\sqrt{b(b+c)}$ B) $\sqrt{b^2+c^2+bc}$

C) $\sqrt{\dfrac{b[b-c]+c^2}{c-b}}$ D) $\sqrt{b(c-b)}$

E) $\sqrt{bc}$

PROBLEMA Nº 120 seminario 3 /2006-II

En un triángulo ABC, la suma de los cuadrados de las medidas de los tres lados es 36u y el circunradio mide $\sqrt{8}$. Calcular la distancia del ortocentro al circuncentro.

A) 3u B) 2,5u C) 2u
D) 1,5u E) 6u

PROBLEMA Nº 121 seminario 3 /2008-I

Se tiene el cuadrilátero ABCD, si AB=39u, AC=65u, BC=52u y CD=60u. Calcule BD.

A) 24u B) 54u C) 56u
D) 62u E) 63u

PROBLEMA Nº 122 seminario 3 /2001-I

En una circunferencia de centro O y diámetro AB, se trazan las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ de manera que: $\overline{CD} \cap \overline{AO} = \{M\}$, $\overline{DE} \cap \overline{OB} = \{N\}$, $CM = 6\sqrt{5}u$, $MD = 10\sqrt{5}u$, $DN = 25u$ y $NE = 7u$.

Calcule $(ON)^2 - (OM)^2$

A) $81u^2$ B) $100u^2$ C) $120u^2$
D) $125u^2$ E) $130u^2$

PROBLEMA Nº 123

En un cuadrante COB (de centro O) se traza la recta secante HK ($K \in \overline{OC}, H \in \overline{BC}$) si $\overleftrightarrow{HK} \cap \overleftrightarrow{BO} = \{T\}$ y $TO = OK = KH = \sqrt{2}u$. Halle KB

A) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}u$ B) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}u$
C) $(2+\sqrt{2})u$ D) $\sqrt{3+2}u$
E) $\sqrt{1+\sqrt{2}}u$

PROBLEMA Nº 124 seminario 3 /2008-I

En el interior de un romboide ABCD se ubica el punto F tal que $FA = 4$, $FB = 2$, $FC = 6$ y $FD = 3$.

Calcule $(AC)^2 - (BD)^2$

A) 69 B) 73 C) 65
D) 78 E) 81

PROBLEMA Nº 125 seminario 3 /2008-I

Los lados de un triángulo ABC miden $AB = 4m$, $BC = 5m$ y $AC = 6m$, sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto P tal que $AP = 4{,}5m$. Halle PB.

A) 4m B) 5m C) 6m
D) 7m E) 8m

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 126 seminario 3 /2008-I

En el heptágono regular ABCDEFG, calcular la longitud de su lado, si :

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{BF} = 0{,}2$$

A) 0,2 B) 0,1 C) 2

D) 5 E) 10

PROBLEMA Nº 127 seminario 3 /2008-I

En el triángulo acutángulo ABC, se tiene que $AB = 7$, $AC = 9$ y $m\measuredangle AIK = 90^o$.

Halla BC, siendo I el incentro y K el circuncentro.

A) $6\sqrt{2}$ B) 7 C) 8

D) $8\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 128 seminario 3 /2001-I

En un trapecio isósceles, una de sus diagonales mide 24u y el producto de las longitudes de sus bases es $351u^2$. Calcular la medida de uno de sus lados no paralelos.

A) 20u B) 18u C) 16u

D) 15u E) 17,5u

PROBLEMA Nº 129 seminario 3 /2001-I

Sea Q un punto del interior de un triángulo equilátero ABC, se tiene que:

$$m\measuredangle AQB = 90^o, \quad QC = b \quad y \quad BC = a$$

Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CQ}$.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$

C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ D) $\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$

E) $\frac{ab}{a+b}$

PROBLEMA Nº 130 seminario 3 /2001-I

ABC es un triángulo equilátero donde un punto M exterior y relativa a $\overline{AB}$, se trazan $\overline{MA}$ y $\overline{MC}$ tal que:

$$m\measuredangle MAB = m\measuredangle MCB$$

Si $MA = 6u$ y $MC = 8u$. Calcule MB

A) 1u B) 2u C) 3u

D) 4u E) 5u

PROBLEMA Nº 131 seminario 3 /2007-I

ABCD es un cuadrado inscrito en una circunferencia $P \in \overset{\frown}{AB}$, $PA = a$ y $PB = a\sqrt{2}$ Halle PC.

A) 2a B) $a\sqrt{2}$ C) 3a

D) $a\sqrt{6}$ E) $\frac{3}{2}a$

PROBLEMA Nº 132 seminario 3 /2008-I

En el romboide ABCD, O y M son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

Si $(AB)^2 + 2(AD)(AN) = 289$. Calcule AC.

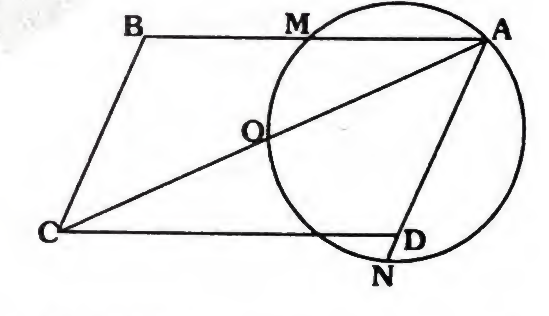
A) 13

B) 14

C) 15

D) 16

E) 17



PROBLEMA Nº 133 seminario 3 /2005-II

En un polígono regular de 13 lados ABCD...LM, si $AD = m$ y $AE = n$.

Calcule DJ.

A) $\sqrt{m^2+2n^2}$ B) $\sqrt{n^2-mn}$

C) $\sqrt{m^2+mn}$ D) $\sqrt{m^2+n^2}$

E) $\sqrt{n^2+m^2+mn}$

PROBLEMA Nº 134 seminario 3 /2005-II

Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia, en el arco AB se ubica el punto P, si $PF=a$ y $PC=b$. Halle PD, además $a>b$.

A) $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{b+a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a+b}{2}$

D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$

PROBLEMA Nº 135 seminario 3 /2006-I

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la bisectriz interior BD y por D se traza una perpendicular de lado AC que interseca a $\overline{BC}$ en el punto E. Si $AB=5\sqrt{2}$ y $BE=4\sqrt{2}$. Halle BD.

A) 8 B) 9 C) 9,5

D) 10 E) 10,5

PROBLEMA Nº 136 seminario 3 /2006-I

Se tiene dos rectángulos simétricos ABCD y AB'CD' con respecto a una recta que pasa por $\overline{AC}$. Si $AB=4cm$ y $BC=6cm$. Halle la longitud de $\overline{BD'}$ (en cm).

A) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{10}{\sqrt{7}}$ C) $\frac{10}{\sqrt{11}}$

D) $\frac{10}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{10}{\sqrt{17}}$

PROBLEMA Nº 137 seminario 3 /2006-I

Se tiene el triángulo equilátero ABC de lado "L", $M\in\overline{BC}$ tal que $BM=2(MC)$, el triángulo AB'C' es el simétrico del triángulo ABC con respecto a la recta AM. Calcule BC'.

A) $\frac{L}{7}\sqrt{7}$ B) $\frac{2L}{7}\sqrt{7}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{7}L$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}L$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}L$

PROBLEMA Nº 138 seminario 3 /2006-II

En un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud 2 se inscribe una circunferencia C, el punto P pertenece a dicha circunferencia. Halle la suma de los cuadrados de las distancias de P a los vértices A, B y C.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 139 seminario 3 /2005-II

Los lados consecutivos de un trapezoide mide 2, 3 y 4. Si las diagonales son perpendiculares, determine la longitud del cuarto lado.

A) 5 B) 3 C) 4

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

PROBLEMA Nº 140

En un cuadrilátero ABCD $m\measuredangle B=90°$; $m\measuredangle BCD=120°$ y $m\measuredangle ACD=90°$. Si $AB=2$ y $CD=4$. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

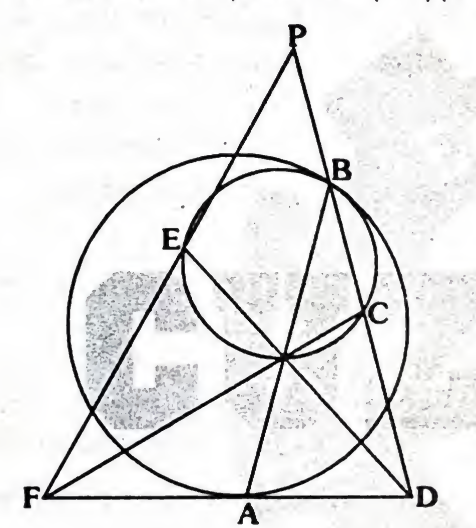
A) $\sqrt{5+\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{6}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

PROBLEMA Nº 141

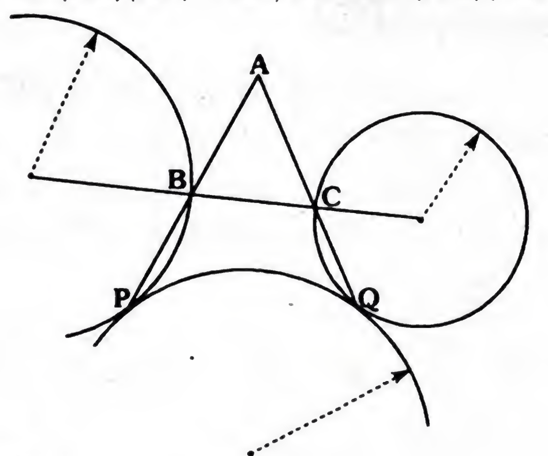
En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si $(PD)(PC)=16$, calcule $(PF)(PE)$



A) 8 B) 16 C) $8\sqrt{2}$
D) 4 E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, P y Q son punto de tangencia. Si $(AB)(AP)=16$, calcule $(AC)(AQ)$



A) 8 B) 16 C) 14
D) 18 E) 32

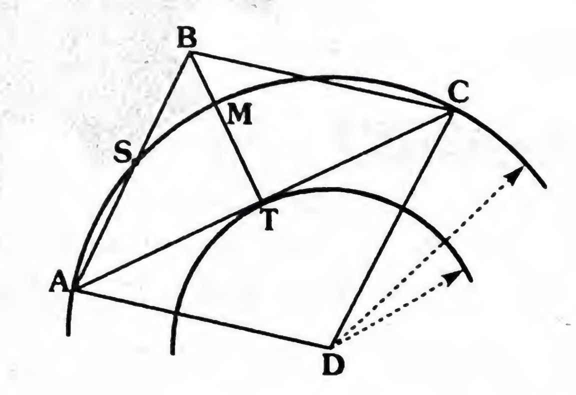
PROBLEMA Nº 143

En una circunferencia de diámetro AB, se trazan las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ las cuales se cortan en E. Si $(AE)(AD)+(BE)(BC)=8$, halle el radio de la circunferencia.

A) 8 B) 4 C) 2
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 144

En el gráfico, ABCD es paralelogramo y T es punto de tangencia. Si $BM=MT=a$. Calcule BS.



A) a B) 2a C) $\frac{7}{3}a$
D) $a\sqrt{3}$ E) $\frac{5}{3}a$

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, P es punto de tangencia. Si $MN=1$, calcule BM.

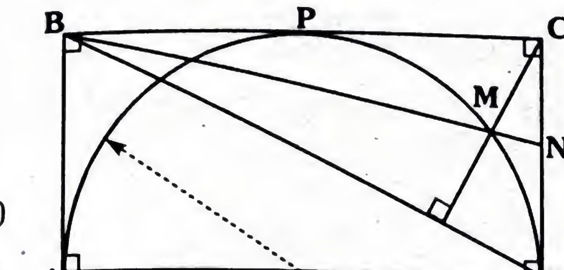
A) 7

B) 8

C) 9

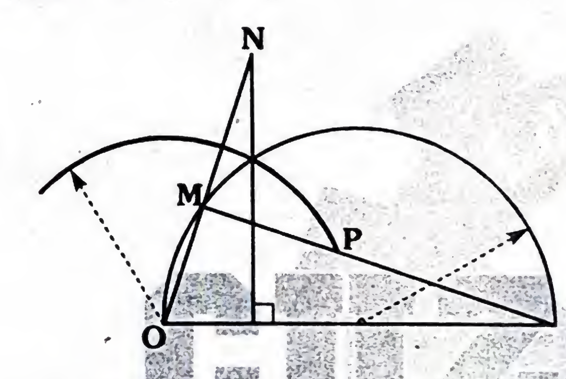
D) 10

E) 11



PROBLEMA Nº 146

En el gráfico, $OM = a$ y $MN = b$. Calcule MP.



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{2a^2-b^2}$

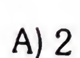
C) $\sqrt{ab}$ D) $\dfrac{a+b}{2}$

E) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

PROBLEMA Nº 147

En el gráfico, se cumple que $AB-BC=1$; $CD=4$; $AQ=QP$ y $(TB)(BR)=6$.

Calcule TP (T es punto de tangencia)



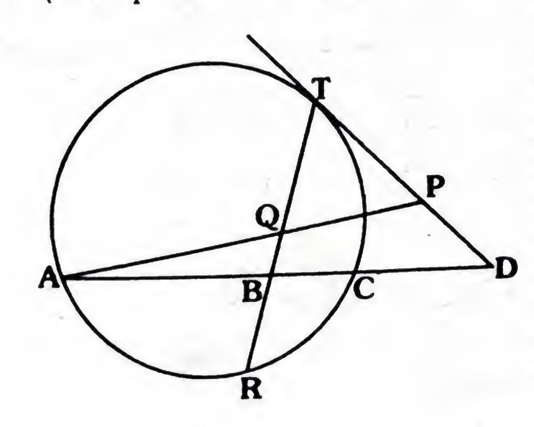
A) 2

B) 3

C) 4

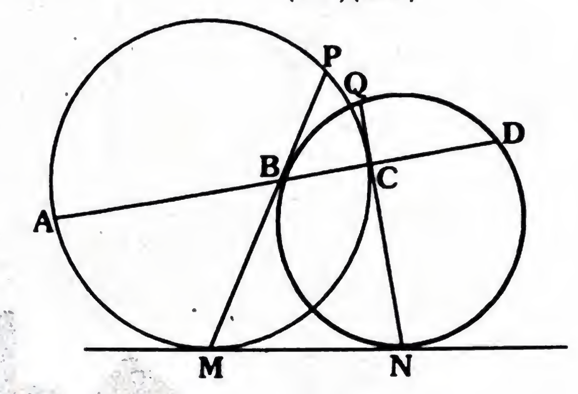
D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, M, N, B y C son puntos de tangencia. Calcule $\dfrac{(AB)(QC)}{(BP)(CD)}$

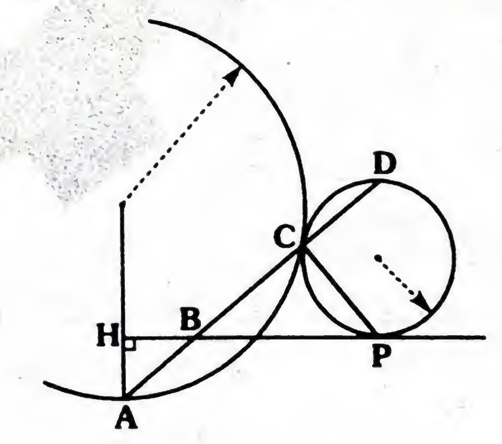


A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 149

En el gráfico, $AB=2$; $CD=3$ y $(HB)(BP)=8$. Calcule PC.

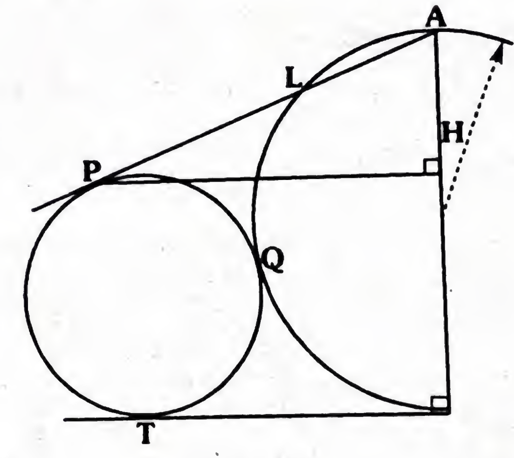


A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº 150

En el gráfico, P,Q y T son puntos de tangencia. Calcule $\dfrac{AH}{AL}$



A) 1 B) 2 C) 3

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 151

En una semicircunferencia de diámetro AB se inscribe una circunferencia que es tangente al arco AB y al diámetro AB en P y Q respectivamente. Si $PQ=2$ y $AB=\sqrt{2}(AQ)$, calcule BQ.

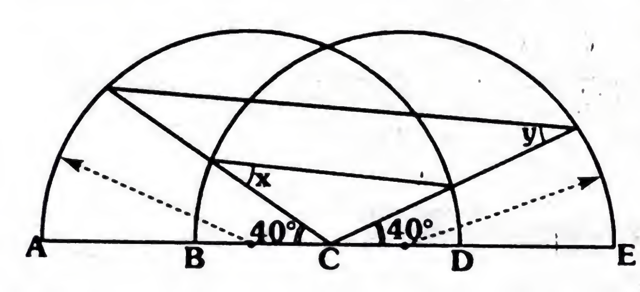
A) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 152

Según el gráfico, $AB=BC$ y $CD=DE$, calcule $x+y$

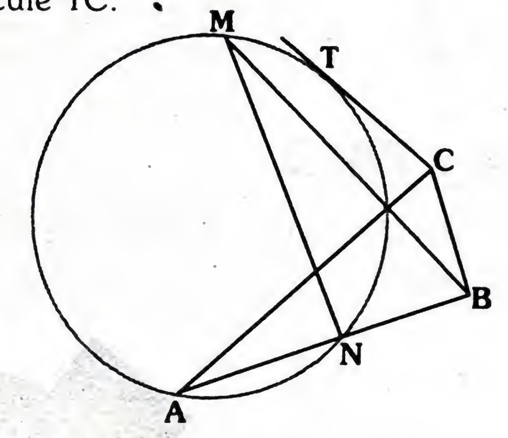


A) 80° B) 100° C) 50°
D) 160° E) 120°

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico, T es punto de tangencia, $\overline{MN} // \overline{CB}$ y $CB=10$.

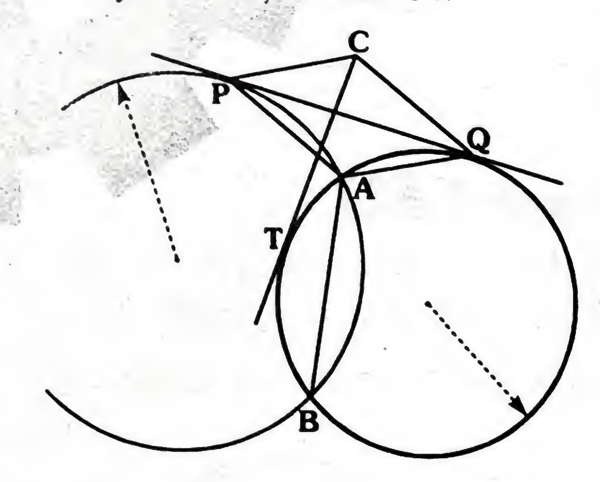
Calcule TC.



A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{2}$
D) 10 E) $5\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 154

En el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia y APCQ es paralelogramo. Si $PQ=6$ y $AB=8$, calcule CT.

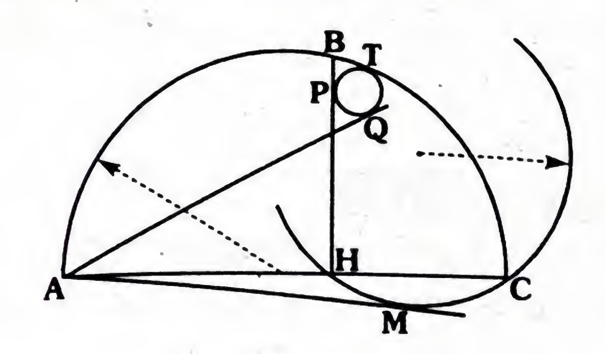


A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) 5
D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 155

En el gráfico, P, T, Q y M son puntos de tangencia.

Si $m\measuredangle BAQ = \theta$, calcule $m\measuredangle BMQ$.



A) θ B) 2θ C) $\theta/2$

D) $90° - \dfrac{\theta}{2}$ E) $90° - \dfrac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 156

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH se ubican M y N en $\overline{HB}$ y $\overline{HC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle AMN = 90°$ y $BM = MH$.

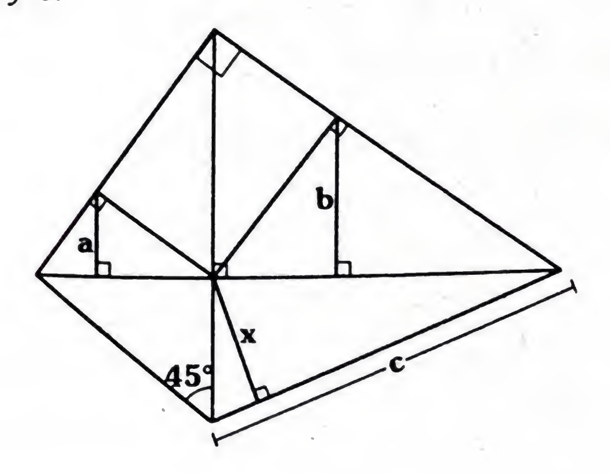
Calcule $\dfrac{HN}{NC}$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$

D) $\dfrac{2}{3}$ E) 1

PROBLEMA Nº 157

En el gráfico, calcule x en función de a, b y c.



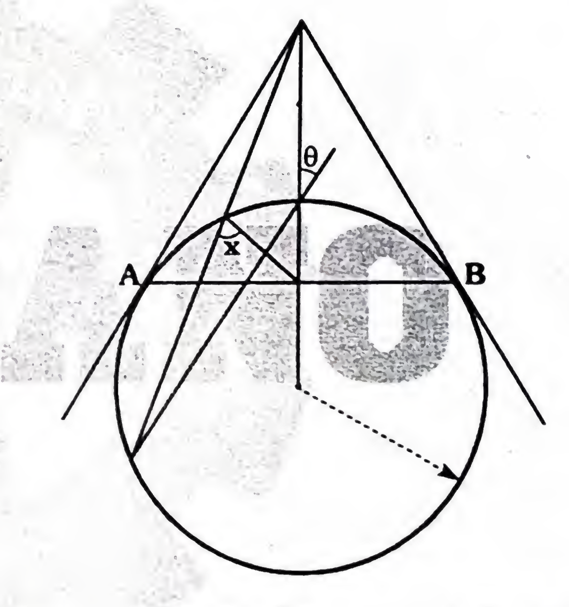
A) $\dfrac{a^2+b^2}{c}$ B) $\dfrac{ab}{c}$

C) $\dfrac{(a+b)^2}{c}$ D) $\dfrac{(a+b)^2}{2c}$

E) $\dfrac{a^2b^2}{c^2}$

PROBLEMA Nº 158

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule x.



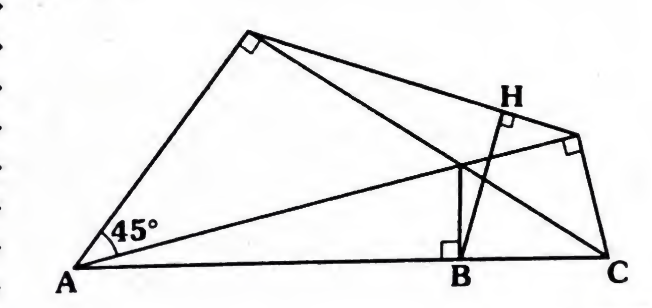
A) θ B) 2θ C) $90° - \theta$

D) $180° - \theta$ E) $180° - 2\theta$

PROBLEMA Nº 159

En el gráfico, $AB = a$ y $BC = b$.

Calcule HB



A) $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

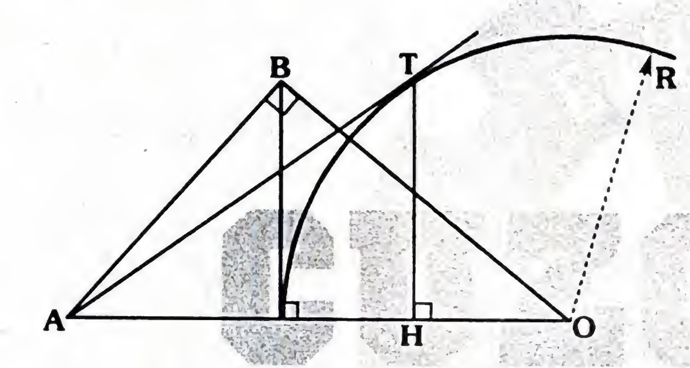
C) $\frac{ab}{a+b}$ D) $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$

E) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Si $OB=a$ y $OH=b$. Calcule R



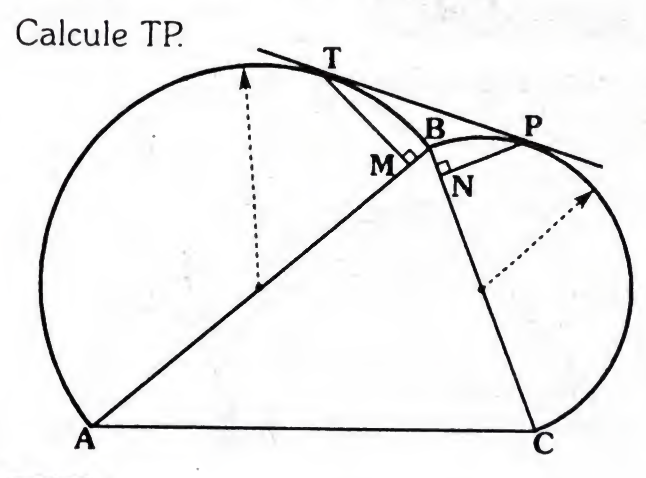
A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt[3]{ab^2}$ C) $2\sqrt{ab}$

D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\sqrt[3]{a^2b}$

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia y $\sqrt{(BM)(MA)}+\sqrt{(BN)(NC)}=k$.

Calcule TP.



A) k B) $\frac{k}{2}$ C) 2k

D) $\frac{k}{3}$ E) $\frac{2k}{3}$

PROBLEMA Nº 162

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B. Se ubica D en $\overline{AC}$ y E en $\overline{AB}$, tal que $AD=DC$ y $m\measuredangle EDB=90^\circ$.

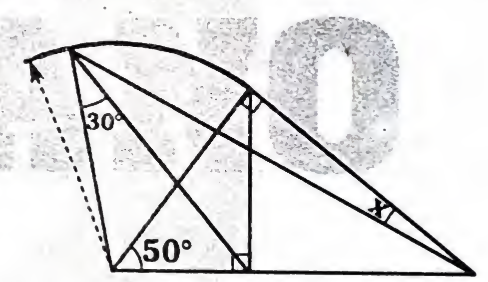
Si $AE=5$ y $BE=13$. Calcule BC

A) 12 B) 9 C) 8

D) 10 E) 15

PROBLEMA Nº 163

Del gráfico, calcule x.



A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 12°

PROBLEMA Nº 164

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P y Q en $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle BAQ=m\measuredangle QAP$.

Si $PD=a$ y $BQ=b$. Calcule AB.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{b(a+2b)}$

C) $\sqrt{b(2a+b)}$ D) $\sqrt{ab}$

E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 165

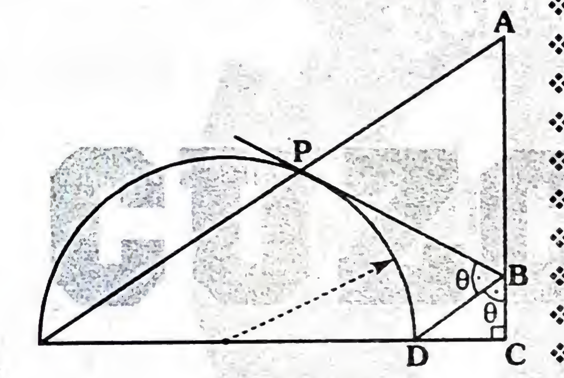
En el trapecio isósceles ABCD, se cumple que $AB = BC = CD = 2$ y $AD = 4$. Se traza la circunferencia de centro O, tangente a $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{CD}$. Calcule OA

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 2 E) 4

PROBLEMA Nº 166

En el gráfico, P es punto de tangencia. Si $(AB)(BC) = 16$. Calcule BD.

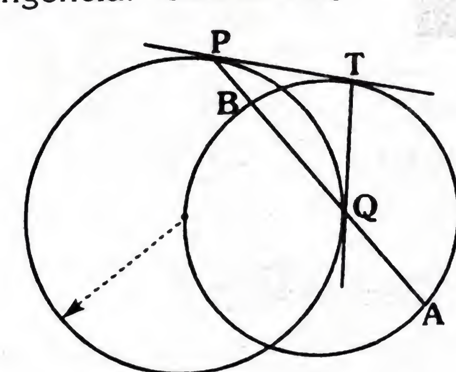
A) $2\sqrt{2}$
B) 4
C) 6
D) $4\sqrt{2}$
E) 8



PROBLEMA Nº 167

En el gráfico, $BQ = 2(BP) = 4$; P, T y Q son puntos de tangencia. Calcule AQ.

A) 6
B) 2
C) 3
D) 2,5
E) 3,5

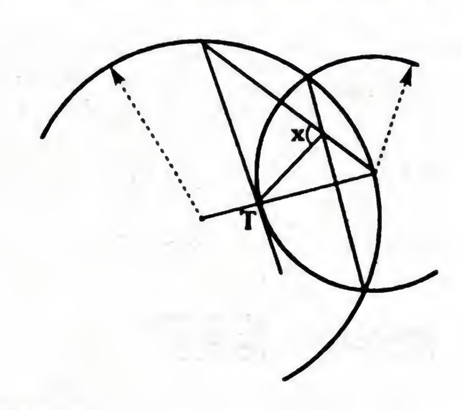


PROBLEMA Nº 168

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Calcule x.

A) 75°
B) 120°
C) 90°
D) 45°
E) 106°



PROBLEMA Nº 169

En el triángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q tal que:

$$m\measuredangle BPQ = m\measuredangle BCA \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{(PB)^2} + \frac{1}{(BQ)^2} = \frac{1}{36}$$

Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{PQ}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 6 B) 3 C) 12
D) 9 E) 4

PROBLEMA Nº 170

En el cuadrado ABCD, con diámetro $\overline{AD}$ se traza interiormente una semicircunferencia y en $\overset{\frown}{AD}$ se ubica P y se traza $\overline{PF} \perp \overline{BC}$ $(F \in \overline{BC})$, $AP = 6u$ y B dista 2u de $\overline{AF}$. Calcule AF

A) 12u B) 16u C) 18u
D) 20u E) 24u

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 171

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD, si $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $CD = d$, $m\measuredangle ABC = 120°$, $a > b$ y $\dfrac{a-b}{c+d} = k$.

Calcule: $\dfrac{a^3-b^3}{c^3+d^3}$

A) k B) k^2 C) $\sqrt{k}$

D) $\sqrt[3]{k}$ E) k^3

PROBLEMA Nº 172

En el gráfico, $NH=2$, $MH=3$ y $MN=4$. Calcule NQ.

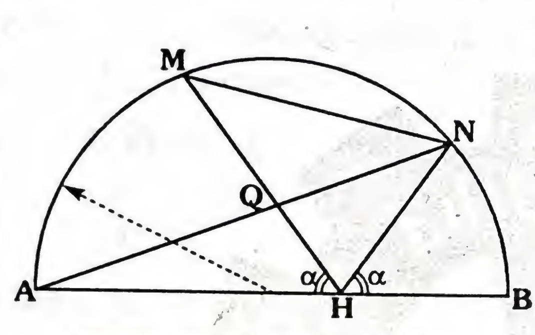
A) $2\sqrt{6}$

B) $\sqrt{6}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{6}$

E) $4\sqrt{6}$



PROBLEMA Nº 173

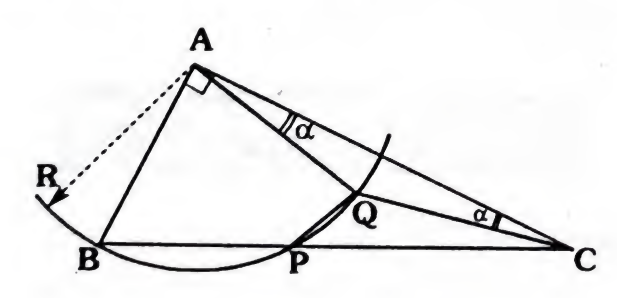
En paralelogramo ABCD se trazan $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ perpendiculares a $\overline{BD}$ (M y N en $\overline{BD}$). Si $BC=7$; $BD=CD=6$. Calcule MN

A) 13/4 B) 13/8 C) 13/6

D) 3 E) 5

PROBLEMA Nº 174

En el gráfico, $BP=PC$, $PQ=1$ y $AC=7\sqrt{2}$. Calcule R.



A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) 6

D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 175

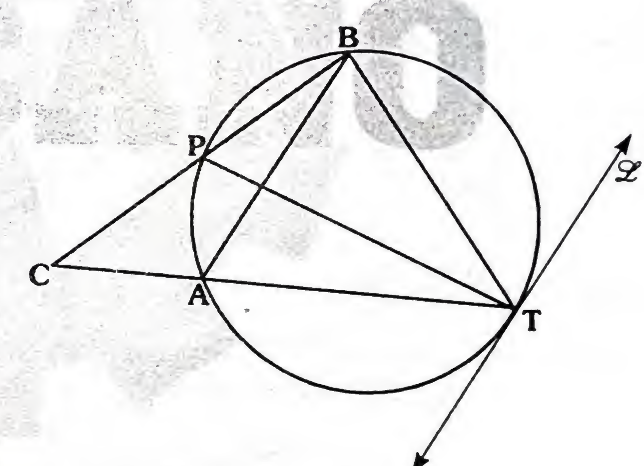
Se tiene el triángulo ABC, donde $AB=7$; $BC=9$ y $AC=4$. Se prolonga CA y se ubica P con centro P radio PA se traza una circunferencia tangente a $\overline{BC}$. Calcule el radio de dicha circunferencia.

A) 3 B) $\dfrac{9}{2}\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{6}$

D) $\sqrt{5}(3+\sqrt{5})$ E) $\sqrt{3}(3+\sqrt{2})$

PROBLEMA Nº 176

En el gráfico, $\overline{AB}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, T es punto de tangencia y $(CT)(TB)-(CP)(PA)=64$. Calcule TP



A) 9 B) 12 C) 16

D) 10 E) 8

PROBLEMA Nº 177

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD (D en la prolongación de $\overline{AC}$). Si la prolongación de $\overline{BD}$ interseca a la circunferencia circunscrita en E; $5(BC)=BD$ y $AB=10$.

Calcule BE

A) 2 B) 2,5 C) 2,15
D) 3 E) 3,15

PROBLEMA Nº 178

En un rectángulo ABCD de centro O; en $\overline{AD}$ se ubica el punto P, luego se traza el cuadrado PCEF (E exterior a ABCD relativo a $\overline{CD}$) de centro O_1.

Si $(CE)^2+(AP)^2+2(AB)(AP)=64$

Calcule OO_1.

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) 8
D) 2 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 179

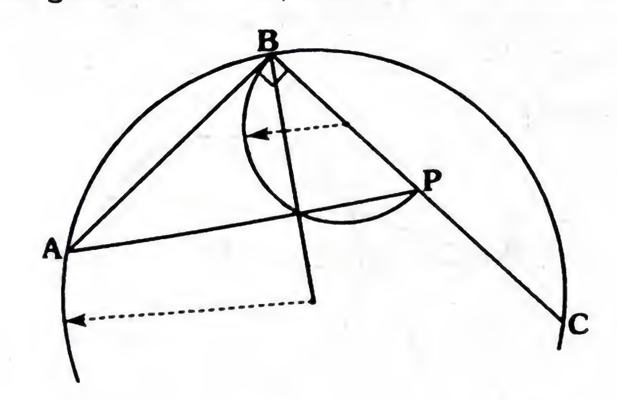
En la región interior de un romboide ABCD se ubica el punto F. Tal que $FA=4$, $FB=2$, $FC=6$ y $FD=3$.

Calcule $(AC)^2-(BD)^2$

A) 75 B) 48 C) 66
D) 78 E) 82

PROBLEMA Nº 180

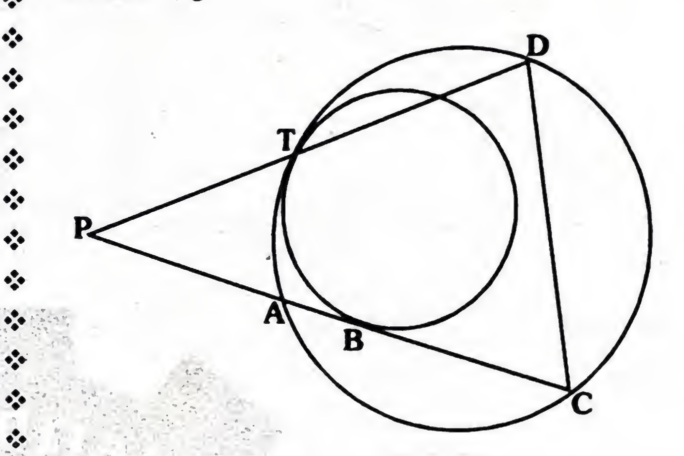
Del gráfico $BP=a$, $PC=b$. Calcule AB



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{a(a-b)}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{a(a+b)}$ E) $\sqrt{a^2-b^2}$

PROBLEMA Nº 181

Del gráfico, B y T son puntos de tangencia, si $PA=BC=2$ y $AC=DC=3$.
Calcule TC



A) $3\sqrt{5}$ B) $8\sqrt{5}$
C) $5\sqrt{17}$ D) $6\sqrt{\frac{5}{17}}$
E) $6\sqrt{17}$

PROBLEMA Nº 182

En un cuadrante AOB $(AO=OB)$ interiormente se traza una circunferencia tangente a $\overset{\frown}{AB}$ en Q y a $\overline{OB}$ en N respectivamente además $\overline{AB}\cap\overline{QN}=\{M\}$.

Si: $2(AO)(ON)-(NM)(MQ)=16$

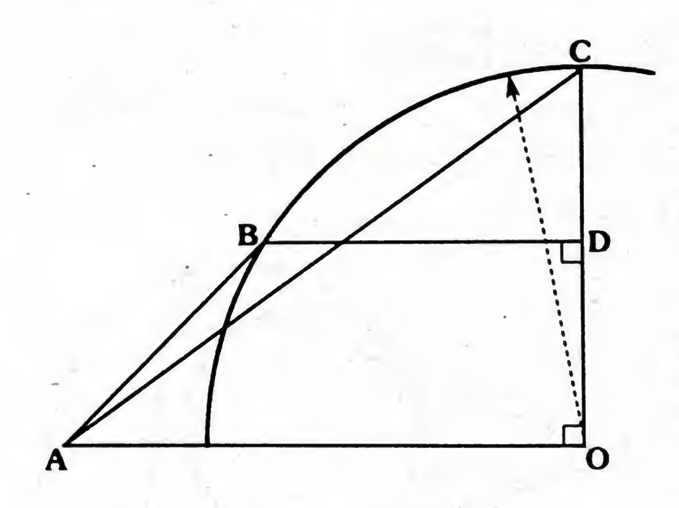
Calcule AM.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$
C) 8 D) $4\sqrt{2}$
E) 4

PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, $(AC)^2-(AB)^2=8(AO)$

Calcule BD.



A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 4
D) 8 E) 2

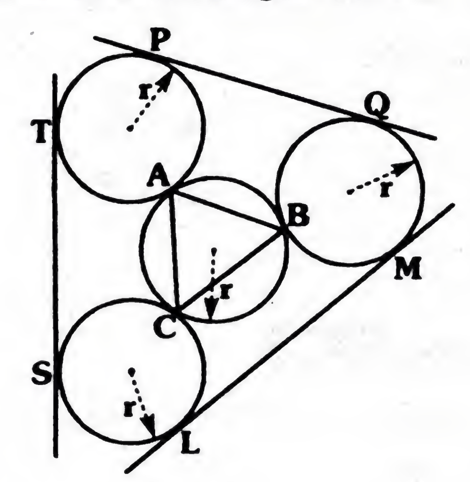
Problema Nº 184

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD y la mediana BM. Si BD = DM y (AB)(BC) = 10. Calcule AC

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}$

Problema Nº 185

En el gráfico, los puntos señalados con letras mayúsculas son de tangencia. Si $PQ = 26$ $TS = 28$ y $LM = 30$. Calcule la mayor altura del triángulo ABC.

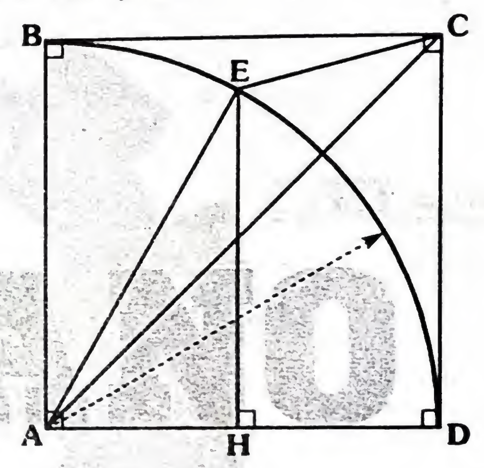


A) 12 B) 13 C) 14
D) $\dfrac{168}{13}$ E) $5\sqrt{2}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

Problema Nº 186

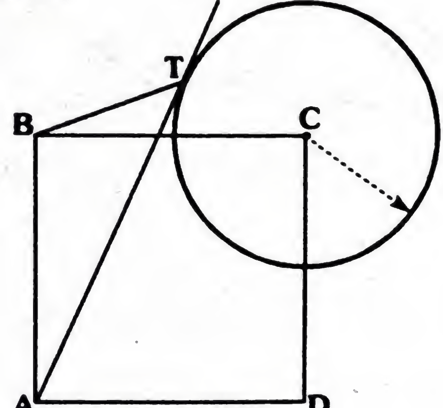
En el gráfico, (HD)(AD) = 32. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$.



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Problema Nº 187

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, T es punto de tangencia. Si $AT - r = 4\sqrt{2}$. Calcule BT.

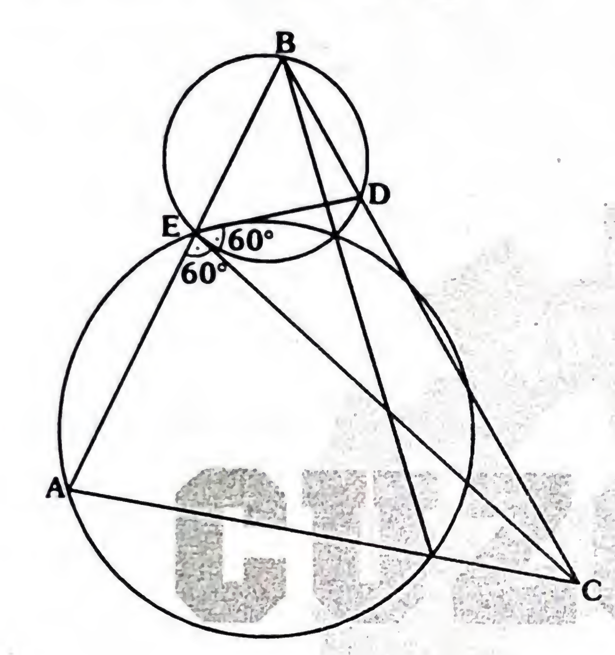


A) 2 B) 3 C) 4

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 188

En el gráfico, calcule $\dfrac{EC}{AE+ED}$



A) 2 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1

D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 189

En el triángulo ABC, se cumple que :

$$m\measuredangle BAC=60° \quad y$$

$$AB+AC=6$$

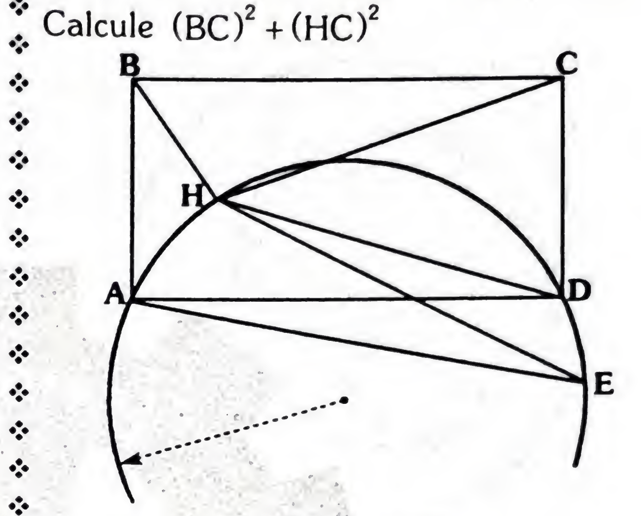
Luego se construyen exteriormente el triángulo equilátero BCP. Calcule AG (G es baricentro del triángulo BCP)

A) $3\sqrt{3}$ B) 3 C) 2

D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, ABCD es un rectángulo, $m\widehat{AH}=2(m\measuredangle DAE)$, $AE=HC$ y $(BH)^2+(HD)^2+(AE)(HD)=3$. Calcule $(BC)^2+(HC)^2$

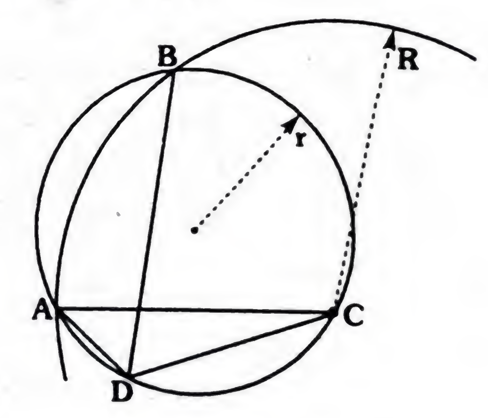


A) 1 B) $\dfrac{3}{5}$ C) 3

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 191

En el gráfico, AD=3, $R=r\sqrt{3}$ y CD=5. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

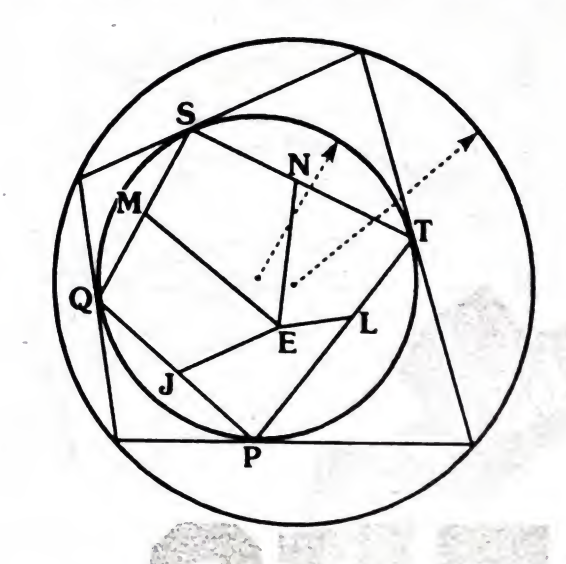


A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

PROBLEMA Nº 192

En el gráfico, P, Q, S y T son puntos de tangencia; M, N, L y J son puntos medios de $\overline{QS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TP}$ y $\overline{PQ}$ respectivamente. Si $EN = a$, $EJ = b$ y $EL = c$. Calcule EM.



A) $a + b - c$ B) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

C) $\sqrt{ab} + c$ D) $\sqrt[3]{abc}$

E) $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$

PROBLEMA Nº 193

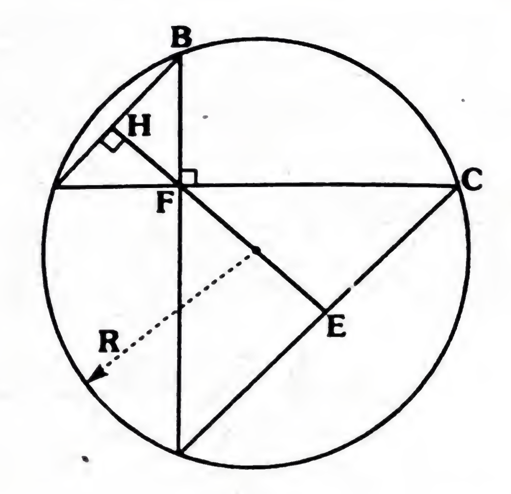
En la región exterior del paralelogramo ABCD, se trazan los triángulos equiláteros ADE y ABF, luego se ubica el punto R exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que $m\measuredangle FRE = 60°$, $\overline{CH} \perp \overline{FE}$ ($H \in \overline{FE}$) y $(FR)^2 + (RE)^2 + (RC)^2 = 32$. Calcule HC.

A) $2\sqrt{3}$ B) 2 C) 4

D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 194

En el gráfico, $R = 9$; $BC = 9\sqrt{2}$ y $EF = 8$. Calcule HF.



A) 1 B) $\sqrt{17}$ C) 8

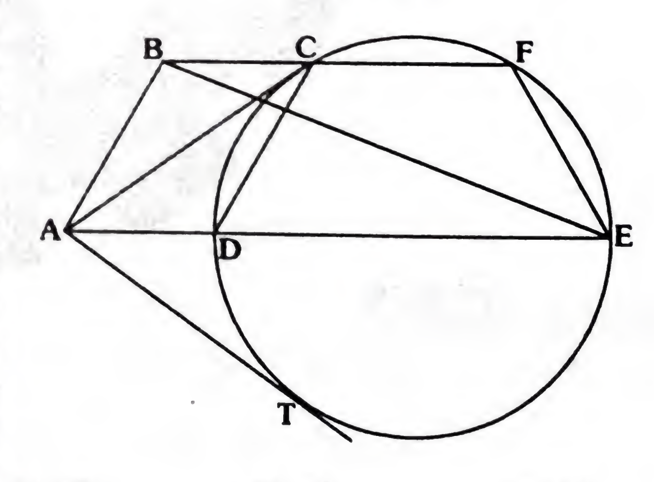
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

PROBLEMA Nº 195

En el gráfico, T es punto de tangencia ABCD es un paralelogramo y:

$$(CE)^2 + (EF)^2 + 2(AT)^2 = 30$$

Calcule $(AC)^2 + (BE)^2$



A) 50 B) 45 C) 60

D) 40 E) 30

PROBLEMA Nº 196

En el cuadrilátero inscrito ABCD, se cumple $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$ y $AD = d$. Se ubica P en $\overline{BC}$ tal que:

$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PAC$ y

$m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle BAD$

Calcule $\dfrac{BP}{PC}$

A) $\dfrac{ab}{cd}$ B) $\dfrac{ad+bc}{ab+cd}$ C) $\dfrac{ab+cd}{ad+bc}$

D) $\dfrac{cd}{ab}$ E) $\dfrac{a+b}{c+d}$

PROBLEMA Nº 197

En una circunferencia se inscribe el rectángulo ABCD, en $\overset{\frown}{BC}$ se ubica E, tal que $3(AE)+4(EC)=20$ y $m\overset{\frown}{DC}=74°$.

Calcule ED.

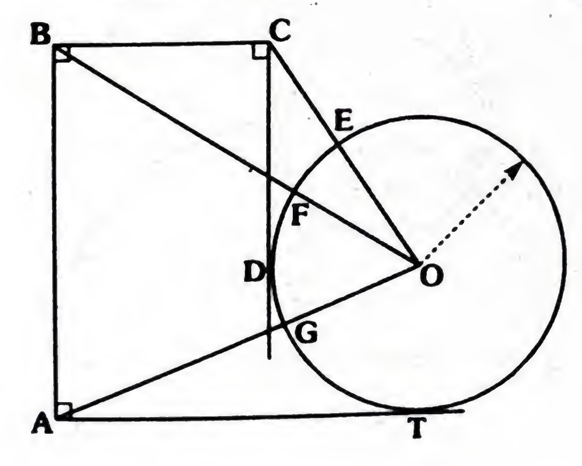
A) 2 B) 3 C) 4

D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 198

En el gráfico, G y D son puntos de tangencia. Si $EC=3$; $BF=5$ y $AG=4$.

Calcule $m\sphericalangle OAT$



A) 26,5° B) 30°

C) 22,5° D) 37°

E) 18,5°

PROBLEMA Nº 199

Se tiene el cuadrado ABCD, se cumple que $AB=2+\sqrt{3}$. Con centros en A y D se trazan los cuadrantes BAD y ADC respectivamente, los cuales se cortan en O. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AO}$.

A) $\frac{1}{2}\sqrt{11+6\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{4+3\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

E) $\sqrt{\dfrac{11+5\sqrt{3}}{2}}$

PROBLEMA Nº 200

Se tiene el cuadrado ABCD, con diámetro $\overline{CD}$ se traza una circunferencia, en ella se ubica P (P en la región interior del cuadrado). Si $AB=13$ y la distancia de A a $\overline{PD}$ es 12, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{PD}$.

A) $\sqrt{87}$ B) $\sqrt{\dfrac{174}{3}}$

C) $\frac{1}{2}\sqrt{74}$ D) $\dfrac{\sqrt{221}}{2}$

E) $\sqrt{86}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

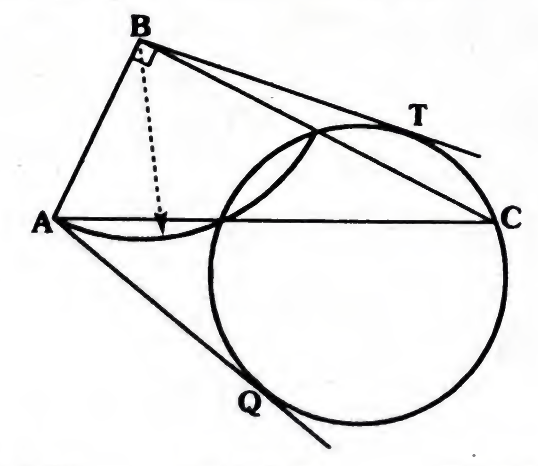
PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, N y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TN} = m\widehat{TE}$, $(AN)(NB) = 72$ y $TM = 8$. Calcule MQ.

A) 1
B) 2
C) 1,5
D) 2,5
E) 0,5

PROBLEMA Nº 202

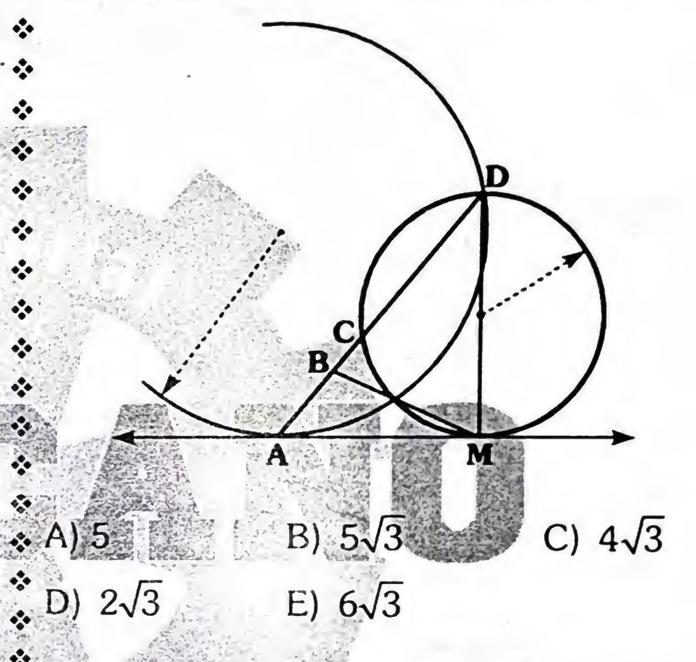
En el gráfico, $TB = AQ$, Q y T son puntos de tangencia. Calcule $m\measuredangle BCA$



A) 18,5°
B) 22,5°
C) 30°
D) 26,5°
E) 15°

PROBLEMA Nº 203

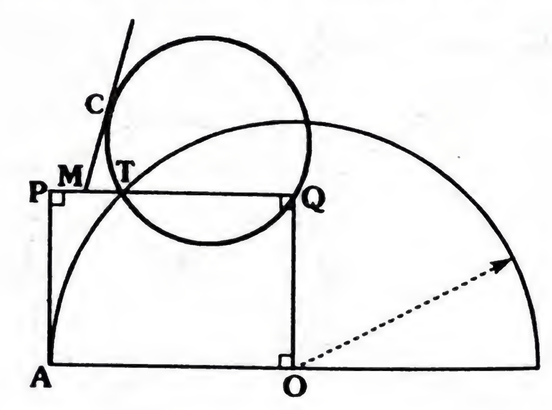
En el gráfico, A y M son puntos de tangencia. Si $AB=3$ y $BC=2$, calcule AM.



A) 5
B) $5\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 204

En el gráfico, $PM = MT$, C es punto de tangencia y $MC = 2$. Calcule OQ.

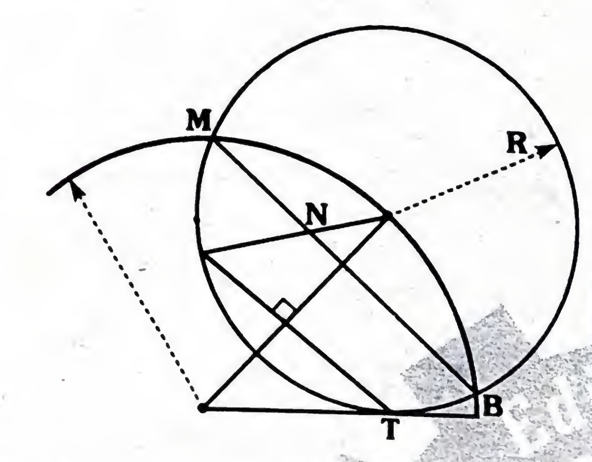


A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, T es punto de tangencia y $R=4$.

Calcule (MN)(NB).

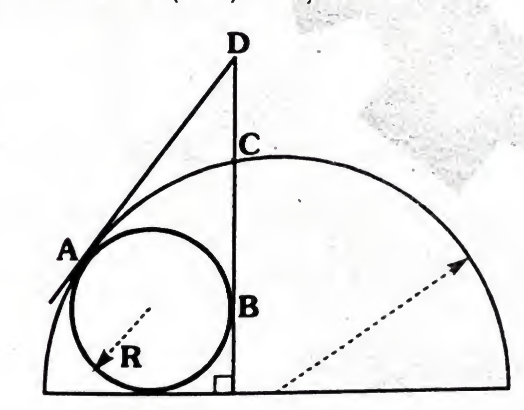


A) 12 B) 18 C) 24

D) 16 E) 32

PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si $BC = 2(CD) = 2$, calcule R.

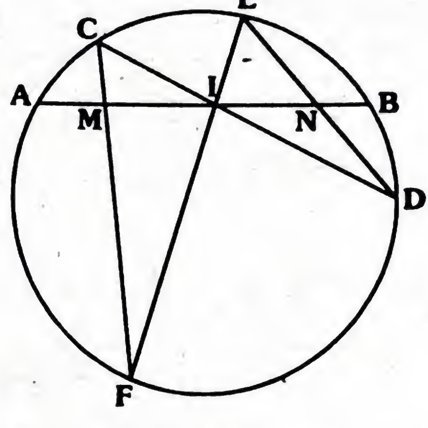


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA Nº 207

En el siguiente gráfico, se tiene que $AI = IB$, indique que proposiciones son correctos.



I. $(FI)(IC) = (DI)(IE)$

II. $(AN)(AM) = (BM)(BN)$

III. $(CM)(MF) = (EN)(ND)$

A) I, II y III B) I

C) I y II D) I y III

E) II y III

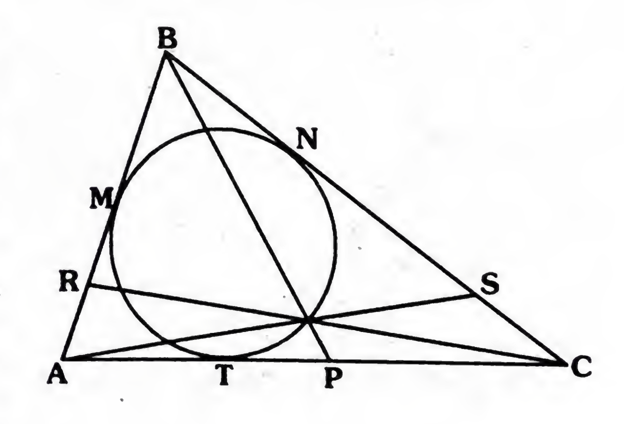
PROBLEMA Nº 208

En el gráfico:

$$m\measuredangle BAS = m\measuredangle BSA$$

$$m\measuredangle PBA = m\measuredangle APB$$

M, N y T son puntos de tangencia. Si $CS=BN=3$ y $AM=4$. Calcule RC

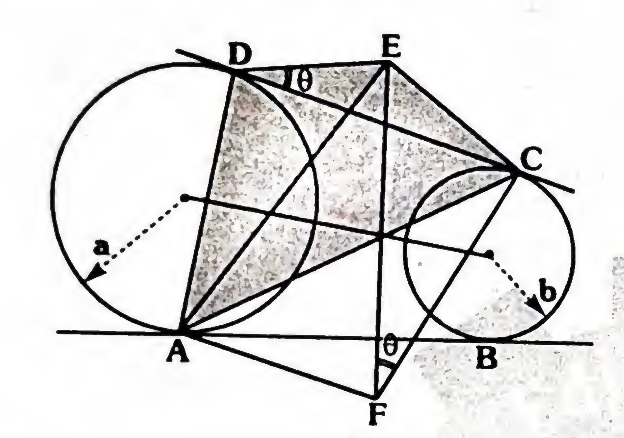


A) 5 B) 8 C) 10

D) 9 E) 12

PROBLEMA Nº 209

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si el cuadrilátero ADEC es inscriptible, calcule $\frac{(AE)(AF)}{(EC)(CF)}$



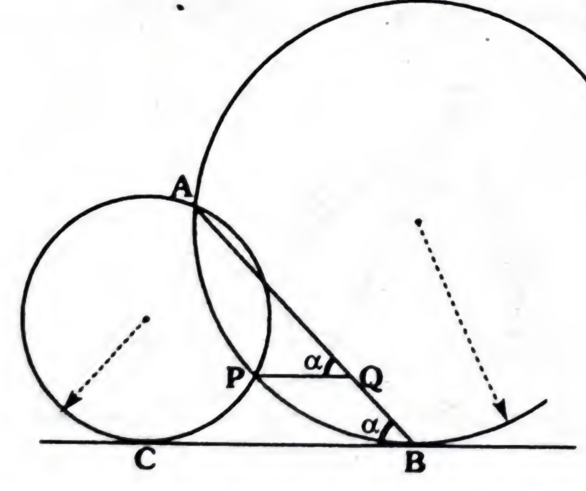
A) b/a B) a/b C) $\frac{a+b}{a}$

D) $\frac{a+b}{b}$ E) a^2/b^2

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia. Si $AQ = 4(QB)$ y $BC = 20$.

Calcule PQ

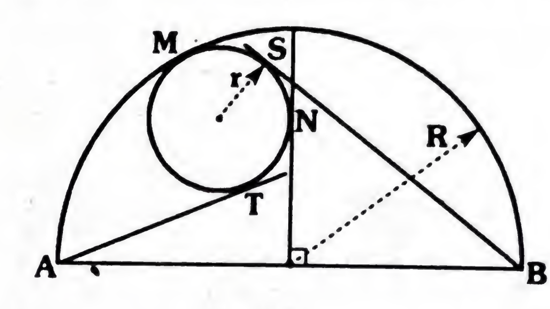


A) 6 B) 10 C) 8

D) 5 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 211

En la figura, M, N, S y T son puntos de tangencia. Si $Rr = 4$, calcule $(BS)^2 - (AT)^2$

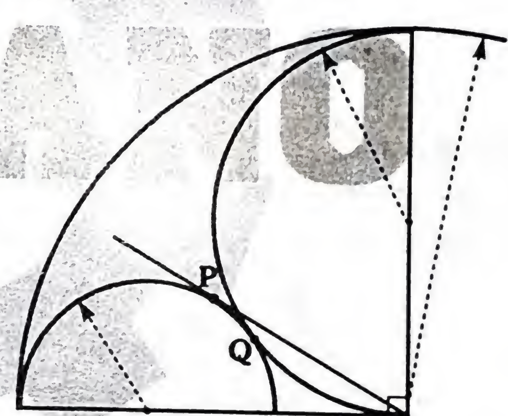


A) 4 B) 12 C) 8

D) 16 E) 2

PROBLEMA Nº 212

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, calcule $m\overset{\frown}{PQ}$



A) 23° B) 30° C) 37°

D) 8° E) 16°

PROBLEMA Nº 213

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{EF}$ se ubican P y T (P en $\overset{\frown}{ET}$), se trazan las tangentes en P y T las cuales se cortan en A, $\overline{ET} \cap \overline{FP} = \{B\}$ y $\overline{AB} \cap \overline{PT} = \{L\}$.

Si $AP = a$ y $LB = b$. Calcule (PL) (LT)

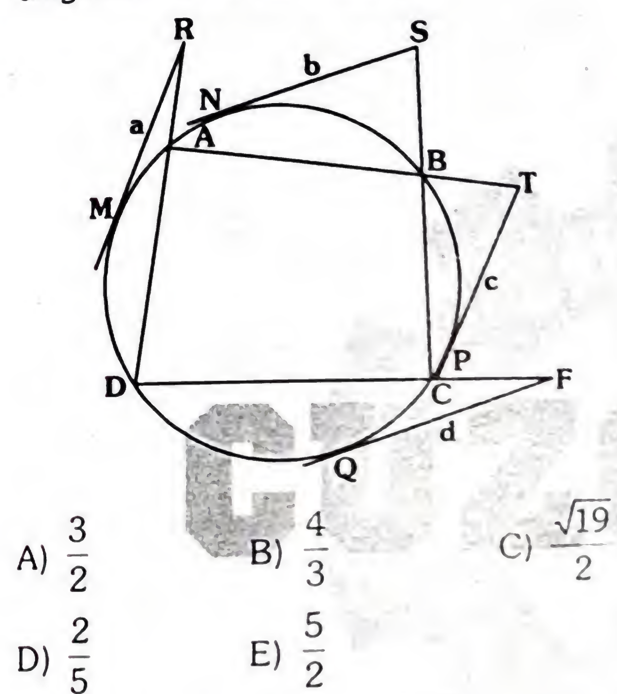
A) ab B) $b(2a-b)$ C) $(a+b)$

D) $a^2 - b^2$ E) $b(a+b)$

PROBLEMA Nº 214

En el gráfico, M, N, P y Q son puntos de tangencia, $AR = BC$, $AD = SB$, $BT = DC$, $CF = AB$.

Si $BD + AC = 9$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$. ¿Cuánto distan los puntos medios de las diagonales de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?



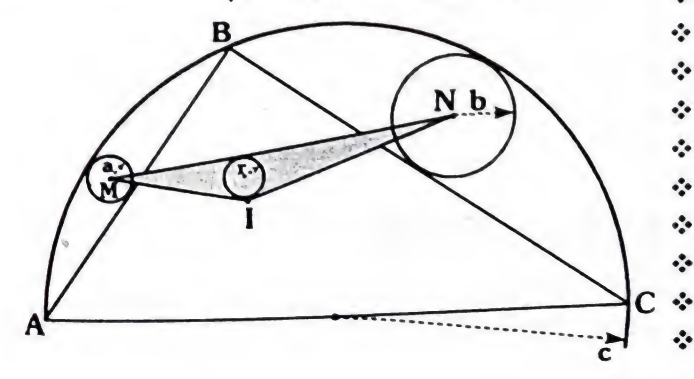
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, I es incentro del triángulo ABC, a y b son máximos y r es inradio del triángulo MNI.

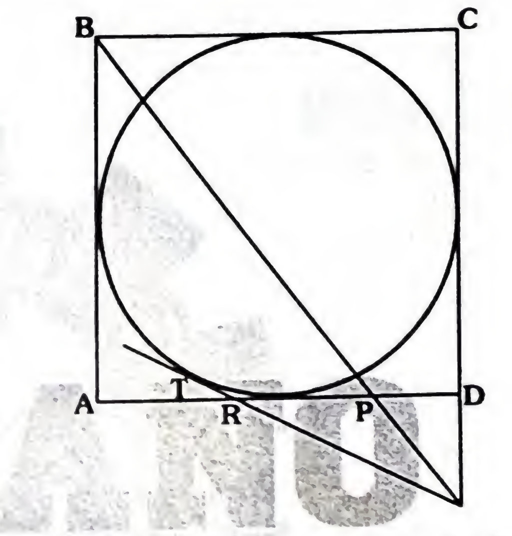
Demuestre: $\frac{2}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROBLEMA Nº 216

En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el cuadrado ABCD. T es punto de tangencia. Calcule $\frac{AR}{RP}$



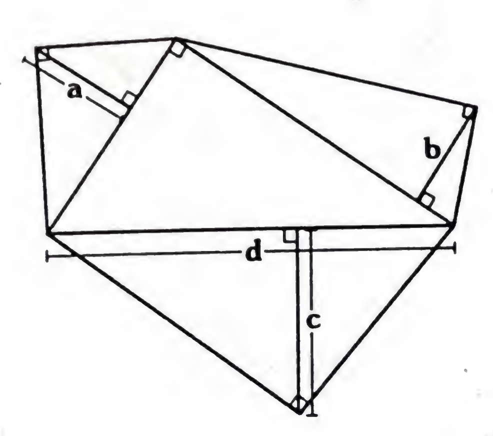
A) 0,5 B) 1 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 217

De acuerdo al gráfico, demuestre que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{d^2}{2}$$



PROBLEMA Nº 218

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AD y BF, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB) \quad y$$
$$2(BC) = 3(AB) = 36$$

Calcule FD.

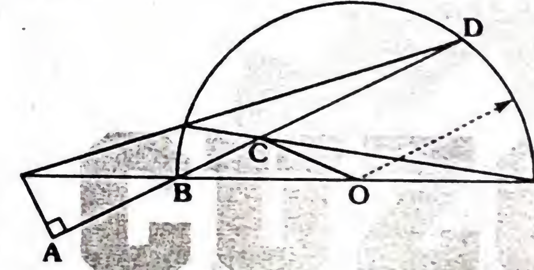
A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{46}$ C) $\sqrt{51}$

D) $\sqrt{47}$ E) $\sqrt{53}$

PROBLEMA Nº 219

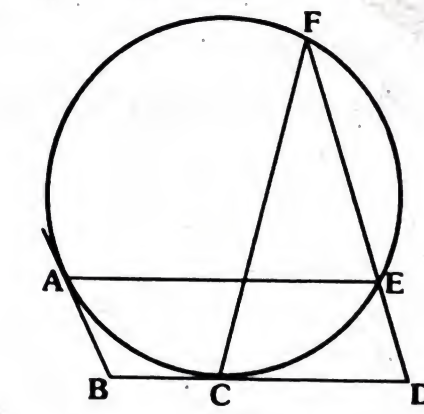
En el gráfico, $BC = OC = 4$ y $CD = 2$. Calcule AB

A) 1
B) 2
C) 3
D) 2,5
E) 1,5



PROBLEMA Nº 220

En el gráfico, ABDE es un paralelogramo, A y C son puntos de tangencia. Si $AB = a$ y $CD = b$. Calcule FC.



A) $b\sqrt{\frac{a+b}{a}}$ B) $a\sqrt{\frac{a+b}{a}}$ C) $b\sqrt{\frac{a+b}{b}}$

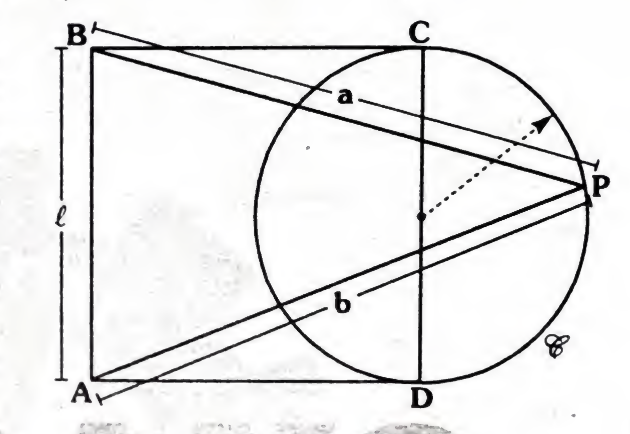
D) $b\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ E) $b\sqrt{\frac{a-b}{b}}$

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Demuestre que:

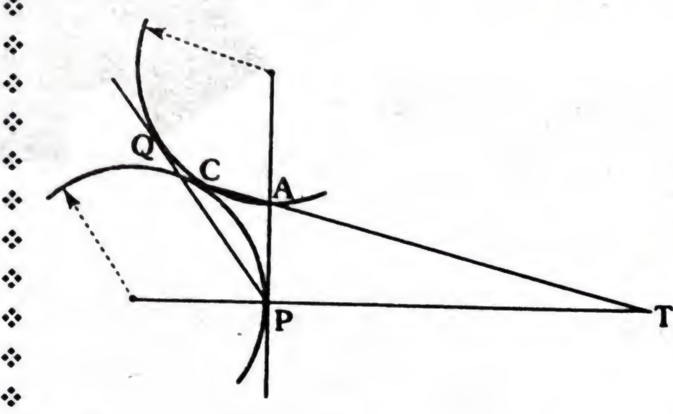
$$\frac{a^4 + b^4 + \ell^4}{a^2b^2 + b^2\ell^2 + a^2\ell^2} = \frac{6}{5}$$

(Propuesto por el estudiante Miguel Yepez Veli)



PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, P, Q y C son puntos de tangencia. Si $(PQ)^2 = 2(AT)$. Calcule la distancia de P a $\overleftrightarrow{AT}$.

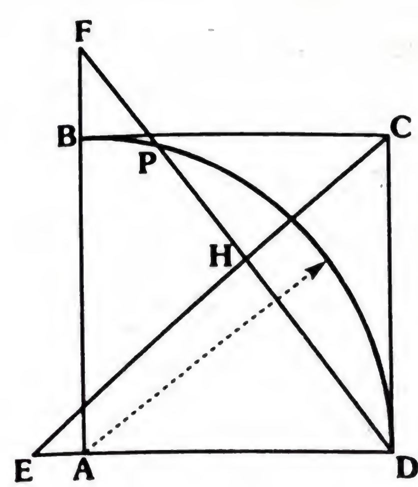


A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 223

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, $AF = ED$, $PD = 3(FP) = 6$. Calcule HD

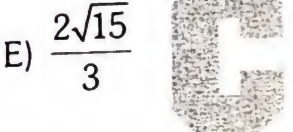


A) $\sqrt{15}$

B) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

C) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$



E) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

PROBLEMA Nº 224

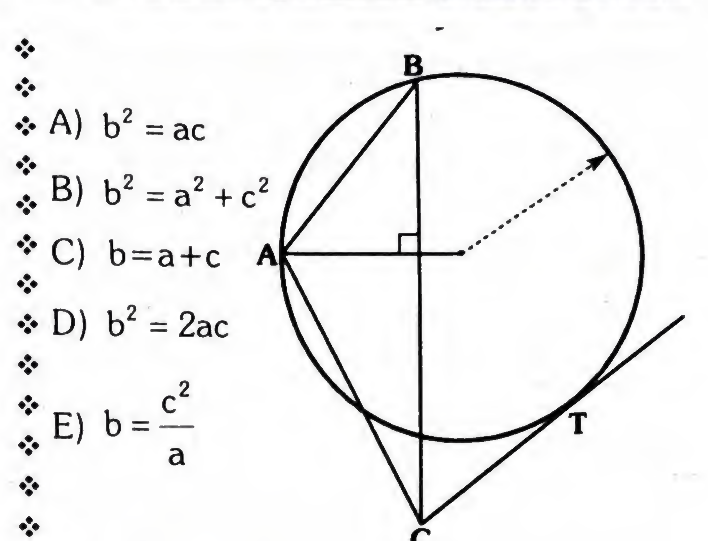
Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB, se traza $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ y con diámetro BC se traza una semicircunferencia, la cual corta a la primera en N. Si $AB=6$ y $BC=2\sqrt{7}$. Calcule la longitud de la proyección de $\overline{NB}$ sobre $\overline{AB}$.

A) $\dfrac{8}{21}$ B) $\dfrac{21}{8}$ C) $\dfrac{7}{8}$

D) $\dfrac{14}{9}$ E) $\dfrac{8}{7}$

PROBLEMA Nº 225

En el gráfico: T es punto de tangencia. Si AB=a, AC=b y CT=c, indique la relación correcta.



A) $b^2=ac$

B) $b^2=a^2+c^2$

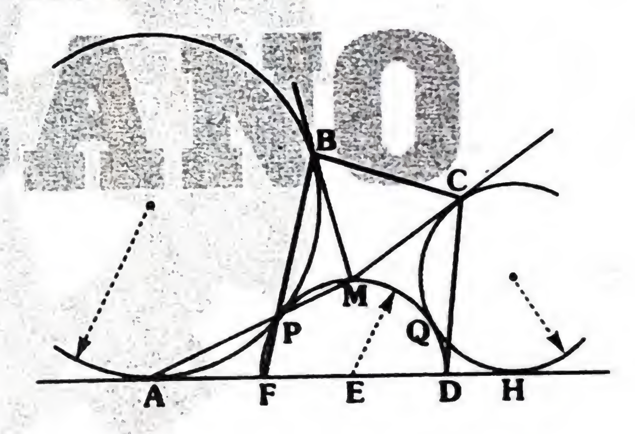
C) $b=a+c$

D) $b^2=2ac$

E) $b=\dfrac{c^2}{a}$

PROBLEMA Nº 226

En el gráfico, A, B, C, H, P y Q son puntos de tangencia. ¿Qué tipo de cuadrilátero es FBCD?



A) Trapecio B) Rectángulo

C) Circunscriptible D) Inscriptible

E) Exinscriptible

PROBLEMA Nº 227

Se tiene el triángulo equilátero ABC, con diámetro en $\overline{AC}$ se traza una semicircunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. La distancia de un punto de la semicircunferencia hacia $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son "a" y "b".

Calcule la distancia de dicho punto a $\overline{AC}$.

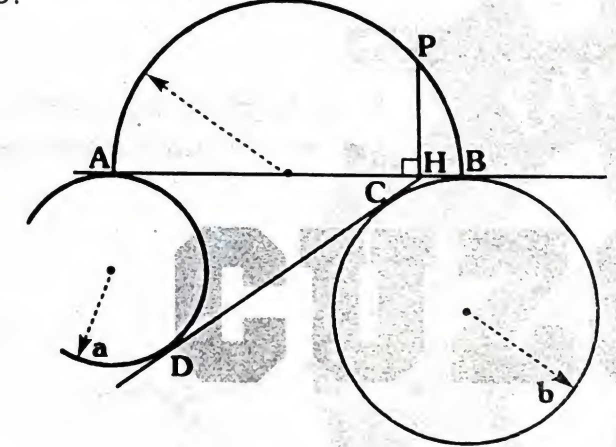
A) $\frac{4}{3}\left(a+b+\sqrt{ab}\right)$ B) $\frac{a+b}{3}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\frac{2}{3}\left(a+b-\sqrt{ab}\right)$

e) $\frac{2}{3}\left(a+b+\sqrt{ab}\right)$

PROBLEMA Nº 228

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule PH en función de a y b.



A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $3\sqrt{ab}$

D) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ E) $\frac{2}{3}\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 229

En una circunferencia se inscribe el triángulo ABC, las prolongaciones de las alturas trazadas de A y C interseca a dicha circunferencia en P y Q respectivamente, $\overline{PQ}$ interseca en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en F y M respectivamente.

Si: $m\measuredangle ABC=45°$ y $(PM)^2+(FQ)^2=8$.
Calcule MF.

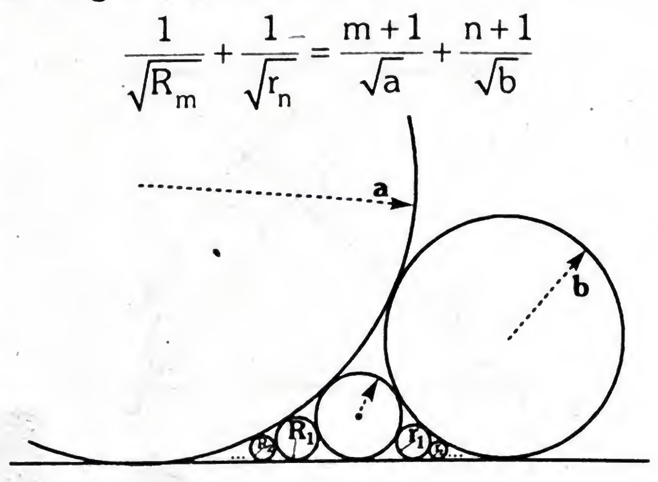
A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$

D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, demostrar:

$$\frac{1}{\sqrt{R_m}}+\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{m+1}{\sqrt{a}}+\frac{n+1}{\sqrt{b}}$$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PROBLEMA Nº 231

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, exteriormente se trazan los cuadrados ABMN y BCPQ. Si $\overline{AP}\cap\overline{NC}=\{S\}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{BS}$ y $\overline{AC}$.

A) 90° B) 120° C) 45°

D) 150° E) 127°

PROBLEMA Nº 232

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH, luego en la prolongación de $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a dicho lado se ubican los puntos Q y R respectivamente, tal que $m\measuredangle QCR=m\measuredangle HRQ$, $AH=CQ=a$ y $HC=b$. Si $m\measuredangle QHR$ es máximo, calcule BR.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{4ab+b^2}$

C) $\sqrt{4ab-a^2}$ D) $\sqrt{b^2+2ab-3a^2}$

E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 233

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en L, N y T respectivamente.

Si: $m\measuredangle BCA = 37°$ y $(TB)^2 - (LB)^2 = 12$

Calcule TN.

A) 3 B) 4

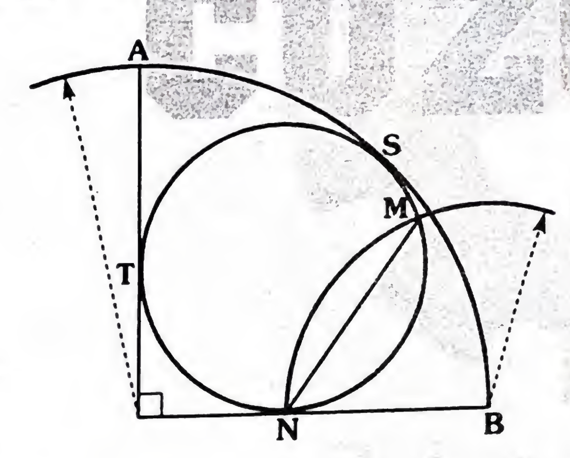
C) 6 D $2\sqrt{2}$

E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, T, N y S son puntos de tangencia.

Si $AT = 6$. Calcule MN.



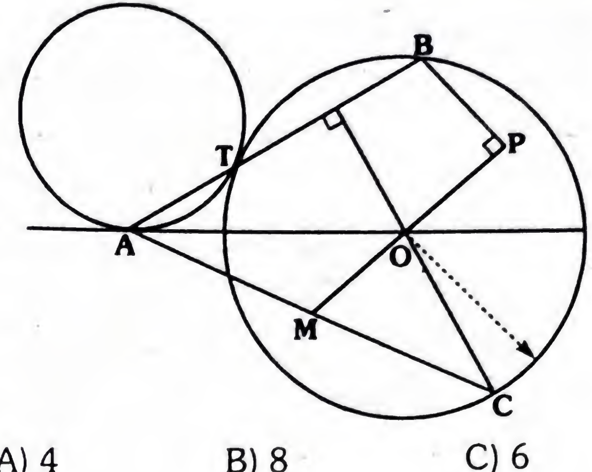
A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$

C) 6 D) $2\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, A y T son puntos de tangencia, M es punto medio de $\overline{AC}$ y $(PM)^2 - (OP)^2 = 8$, calcule AC.



A) 4 B) 8 C) 6

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 236

Se tienen dos circunferencias ortogonales de centros O_1 y O_2 cuyos radios son R y "r" respectivamente (R>r). La recta que contiene a los centros y una tangente común AB se intersecan en P, siendo A y B puntos de tangencia con la mayor y menor circunferencia respectivamente.

Calcule PB.

A) $\frac{3\sqrt{Rr^3}}{R-r}$ B) $\frac{\sqrt{2Rr^3}}{R-r}$ C) $\frac{\sqrt{Rr^3}}{R-r}$

D) $\frac{\sqrt{2rR^2}}{R-r}$ E) $\frac{\sqrt{2Rr^3}}{R+r}$

PROBLEMA Nº 237

Se tiene el triángulo ABC, AB=c, BC=a y AC=b. H es ortocentro y

$$c\sqrt{2} - b = \frac{(c-a)(c+a)}{b}.$$

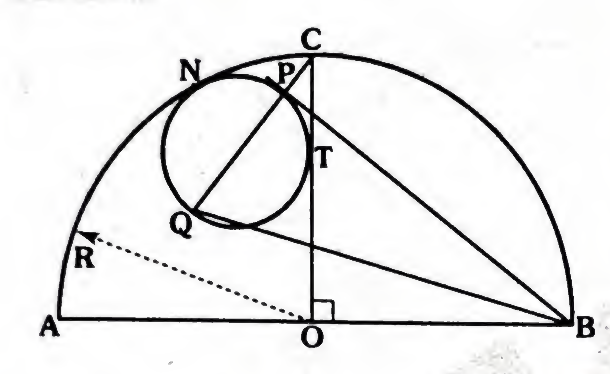
Calcule AH.

A) a B) a + b C) b

D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 238

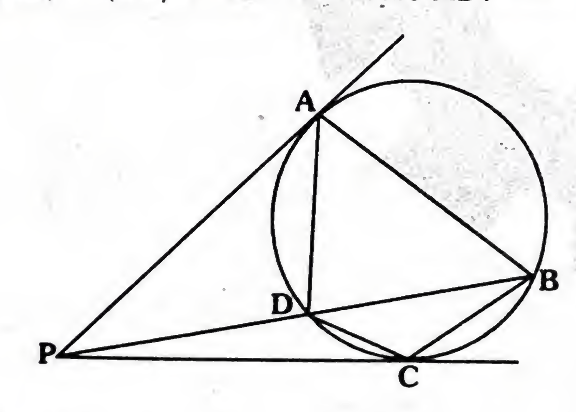
En el gráfico, N, P y T son puntos de tangencia. Si $CT=4$ y $(QB)^2+(QC)^2=112$. Calcule R.



A) $4\sqrt{3}$ B) 8 C) 12
D) $6\sqrt{2}$ E) 14

PROBLEMA Nº 239

En el gráfico, A y C son puntos de tangencia. Si $PD=DB$, $CD=\sqrt{5}$ y $(AB)^2-(BC)^2=32$. Calcule AD.

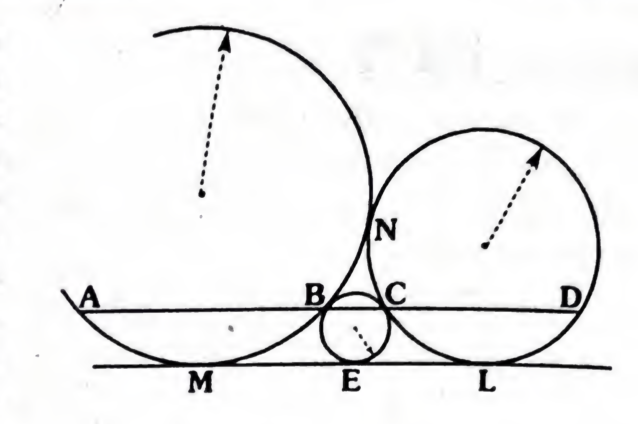


A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{10}$
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{21}$

PROBLEMA Nº 240

En el gráfico, M, N, L, B, C y E son puntos de tangencia.

Demuestre: $\dfrac{1}{\sqrt{BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{AB}}+\dfrac{1}{\sqrt{CD}}$



PROBLEMA Nº 241

Se tiene el paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{BC}$. Si $BC=2$, calcule $(AC)^2+(BD)^2-(AM)^2-(MD)^2$.

A) 4 B) 5 C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) 6

PROBLEMA Nº 242

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B. Exteriormente se trazan los triángulos equiláteros ADB y BEC. Si $AC=12\sqrt{5}$, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$.

A) 150 B) 152 C) 136
D) 180 E) 144

PROBLEMA Nº 243

En el triángulo ABC se tiene $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$, $m\measuredangle ABC=54°$ y $a^2-c^2=bc$. Calcule $m\measuredangle BCA$

A) 54° B) 27° C) 36°
D) 42° E) 48°

PROBLEMA Nº 244

En el triángulo ABC, inscrito en una circunferencia $(AB<BC)$, por B se traza una

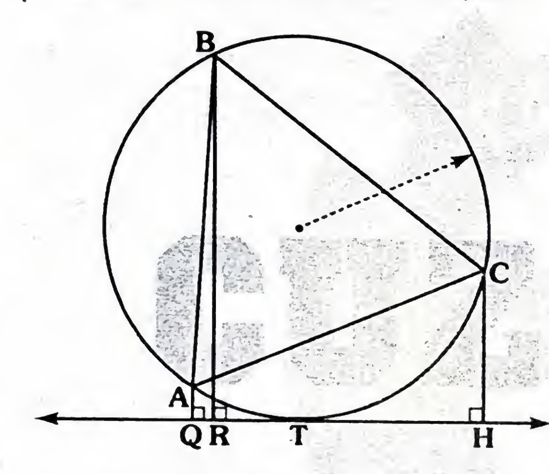
tangente a dicha circunferencia que interseca a la prolongación de $\overline{CA}$ en el punto de. Si AB=c, BC=a, AC=b y $abc = 4(a^2 - c^2)$. Calcule NB.

A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 2
D) 8 E) 4

PROBLEMA Nº 245

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si AB=c, BC=a y AC=b.

Demuestre: $a\sqrt{AQ} + c\sqrt{HC} = b\sqrt{BR}$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

PROBLEMA Nº 246

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, si los ángulos BAD y BCD son agudos y

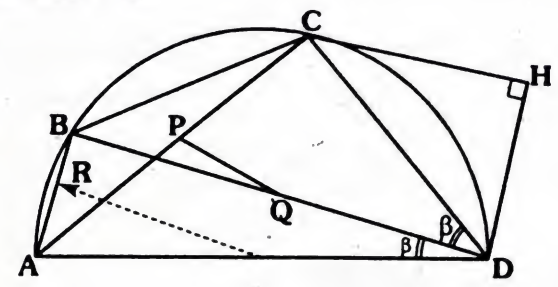
$$[(AB)(CD)]^2 + [(AD(BC)]^2 = [(AC)(BD)]^2$$

Calcule $m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle BCD$

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 127° E) 143°

PROBLEMA Nº 247

Según el gráfico, $AP = PC$, $BQ = QD$, $AB = a$ y $(AB)^2 + (DH)^2 + (CH)^2 = 2R^2$. Calcule PQ.



A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $\frac{a}{2}$
D) $\frac{a}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

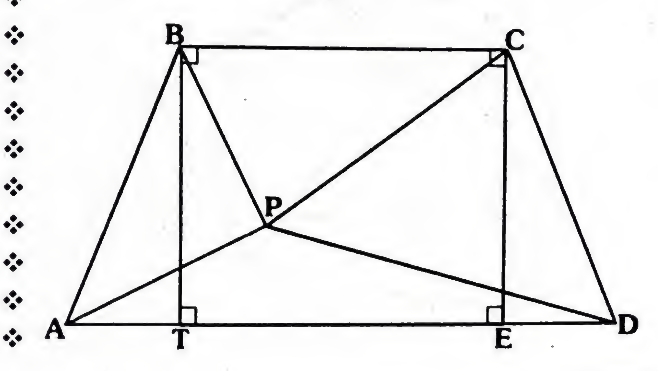
PROBLEMA Nº 248

En el cuadrilátero ABCD, se tiene que $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ACD = 90°$. Luego se traza $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{AD}$ (E y F en $\overline{AD}$). Si $(AE+FD)(AD) = 6$ y $(AD)^2 - (BC)^2 = 4$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{2}$ E) 2

PROBLEMA Nº 249

En la figura mostrada, ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{BC} // \overline{AD}$), $AD = 3(BC)$, AP=a, PD=b, PB=c y PC=d. Indique la relación entre a, b, c y d.



A) $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$

B) $a^2 - b^2 = 3(c^2 - d^2)$

C) $2a^2 - b^2 = 2(c^2 - d^2)$

D) $3a^2 - b^2 = 3c^2 - d^2$

E) $3a^2 - b^2 = 3c^2 - 2d^2$

PROBLEMA Nº 250

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD, tal que: $m\sphericalangle BCA = 30^\circ$, $m\sphericalangle ACD = 75^\circ$, $m\sphericalangle DAC = 45^\circ$ y $CD = \sqrt{2}$.

Calcule: $\dfrac{(AB)(BC)+(CD)(AD)}{(BC)(CD)+(AB)(AD)}$

A) $\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{6}$

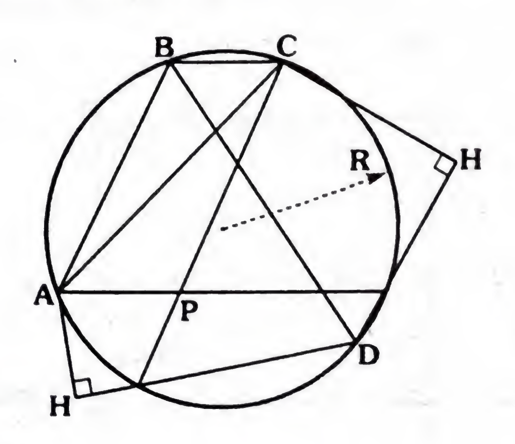
C) $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}}{3}$ D) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{3}$

E) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{3}$

PROBLEMA Nº 251

En el gráfico mostrado, ABCP es un paralelogramo y $R(AH + CM) = 8$.

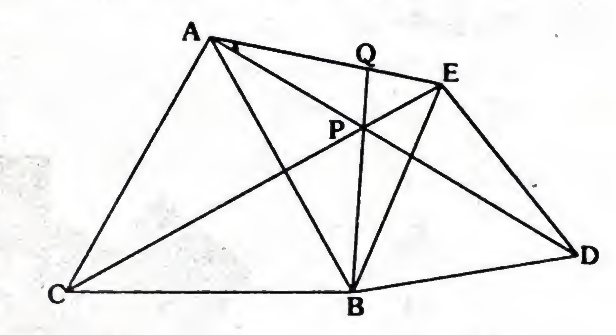
Calcule (BD)(AC).



A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 6

PROBLEMA Nº 252

En el gráfico, los triángulos ABC y BED son equilátero. Si $AP = a$ y $PE = b$. ¿Cuánto dista Q de $\overleftrightarrow{AD}$?



A) $\dfrac{ab}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a-b}$ C) $\dfrac{2ab}{a+b}$

D) $\dfrac{2ab}{a-b}$ E) $\dfrac{ab}{2(a+b)}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 253

Se tiene el triángulo AED, se traza la altura $\overline{AB}$ (B en $\overline{ED}$). C es exterior y relativo a $\overline{ED}$ tal que $AC = AD$; $m\sphericalangle BCD = 90^\circ$, y $BA = 4$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 1 B) 2 C) 4
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 254

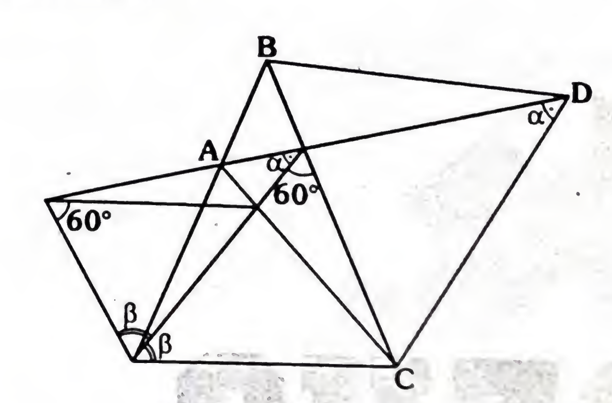
Se tiene el cuadrado ABCD, P y Q está en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ tal que $m\sphericalangle PQB = 90^\circ$, la prolongación de $\overline{PQ}$ corta a $\overline{BC}$ en R. Si $RQ = 3(PQ) = 3$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BQ}$ y $\overline{RD}$.

A) $\frac{\sqrt{193}}{10}$ B) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$ C) $\frac{3\sqrt{11}}{5}$

D) $\frac{3\sqrt{17}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{641}}{10}$

PROBLEMA Nº 255

En el gráfico, $BC = CD$; $AB = 1$ y $AC = 3$. Calcule BD.



A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{13}$

D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº 256

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, se traza el radio OT tal que $\overline{OT} \perp \overline{AB}$, con diámetro OT se traza una circunferencia de centro M, en ella se ubica Q, P en $\overset{\frown}{AT}$ y N es punto medio de $\overline{PQ}$.

Si $(OP)^2 - (PQ)^2 + (PT)^2 = 16$, halle MN.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 257

Se tiene el cuadrilátero inscriptible ABCD, las diagonales se cortan en O, calcule: $\frac{(AB)(BC)(OD)}{(AD)(DC)(OB)}$

A) 1 B) 0,5 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 258

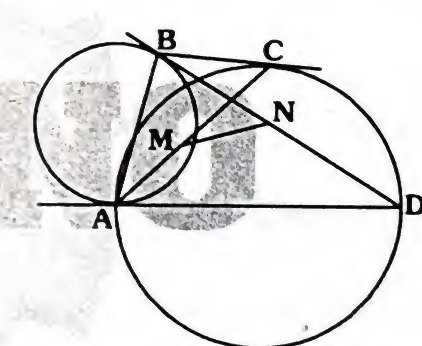
En el triángulo ABC de incentro I se cumple que $m\measuredangle ABC = 60°$ y $AB + BC = 12$ O es circuncentro del triángulo AIC, calcule OB.

A) 8 B) 4 C) $4\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia, $\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{CD}$, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si $(AB)^2 + (BC)^2 = 4$, calcule MN.



A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

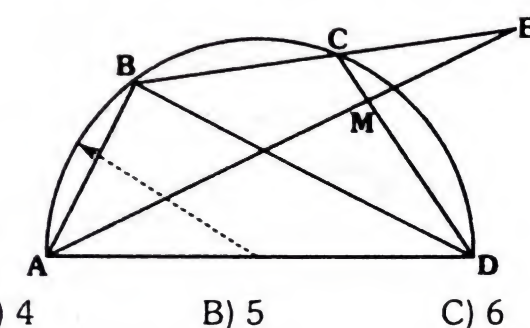
C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D) 1

E) 2

PROBLEMA Nº 260

En el gráfico, E es excentro del triángulo ABD, el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es 3u y $(AE)(AM) = 32$. Calcule $(AB)^2 + (BC)^2 - (BD)^2$

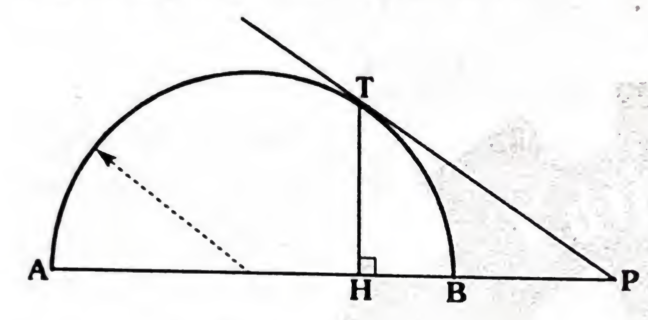


A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 261

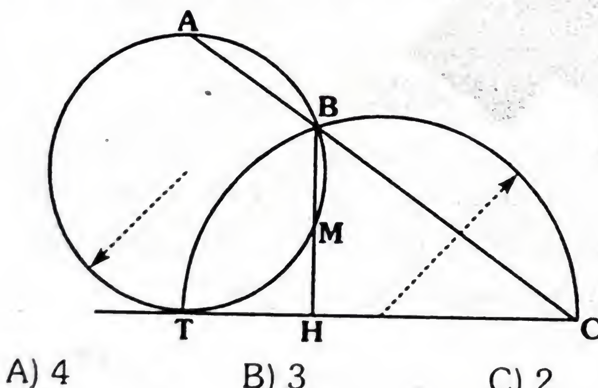
En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $PH = 4a$ y $AH = 6a$. Calcule PT.



A) $5a$ B) $a\sqrt{15}$ C) $2a\sqrt{5}$
D) $4a$ E) $6a$

PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, T es punto de tangencia, si $BC = 4(AB)$ y $HM = 1$. Halle MB.



A) 4 B) 3 C) 2
D) 2,5 E) 3,5

PROBLEMA Nº 263

En un rombo MNPQ, se ubica el punto medio R de $\overline{NP}$ tal que:

$$(MR)^2 + (RQ)^2 = 2250\,cm^2$$

Halle NR.

A) 15 B) 13 C) 25
D) 17 E) 10

PROBLEMA Nº 264

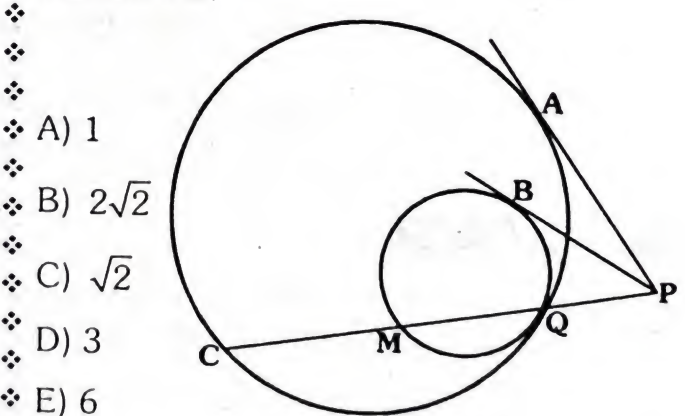
En el triángulo ABC, recto en C, donde m_a, m_b son las longitudes de las medianas relativas a los catetos y m_c es la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.

Halle: $\dfrac{(m_a)^2 + (m_b)^2}{(m_c)^2}$

A) $\dfrac{9}{16}$ B) 5 C) $\dfrac{1}{9}$
D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{5}{9}$

PROBLEMA Nº 265

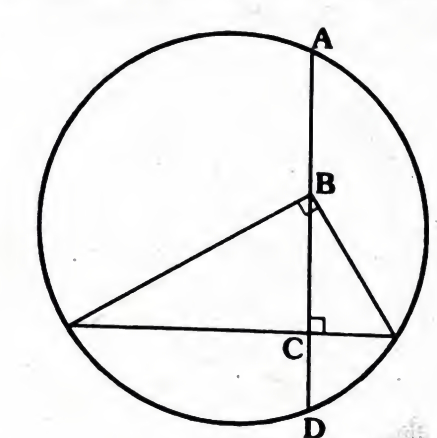
En el gráfico, A, B y Q son puntos de tangencia. Si $PM = MC$ y $PA = 3\sqrt{2}$.
Calcule PB.



A) 1
B) $2\sqrt{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) 3
E) 6

PROBLEMA Nº 266

Calcule CD, dado que $AB = a$ y $BC = b$.



A) $\frac{b^2}{a}$ B) $\frac{b^2}{a+b}$ C) $\frac{a^2}{a+b}$

D) $\frac{a^2}{b}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 267

Se tiene dos circunferencias secantes, se traza una recta secante que corta a dichas circunferencia y a la cuerda común en los puntos consecutivos A, B, C, D y F (C en la cuerda común). Si $AB = 20$, $CD = 3$ y $DF = 15$. Calcule AC.

A) 18 B) 20 C) 24

D) 25 E) 30

PROBLEMA Nº 268

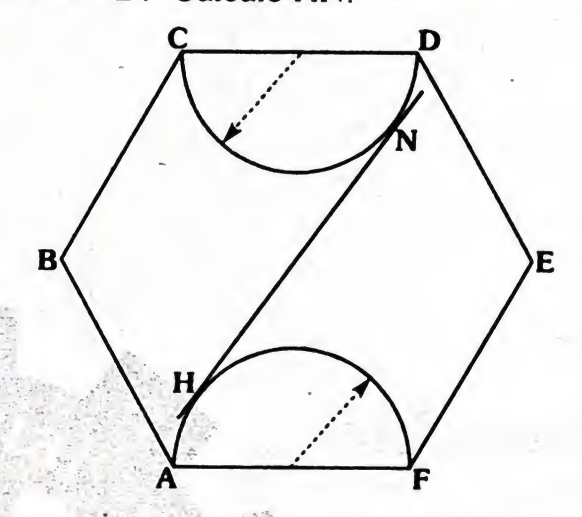
En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo rectángulo ABC recto en B (AB=BC) se ubica P, si las distancias de A C hacia $\overrightarrow{BP}$ son 8 y 15 respectivamente. Calcule la longitud de la proyección de la altura BH del triángulo ABC sobre $\overrightarrow{BP}$.

A) 2 B) 3 C) 3,5

D) 4,5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 269

En el gráfico, ABCDEF es un hexágono regular, H y N son puntos de tangencial. Si $AB = 2$. Calcule HN.

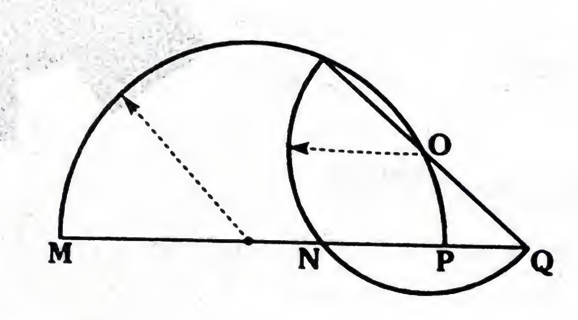


A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) 2

PROBLEMA Nº 270

En el gráfico, NP=6 y PQ=4.
Calcule MN.

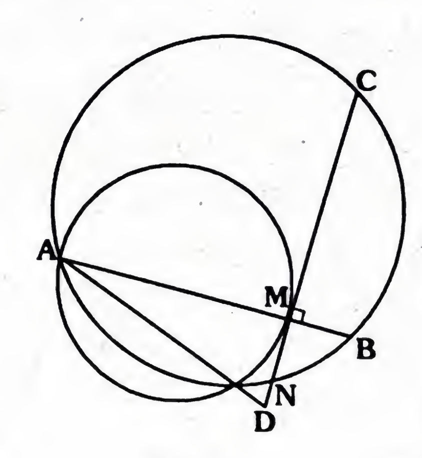


A) 12 B) 8 C) 4

D) 6 E) 10

PROBLEMA Nº 271

En el gráfico, M es punto de tangencia, $CM = 2(MD)$ y $(AM)(MB) = 12$.
Calcule ND.



A) 3 B) 1 C) 2

D) 4 E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 272

En uun rectángulo ABCD de centro O, en las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente: si $DQ = 8$, $BC = 10$, $OP = OQ$ y $m\measuredangle OPQ = 90°$. Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{CP}$ sobre $\overline{OP}$.

A) $\sqrt{13}$ B) $\dfrac{\sqrt{73}}{73}$ C) $\dfrac{42\sqrt{73}}{73}$

D) $2\sqrt{73}$ E) $\dfrac{39\sqrt{73}}{73}$

PROBLEMA Nº 273

En un cuadrante AOB; en $\overline{OB}$ y en $\overset{\frown}{AB}$ se ubican los puntos D y R respectivamente tal que la mediatriz de $\overline{DR}$ contiene a A; si $AR = 4$, $DR = 2$. Calcule la distancia de O al punto medio de $\overline{DR}$.

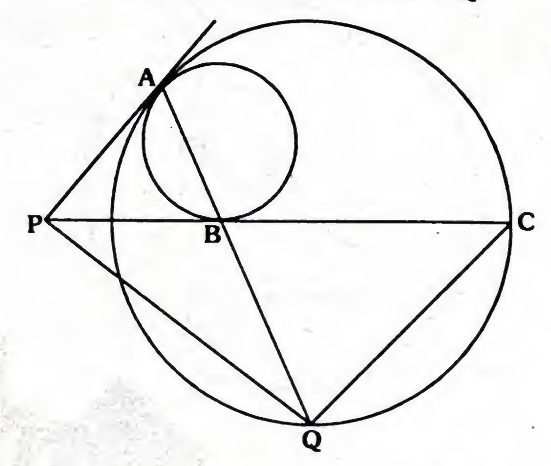
A) $5\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$

C) $3\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$

E) 7

PROBLEMA Nº 274

Del gráfico A y B son puntos de tangencia; $PA = a$; $QC = b$. Calcule PQ.



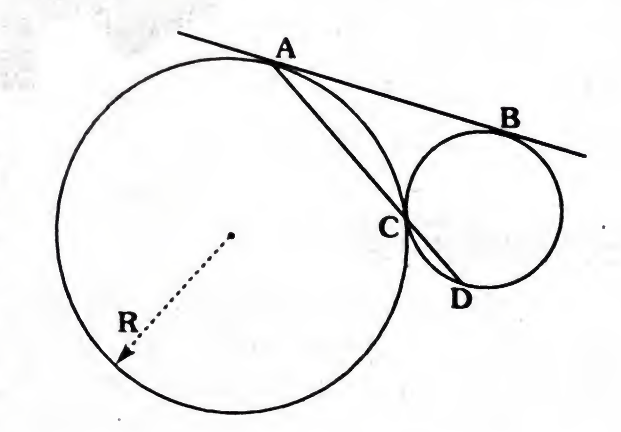
A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2 - b^2}$

C) $\dfrac{ab}{a+b}$ D) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Si $AC = 2$ y $CD = 1$. Calcule R

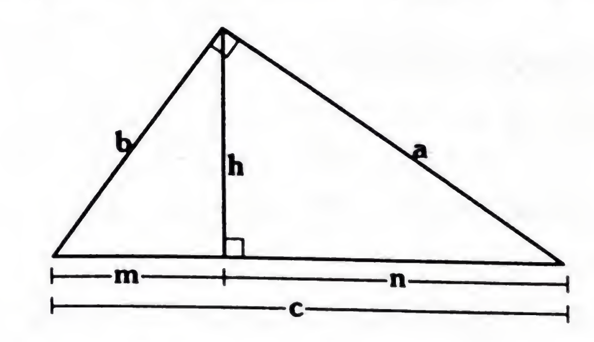


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

PROBLEMA Nº 276

Del gráfico, que relación es incorrecta:



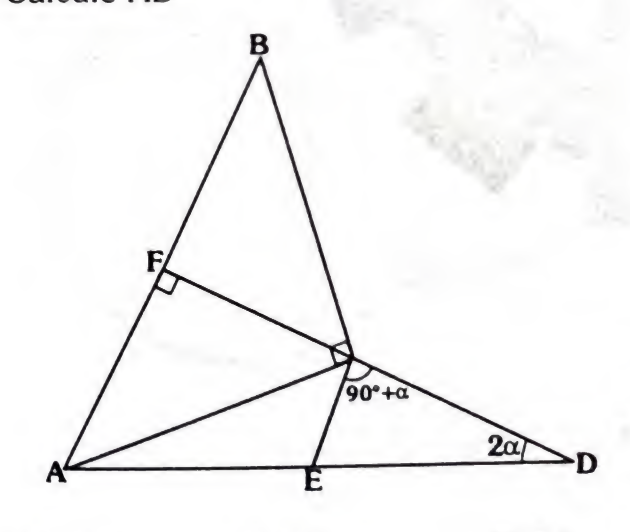
A) $\dfrac{c}{h}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ B) $a^2m=b^2n$

C) $\dfrac{c}{h^2}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ D) $abh=cmn$

E) $\dfrac{am}{b}-\dfrac{bn}{a}=1$

PROBLEMA Nº 277

En el gráfico, $AF=4$, $FB=9$ y $AE=ED$. Calcule AD



A) 13 B) 16 C) 14
D) 12 E) 10

PROBLEMA Nº 278

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El teorema de Pitágoras es recíproco.

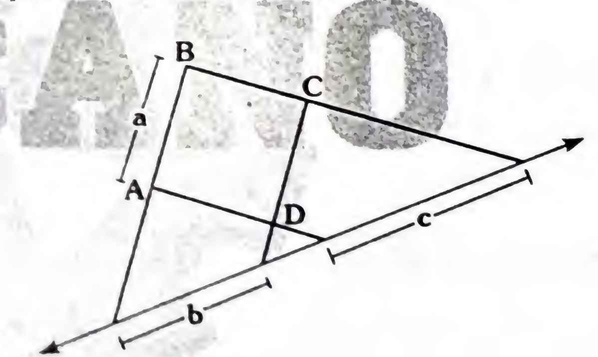
II. Se tiene un cuadrilátero convexo y para un punto interior se cumple el teorema de Marlen, entonces dicho cuadrilátero es rectángulo.

III. Se tiene el triángulo equilátero ABC y P es exterior y relativo a BC, si $PA=PB+PC$, entonces el cuadrilátero ABPC es inscriptible.

A) VFV B) VVV C) FVF
D) VVF E) FFF

PROBLEMA Nº 279

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, indique la relación entre a, b y c.



A) $b^2+c^2=a^2$ B) $\sqrt{bc}=a$

C) $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{a^2}$ D) $a=\dfrac{b+c}{2}$

E) $a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}$

PROBLEMA Nº 280

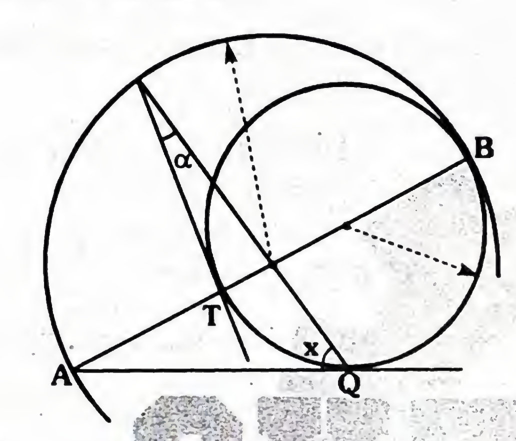
Se tiene el rectángulo ABCD, se ubica H en $\overline{AD}$, Q en $\overline{BH}$ y E en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que $\overline{AQ}\perp\overline{BH}$; $\overline{QE}\perp\overline{BC}$ y $m\measuredangle BEC=90°$. Si BE=BA y

$\sqrt{3}(BC) = 2(BH)$. Calcule $m\sphericalangle BCH$.

A) 45° B) 60° C) 30°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA Nº 281

En el gráfico, B, T y Q son puntos de tangencia. Calcule x.



A) $30°+\alpha$ B) $30°-\alpha$ C) $45°-\alpha$
D) $45°-\frac{\alpha}{2}$ E) $45°+\frac{\alpha}{2}$

PROBLEMA Nº 282

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica E en $\overline{AB}$, tal que:

$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ECD = 90°$$

Si $EC = 2$, $CD = 12$ y $AD = 7$. Calcule EB.

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{24}{7}$ C) $\frac{10}{13}$
D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{7}{9}$

PROBLEMA Nº 283

En el trapezoide ABCD, se cumple $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DBC$; $AB = 3$; $BC = 6$ y $(BD)^2 + (CD)^2 = 116$. Calcule AD.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 284

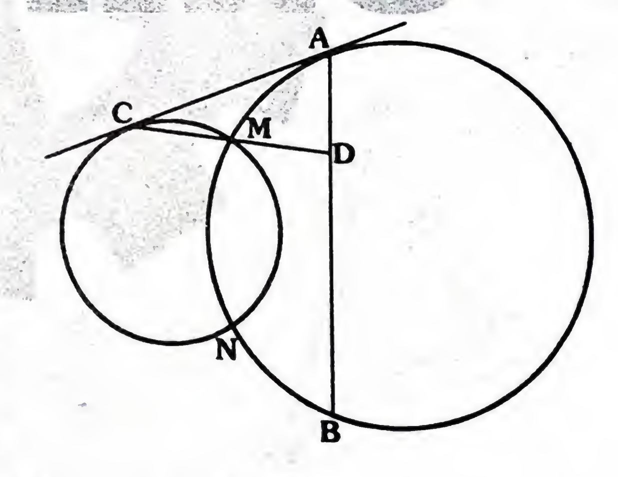
Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si $AC = 10$; $BD = 6$ y $MN = 7$.

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA Nº 285

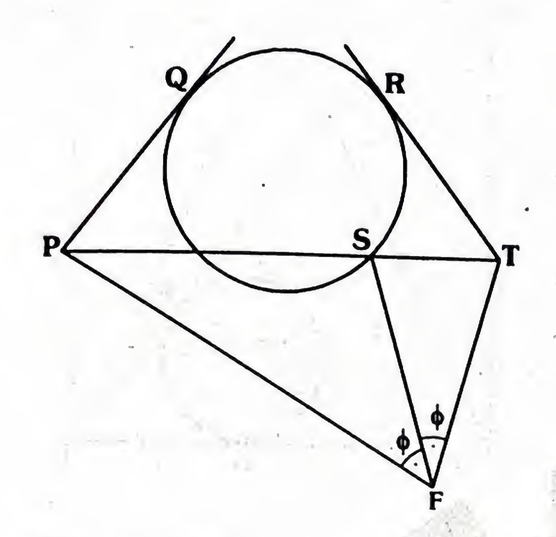
En el gráfico, A y C son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{NB}$ y $CM = 1$. Calcule MD.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 1,5 E) 1,8

PROBLEMA Nº 286

En el gráfico, R y Q son puntos de tangencia. Si $PQ = a$, $RT = b$ y $PF = 2(TF)$. Calcule TP.



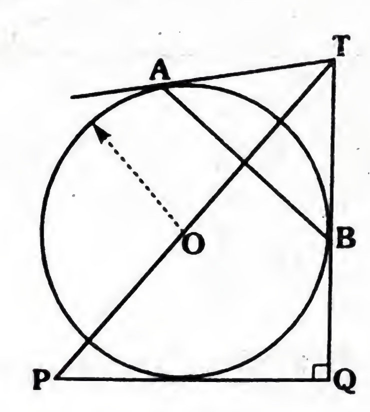
A) $\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+2b^2)}$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2)}$ D) $\sqrt{ab}$

E) $\frac{3}{2}\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia y $\frac{(AB)(OT)}{BQ}=6$, calcule AT.



A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) 1 E) 6

PROBLEMA Nº 288

A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, tal que $\overline{BC}//\overline{OA}$ y $BC=2\sqrt{5}$, P está en $\overline{OA}$.

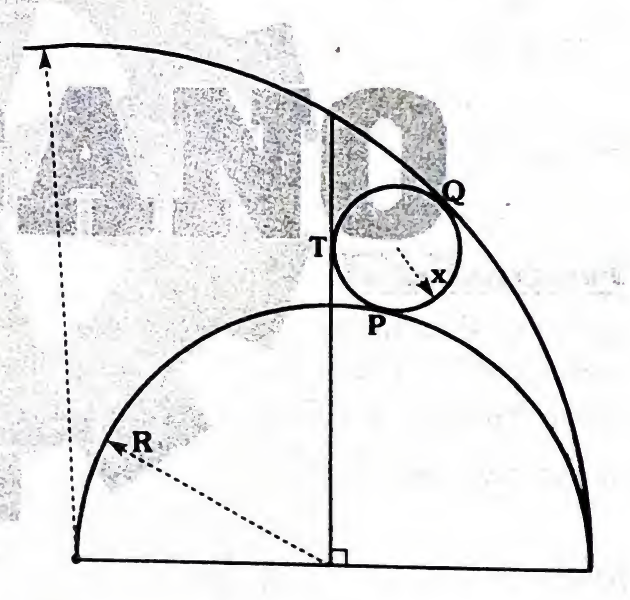
Si $m\sphericalangle BPC=90°$ y $AP=2$, calcule OP.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 289

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Halle x en función de R.

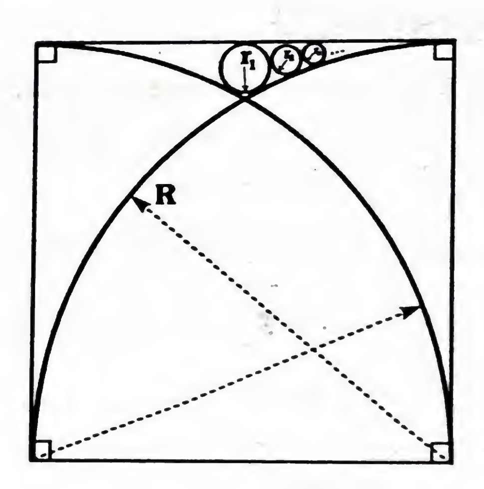


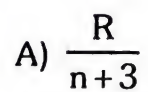
A) $\frac{R}{2}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{4}$

D) $\frac{R}{8}$ E) $\frac{R}{16}$

PROBLEMA Nº 290

Del gráfico, calcule r_n en función de R.





A) $\dfrac{R}{n+3}$ B) $\dfrac{R}{n^2+3}$

C) $\dfrac{R}{(n+3)^2}$ D) $\dfrac{R}{(n+6)^2}$

E) $\dfrac{R}{(n+9)^2}$

PROBLEMA Nº 291

Se tiene el triángulo rectángulo ABC de baricentro G, la semicircunferencia de diámetro AB corta a $\overline{AC}$ en T y pasa por G. Si $AB = a$, calcule TC.

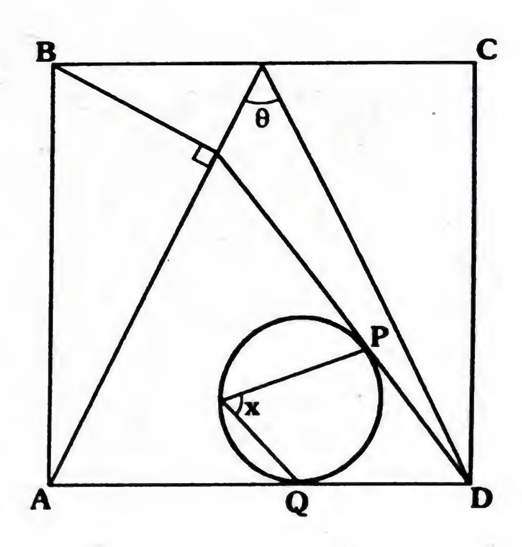
A) 2a B) $\dfrac{2}{3}a$

C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$ D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$

E) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, ABCD es un cuadrado Q y P son puntos de tangencia. Calcule x



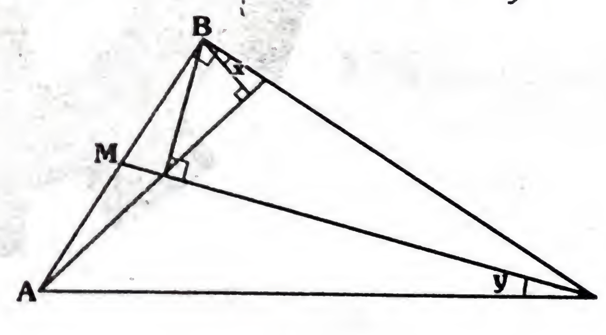
A) θ B) θ/2

C) 90°−θ D) 90°−θ/2

E) 45°−θ/2

PROBLEMA Nº 293

En el gráfico, AM = MB. Calcule $\dfrac{x}{y}$



A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2

D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA Nº 294 (Ex. admisión uni 2004-I)

El cuadrilátero PQRS está inscrito en una circunferencia, siendo el lado PS su diámetro. Sea T el punto de intersección de las prolongaciones de los lados

PQ y RS; si $PQ = 7$; $RS = 4$ y $TR = 6$. Halle QR

A) $\sqrt{29}$ B) $\sqrt{35}$ C) $\sqrt{31}$
D) $\sqrt{33}$ E) $\sqrt{37}$

PROBLEMA Nº 295 (Ex. admisión uni2002-I)

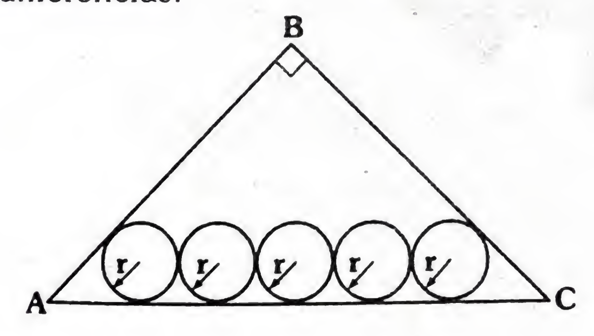
En el triángulo rectángulo se inscribe una circunferencia cuyo radio mide r y es 1/6 de la longitud de la hipotenusa.

Calcule la longitud del segmento que une el incentro y baricentro

A) $\frac{2}{3}r$ B) $\frac{\sqrt{6}}{3}r$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$
D) $\frac{\sqrt{5}}{8}r$ E) $\frac{3}{5}r$

PROBLEMA Nº 296 (Ex. admisión uni 1999-I)

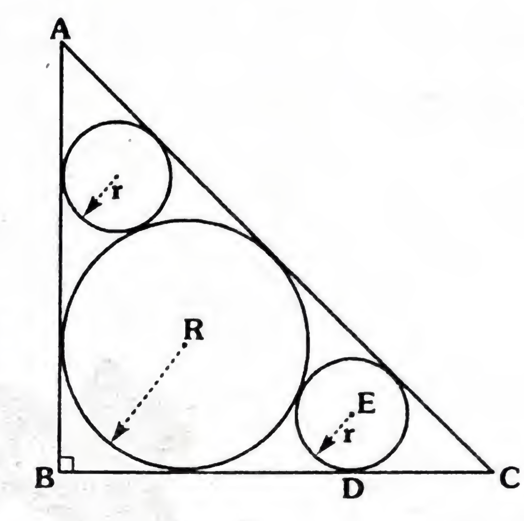
En la figura se cumple que $AB = 9u$ y $AC = 15u$. Las circunferencias son iguales y tangentes de radio igual a r unidades. Halle la suma de longitudes de las circunferencias.



A) $\frac{125\pi}{13}u$ B) $\frac{175\pi}{13}u$
C) $\frac{130\pi}{13}u$ D) $\frac{110\pi}{13}u$
E) $\frac{150\pi}{13}u$

PROBLEMA Nº 297 (Ex. admisión uni2003-II)

En el gráfico, $\sqrt{R} + \sqrt{r} = 10$, entonces $BD + DE$ es:



A) 95 B) 96 C) 97
D) 98 E) 100

PROBLEMA Nº 298 (Ex. admisión uni 1999-II)

En la semicircunferencia de diámetro AB se trazan las tangentes AD y BC de modo que $\overline{DC}$ sea tangente a la semicircunferencia en M. Si $AD = 10$ y $CB = 6$, calcule el radio de la semicircunferencia.

A) $2\sqrt{15}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{15}$
D) $\sqrt{15}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 299 (Ex. admisión uni 1995-I)

Sea ABC un triángulo isósceles cuyo lado no congruente AC mide 4u. Sobre el lado AB se construye otro triángulo isósceles ABD cuyo lado no congruente AD mide 2u. Si el ángulo DBC es recto, hallar la longitud del lado congruente del triángulo isósceles ABC.

A) $\sqrt{10+4\sqrt{2}}$

B) $\sqrt{11+4\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{10+5\sqrt{2}}$

D) $\sqrt{11+5\sqrt{2}}$

E) $\sqrt{11+5\sqrt{2}}$

PROBLEMA Nº 300

Se tiene el triángulo ABC de incentro I. Si $AB=2(BC)=6$ y $(AI)^2+(BI)^2=28$. Calcule IC.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{10}$

❖❖❖❖❖

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. C	10. C	19. C	28. A	37. E	46. E	55. A
2. B	11. D	20. A	29. A	38. D	47. C	56. D
3. C	12. D	21. B	30. D	39. B	48. B	57. B
4. D	13. B	22. C	31. B	40. C	49. B	58. C
5. B	14. C	23. D	32. C	41. C	50. A	59. E
6. A	15. B	24. B	33. E	42. E	51. A	60. C
7. C	16. A	25. A	34. C	43. C	52. D	
8. B	17. B	26. E	35. C	44. E	53. B	
9. E	18. C	27. C	36. D	45. D	54. D	

CEPRE-UNI

61. A	71. D	81. B	91. E	101. B	111. E	121. C	131. C
62. B	72. D	82. D	92. B	102. C	112. E	122. D	132. E
63. A	73. D	83. E	93. D	103. D	113. B	123. A	133. C
64. E	74. *	84. D	94. D	104. C	114. B	124. D	134. A
65. C	75 D	85. D	95. C	105. A	115. E	125. A	135. B
66. D	76. D	86. B	96. D	106. E	116. D	126. D	136. D
67. A	77. E	87. B	97. D	107. A	117. C	127. C	137. A
68. D	78. C	88. B	98. C	108. A	118. B	128. D	138. D
69. C	79. D	89. C	99. E	109. D	119. A	129. D	139. E
70. B	80. C	90. C	100. A	110. A	120. E	130. B	140. D

SEMESTRAL

141. B	150. A	159. D	168. C	177. A	185. D	193. A
142. B	151. A	160. E	169. C	178. B	186. B	194. B
143. D	152. A	161. A	170. C	179. D	187. C	195. E
144. C	153. D	162. A	171. A	180. D	188. C	196. B
145. C	154. A	163. B	172. B	181. D	189. D	197. C
146. C	155. C	164. B	173. C	182. E	190. C	198. A
147. B	156. B	165. B	174. D	183. C	191. E	199. A
148. A	157. C	166. B	175. D	184. C	192. B	200. D
149. A	158. B	167. A	176. E			

SEMESTRAL INTENSIVO

201. A	210. C	219. C	228. A	237. A	246. C	255. E
202. D	211. D	220. A	229. B	238. A	247. C	256. B
203. B	212. A	221. *	230. *	239. E	248. D	257. A
204. D	213. B	222. B	231. A	240. *	249. B	258. C
205. A	214. C	223. A	232. B	241. E	250. B	259. D
206. C	215. *	224. B	233. A	242. D	251. D	260. A
207. E	216. B	225. B	234. A	243. D	252. E	
208. C	217. *	226. D	235. E	244. E	253. B	
209. B	218. B	227. A	236. B	245. *	254. E	

REPASO

261. A	267. C	273. D	279. C	285. A	291. C	297. E
262. B	268. C	274. E	280. B	286. A	292. D	298. A
263. A	269. A	275. C	281. E	287. A	293. A	299. A
264. B	270. E	276. E	282. C	288. A	294. C	300. A
265. D	271. B	277. D	283. E	289. C	295. B	
266. B	272. E	278. A	284. B	290. C	296. E	

* Son preguntas para demostrar

RELACIONES MÉTRICAS

INFORMES
Av. ALFONSO UGARTE Nº1310 Of. 212 - BREÑA
423-8154

Consultas:
ob_julio@hotmail.com